普通高等教育"十三五"规划教材
广东省精品资源共享课配套教材
应用型本科院校规划教材

高等数学（下册）

（含练习册）

主　编　高　洁　唐春艳
副主编　李婷婷　祝颖润

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
广东省精品资源共享课配套教材
应用型本科院校规划教材

高等数学（含练习册）

（下册）

主　编　高　洁　唐春艳
副主编　李婷婷　祝颖润

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据编者多年的教学实践经验，参照最新制定的“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，以及教育部最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中有关高等数学部分的内容编写而成，分为上、下两册.

本书为下册，主要内容包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数，书后附习题答案与提示、附录复数.

本书可作为普通高等学校非数学类专业本科一年级学生的教材，也可作为高年级学生考研辅导参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：含练习册. 下册/高洁，唐春艳主编. —北京：科学出版社，2018.8

普通高等教育“十三五”规划教材·广东省精品资源共享课配套教材·应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-03-057992-8

I. ①高…　II. ①高…　②唐…　III. ①高等数学-高等学校-教材
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 130345 号

责任编辑：昌　盛　梁　清　孙翠勤 / 责任校对：彭珍珍

责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16

2018 年 8 月第一次印刷　印张：18 1/2

字数：373 000

定价：42.00 元(含练习册)

前 言

当你开始阅读这本书时，你就成了这本书的创作者之一．你将和我们一起来审视它的意义与价值，而你的意见和体会显得尤为重要．合作已经开始了，这是我们早就期待的，因为我们相信那将是一个愉快的历程，你的热情参与会给我们留下美好的记忆．

随着综合国力的提高，我国的教育布局也开始逐步地从“宝塔式”走向“大众化”．教育部发展规划司提出了将大部分包括独立学院在内的地方本科院校转型为应用型本科院校．《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》明确提出了需优化人才培养结构，不断扩大应用型人才培养规模．应用型本科院校的主要任务和目标是培养应用型人才，而实践性教学是培养应用型人才的重要组成环节．我们为每一章编写了相应的数学模型与数学实验内容，以期达到理论知识与实践应用相统一的目的．信息时代的新方法在影响着教育的每一环节；经典的与创新的教材、教学模式、教学方法等各种教学组件都在寻找自己合适的位置．请相信，这些新形势与新思维我们都给予了足够的关注．本教材就是在这种寻觅和探索的思想指导下完成的．

取材时我们充分地考虑了你学习后续课程的需要，本教材涵盖了高等数学的经典内容，这也是教学大纲的要求．内容是经典的，但这绝不意味着处理方法也必须是经典的．与传统教材相比，无论是概念的引入，还是定理的证明与应用，我们都不惜花费相当大的篇幅用于与你所习惯的思维方式的衔接．始终在力争做到“浅入”而“深出”．本教材中的选修内容用*标出．

学习过程中，我们建议你对以下几点给予关注．

(1) 在大学的学习过程中，概念和计算同等重要．只有反复、认真地阅读教材，你才能真正掌握大学数学的基本概念．每章节的习题中都安排了简单的计算题，其目的是帮助你检查对基本算法的理解．在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，便于发现哪些知识还没有真正理解．

(2) 本教材本着紧密联系实际，服务专业课程的宗旨，精选了不少涉及基本数学知识、能体现数学建模精神、使你有兴趣学习，且在你今后学习专业课程时可能接触到的应用范例和数学建模问题，如作为变化率的导数在工程、经济、医药等领域中的应用，逻辑斯谛模型及其在人口预测、新产品的推广模型与经济增长预测方面的应用等．这些实际应用范例既为你理解数学抽象概念提供了认识基础，也有助于加强与后续专业课程的联系．

高等数学之“高等”，绝不仅“高等”于内容上．就其思想方法而言也与初等

数学有着很大的区别. 顺利完成由初等数学到高等数学的过渡, 同时实现由“形象思维”到“抽象思维”的转变是我们对你的期盼, 这也是本教材的任务之一. 除了把知识介绍给你之外, 我们还希望在后续学习的能力与严谨思维方式的培养等方面对你有所帮助. 学完本教材之后, 即使你获得了很优异的成绩, 也不要认为已完成了学业. 掌握好基本理论与基本技能固然重要, 触摸到问题的本质与精髓却是更加艰深的任务. 我们会祝愿着你的知识有一天能升华到那种理想的境界.

毋庸置疑, 考入大学意味着你已迈进了一条希望之路. 但应清醒地认识到这仅仅是一个新的开始, 理想的真正实现还需要你继续付出辛勤的劳动. 改革、竞争、快节奏犹如大浪淘沙, 谁笑到最后谁笑得最好. 望你轻拂高考的征尘, 依旧紧束戎装, 去笑迎新的挑战. 记住, 机遇总是偏袒勤奋的人.

愿本教材助你成功, 祝你成功, 这是我们共同的心愿.

编　者

2018 年 6 月 26 日

于珠海观音山下

目　录

第 7 章　空间解析几何

7.1　向量及其线性运算

7.1.1　空间直角坐标系

类似于平面直角坐标系，我们来建立空间直角坐标系．过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且具有相同的长度单位．这三条数轴分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，统称为**坐标轴**．它们的正向符合**右手螺旋规则**，即以右手握住 z 轴，当右手的四指从 x 轴正向以 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7.1 所示，这样的三条坐标轴就构成了**空间直角坐标系**．三条坐标轴中任意两条可以确定一个平面，称为**坐标面**，分别称为 xOy 面、yOz 面及 zOx 面．它们把空间分割成八个部分，称为八个**卦限**：含有 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴的部分称为第Ⅰ卦限，位于 xOy 平面上方还有三个部分，按逆时针方向，依次分别称为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限．位于第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限下方的四个部分依次分别称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限．

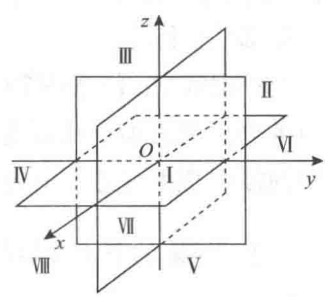

图 7.1

设 M 为空间的一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，并交于点 P,Q,R，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y,z，则点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)；反过来，给定一个有序数组 (x,y,z)，在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，过点 P,Q,R 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴．这三个平面的交点 M 是由有序数组 (x,y,z) 唯一确定的．于是，空间的点 M 与有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，称有序数组 (x,y,z) 为**点 M 的坐标**，并把点 M 记作 $M(x,y,z)$．

坐标面和坐标轴上的点具有一定的特征．例如 xOy 面上的点的坐标为 $(x,y,0)$，z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$．

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的**距离** d，根据勾股定理可得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

7.1.2 向量及其线性运算

1. 向量的概念

我们把既有大小又有方向的量，称为**向量**，如速度、位移、加速度等.

我们可以用空间中的有向线段来表示向量，这里利用有向线段的长度来表示向量的大小，利用有向线段的方向来表示向量的方向. 以 P_1 为起点，P_2 为终点的向量记作 $\overrightarrow{P_1P_2}$，有时也用粗体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}$ 等来表示向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$，称作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**模**. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$，零向量的始点和终点重合，它的方向可以看作是任意的. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 因此向量经过平移后仍与原向量相等，在数学中讨论的向量往往与起点无关，这种向量称为**自由向量**. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或者相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**平行**的，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的，因此可认为零向量与任何向量都是平行的.

在空间中，任意一个向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，都可以通过平移将其起点 P_1 移到原点 O，相应的终点变为 M，从而变为起点在坐标原点的向量 $\overrightarrow{OM}$（称为点 M 对于原点 O 的**向径**）. 因此任意一个向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与唯一的向径 $\overrightarrow{OM}$ 相对应.

2. 向量的线性运算

定义 1.1 给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{b}$ 的起点置于 $\boldsymbol{a}$ 的终点，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点向 $\boldsymbol{b}$ 的终点所引的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，称此方法为**三角形法则**(图 7.2).

三角形法则与力学中的**平行四边形法则**是一致的. 后者是说，以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为相邻两边作平行四边形(图 7.3)，它的对角线即是向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 有公共的起点）.

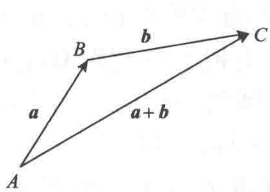

图 7.2

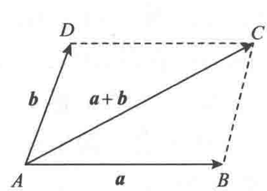

图 7.3

向量的加法符合下列运算规律:

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

定义 1.2　设向量 $\boldsymbol{a}$, λ 为实数. 称向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积, 简称**数乘向量**, 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$, 当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同; 当 $\lambda<0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反; 当 $\lambda=0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) **结合律**　$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$;

(2) **分配律**　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

借助加法和数乘运算来引进向量的减法. 对于向量 $\boldsymbol{a}$, 向量 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等, 但方向相反, 称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量. 显然 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. 对于向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{P_1P_2}$ 和 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{P_1P_3}$, 规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 如图 7.4 所示, 从 $\boldsymbol{b}$ 的终点向 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量 $\overrightarrow{P_3P_2}$ 就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

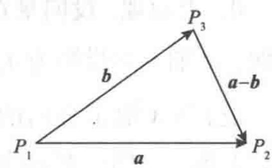

图 7.4

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行, 因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系, 即有以下定理:

定理 1.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明　条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$, 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向, 且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$, 两式相减, 得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq\boldsymbol{0}$, 故 $|\lambda-\mu|=0$, 即 $\lambda=\mu$. □

设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量, 那么按照向量与数的乘积的定义.

一个非零向量可以用它的模与它同向的单位向量的乘积来表示, 即 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$, 从而

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这表示一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以它的模的倒数, 结果为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

向量的加法和向量与数的乘法统称为向量的**线性运算**.

3. 向量及向量线性运算的坐标表示

首先我们利用图 7.5 讨论向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴之间的关系.

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴正方向夹角为 α，将点 M 向 x 轴上投影得点 P，即过点 M 作垂直于 x 轴的平面与 x 轴的交点为 P，则 x 轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值即为点 P 的坐标 a_x，称作向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴上的投影，于是有 $a_x=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\alpha$.

可以看出，当 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$a_x>0$；当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$a_x=0$；当 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时，$a_x<0$. 类似地，设向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 y 轴、z 轴正方向的夹角为 β,γ，从而向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 y 轴、z 轴上的投影为 $a_y=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\beta$，$a_z=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\gamma$.

设 $\boldsymbol{i}$ 为 x 轴正方向的单位向量，则有 $\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i}$. 一般用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴、y 轴、z 轴正方向的单位向量，称它们为坐标系的坐标向量.

给定向量 $\boldsymbol{a}$，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$（图 7.6），通过点 $M(a_x,a_y,a_z)$ 作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，则点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 P,Q,R，则有 $\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=a_y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=a_z\boldsymbol{k}$，再由平行四边形法则，便得

$$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})+\overrightarrow{OR}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\overrightarrow{OM}$ **按坐标向量的分解式**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的向径 OM 在三条坐标轴上的投影 $OP=a_x,OQ=a_y,OR=a_z$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，并记作 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，上式叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式. 从而向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}$. 注意任一向量对应一个向径，且此向量的坐标与其向径终点的坐标一致.

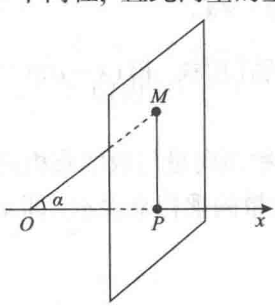

图 7.5

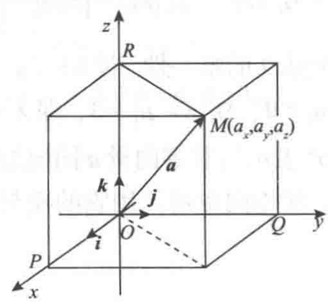

图 7.6

现在来考察如何借助向量坐标进行向量之间的线性运算. 利用向量的坐标，可得向量的加法、减法及向量与数的乘法的运算如下：

设两个向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，即 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，利用向量加法及向量与数的乘法的运算规律，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}) \\
&= (a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k} \\
&= \{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\}.
\end{aligned}
$$

类似地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\}$，$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$.

而对于一般情况下，起点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 而终点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ (图 7.7)，根据向量减法，类似地有 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$.

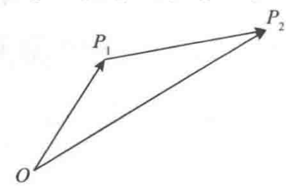

图 7.7

4. 向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示，也可以用它的坐标来表示. 为了应用上的方便，有必要找出这两种表示法之间的联系，就是说要找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系.

首先定义两个向量之间夹角，设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$ (设 $\varphi=\angle AOB$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 7.8)，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值. 类似地可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，我们可以用它与三条坐标轴正方向的夹角 α, β, γ $(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$ 来表示它的方向(图 7.9)，称夹角 α, β, γ 为非零**向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角**.

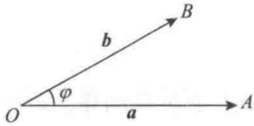

图 7.8

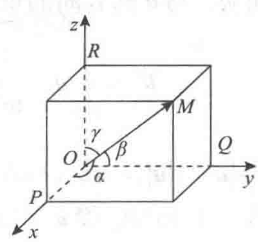

图 7.9

由向量在坐标轴上投影的定义可得

$$
\begin{cases}
a_x = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\alpha = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \\
a_y = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\beta = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \\
a_z = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\gamma = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma.
\end{cases}
$$

上式中出现的$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$叫做向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦. 通常也用向量的方向余弦来表示向量的方向.

通过图 7.9 可以看出，因为$OP=a_x, OQ=a_y, OR=a_z$，故向量$\boldsymbol{a}$的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1}$$

根据前面讨论可知，当$\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$时，可得

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\end{cases} \tag{2}$$

(1)式和(2)式是用向量的坐标表示向量的模和方向余弦的公式.

把公式(2)的三个等式两边分别平方后相加，便得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

这就是说，任一非零向量的方向余弦的平方和等于 1.

由此可见，与$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

此时，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

由定理 1.1 可知，设$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$和$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$是非零向量，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

注 当分母b_1,b_2,b_3中某一项为零时，可以理解为对应项的分子也为零. 比如说当$b_1=0,b_2\neq 0,b_3\neq 0$时，可以将上面的等式理解为$\begin{cases}a_1=0,\\ \dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}.\end{cases}$

当b_1,b_2,b_3有两个为零，例如$b_1=b_2=0,b_3\neq 0$这时上式可理解为$\begin{cases}a_1=0,\\ a_2=0.\end{cases}$

例 1.1　已知点 $A(1,1,2)$, $B(1,0,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量.

解　因为 $\overrightarrow{AB}=\{1-1,0-1,3-2\}=\{0,-1,1\}$，于是 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,-1,1\}=\left\{0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

例 1.2　已知点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\}=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$，$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=2$. 可求得方向余弦为 $\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，又由于 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$，从而 $\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3}{4}\pi$.

习题 7.1 解答

习题 7.1

1. 在坐标面 yOz,zOx 上的点和 x 轴，y 轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置:

$$A(3,4,0);\quad B(0,4,3);\quad C(3,0,0);\quad D(0,-1,0).$$

2. 如图 7.10, 设 $ABCD\text{-}EFGH$ 是一个平行六面体, 在下列各对向量中, 指出哪些相等, 哪些互为负向量:

(1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$;　(2) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CG}$;　(3) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EG}$;

(4) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GF}$;　(5) $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CH}$.

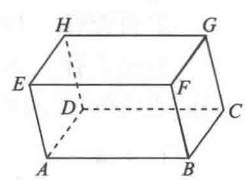

图 7.10

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试利用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 求 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$，试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_2M_1}$.

5. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模, 方向余弦和方向角.

6. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴、y 轴及 z 轴上的投影.

7. 分别求出向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的模, 并分别用单位向量 $\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{b}^0,\boldsymbol{c}^0$ 表达向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$.

8. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$ 的单位向量.

9. 若 $\boldsymbol{a}=\{1,2,3\},\boldsymbol{b}=\{2,4,k\}$，试求 k 值, 使其满足

(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;

(2) $3|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

10. 已知点 $P(-2,1,3)$，求向径 $\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦. 若一向径的两个方向角均是 60°, 求第三个方向角.

7.2 数量积和向量积

7.2.1 数量积

在物理学中, 如果某物体在外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线移动, 位移向量为 $\boldsymbol{S}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 为 $W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cos\theta$，其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角 $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ (图 7.11).

定义 2.1 对于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(图 7.12)为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

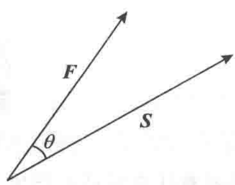

图 7.11

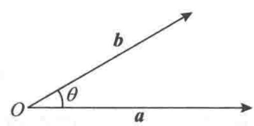

图 7.12

根据向量的数量积的定义, 容易验证如下运算律:

(1) **交换律** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) **分配律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) **结合律** $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ （λ 为实数).

另外, 根据向量的数量积定义, 可以验证以下性质成立.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，这里如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直, 记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

对于坐标向量, 易证明下面结论成立:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

从而可以得到以下性质:

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

例 2.1　已知三点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解　作向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$，$\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角. 这里，$\overrightarrow{MA}=\{1,1,0\}$, $\overrightarrow{MB}=\{1,0,1\}$，从而

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1,$$

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\qquad \left|\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

代入两向量夹角余弦的表达式, 得

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{MA}\right|\left|\overrightarrow{MB}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

由此得 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

7.2.2　向量积

在力学中, 在研究物体的转动时, 引进了力矩的概念. 可以用数学的语言表述成如下的定义.

定义 2.2　向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一个向量 $\boldsymbol{c}$：

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$；

(2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 服从右手规则(图 7.13).

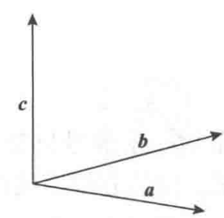

图 7.13

向量积具有如下性质:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

这是因为夹角 $\theta=0$，所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin\theta=0$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之, 如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0$，故必有 $\sin\theta=0$，于是 $\theta=0$ 或 π，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之, 如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么 $\theta=0$ 或 π，于是 $\sin\theta=0$，从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

由于可以认为零向量与任何向量都平行, 因此上述结论可叙述为: 向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量积符合下列运算规律:

(1) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

这是因为按右手规则从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$ 定出的方向恰好与按右手法则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 定出的方向相反. 它表明交换律对向量积不成立.

(2) **分配律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(3) 向量积还符合**结合律**　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

对于坐标向量, 易验证下列结论:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

一般地, 设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$, 则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\
&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\\
&\quad+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})\\
&\quad+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\
&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\
&=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\
&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

最后一个等号只是一个简便记法, 其中的三阶“行列式”也不是通常意义下的行列式, 仅是方便记忆的一种符号.

例 2.2　设 $\boldsymbol{a}=\{2,1,-1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,-1,2\}$, 求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$

例 2.3　计算以向量 $\boldsymbol{a}=\{8,4,1\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{2,-2,1\}$ 为边的平行四边形面积.

解　以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形面积

$$S=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

这恰好是向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模, 即 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$. 现在来计算

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\8&4&1\\2&-2&1\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.$$