理性派

图解直观数学译丛

MAA PRESS An Imprint of the AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

组合证明的艺术

[美] 阿瑟 T. 本杰明（Arthur T. Benjamin）
詹妮弗 J. 奎因（Jennifer J. Quinn） 著

刘佳 夏爱生 鞠涛 钟敏 译

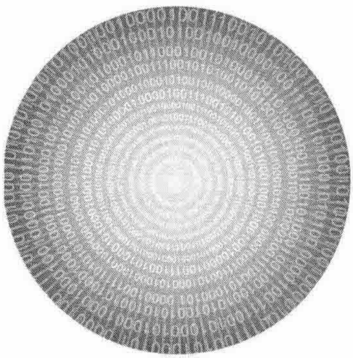
机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

组合证明的艺术

[美] 阿瑟 T. 本杰明 (Arthur T. Benjamin)
詹妮弗 J. 奎因 (Jennifer J. Quinn) 著

刘佳 夏爱生 鞠涛 钟敏 译

安亚俊 校



机械工业出版社

本书作者采取对话式的风格讲述了关于组合数学的有趣的内容，使读者能感受到阅读的愉悦。书中时不时会有一些惊喜，比如用图像化的处理方法以及用易于推广的证明方式，证明了许多组合数学中重要的恒等式。

全书共有9章：第1章介绍了斐波那契数列的组合解释；第2章介绍了广义斐波那契数列和卢卡斯数列；第3章通过对平铺进行着色，引入了线性递推的组合解释；第4章介绍了连分式；第5章介绍了有关二项式系数的内容；第6章讨论了正负号交错的二项式恒等式；第7章探究了调和数与第一类斯特林数之间的关系；第8章介绍了连续整数和、费马小定理、威尔逊定理以及一部分拉格朗日定理的逆定理；第9章介绍了进阶斐波那契恒等式和其他一些恒等式。

本书可作为组合数学课程的补充读物，读者无论是高中生还是数学方面的研究人员，均会不同程度地受益。

北京市版权局著作权合同登记　图字：01-2013-1814号。

图书在版编目（CIP）数据

组合证明的艺术/（美）阿瑟T. 本杰明（Arthur T. Benjamin），（美）詹妮弗J. 奎因（Jennifer J. Quinn）著；刘佳等译. —北京：机械工业出版社，2017.3
（图解直观数学译丛）
书名原文：Proofs that Really Count：The Art of Combinatorial Proof
ISBN 978-7-111-58552-7

Ⅰ.①组… Ⅱ.①阿… ②詹… ③刘… Ⅲ.①数列-高等学校-教材 Ⅳ.①O171

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第289824号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　李　乐　王　芳　姜　凤
责任校对：王　延　封面设计：路恩中
责任印制：孙　炜
北京联兴盛业印刷股份有限公司印刷
2019年6月第1版第1次印刷
169mm×239mm · 12.75印张 · 1插页 · 217千字

标准书号：ISBN 978-7-111-58552-7
定价：39.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务
服务咨询热线：010-88361066
读者购书热线：010-68326294

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
金书网：www.golden-book.com
教育服务网：www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

前　言

本书的每一个证明最终都可以归纳为一个计数问题，通常用两种不同的方法数数。计数会给出美丽，通常基本，且简洁的证明。虽然它不一定是最简单的方法，但它却提供了另一种理解数学事实的途径。对于一个组合数学研究者，这种证明方法才是唯一正确的。我们把这本书献给各位读者，作为罗杰·内尔森的著作《数学写真集Ⅰ——无需语言的证明》（机械工业出版社出版）相应的计数版本。

为什么计数?

作为人类，我们在很小的时候就学会了如何数数。一般一个两岁的孩子就会自豪地数到10，以得到父母的称赞。虽然很多成年人说自己数学很差，但却没有人承认自己不会计数。计数是我们最早用到的工具之一。物理学家恩斯特·马赫甚至说：“在数学中不存在不能通过直接计算解决的问题。”[36]

组合证明可以尤其强大。至今，我（A. T. B.）仍记得当我还是一名大一新生时，第一次接触组合证明时的情形。我的教授通过 $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{次}}$ 证明了二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}。$$

在证明定理的过程中，他问大家有多少种方法可以得到 $x^k y^{n-k}$ 项。忽然一切都清楚了。是的，我之前见过很多种二项式定理的证明，但他们看起来十分笨拙，我那时常想一个思维正常的人是怎么创造出这么一个结果的。但现在，这看起来非常自然。我永远也不会忘记这个结果。

数什么?

我们选择了我们最喜欢的，使用数学中常出现数字的（二项式系数、斐波那契数、斯特林数等）恒等式，并且选用了优雅的计数证明。在一个典型

的恒等式中，我们提出一个计数问题，分别用两种不同的方法回答。一种方法的答案是恒等式的左边，另一种方法是恒等式右边。由于两个答案解决的是同一个计数问题，所以它们必须相等。恒等式可以看作是从两个不同的角度解决的计数问题。

我们用恒等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ 来举例说明本书的证明结构。计算 $\binom{n}{k}$ 不需要使用公式 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$。取而代之，我们用 $\binom{n}{k}$ 表示由 n 个元素组成的集合中任意选取 k 个元素组成的子集的个数，或是更形象地，其表示从有 n 个人的班级中选出 k 名学生组成一个班委会的方法数。

问题　从有 n 个人的班级中组成一个班委会有多少种选法？

答 1　由 0 个学生组成的班委会为 $\binom{n}{0}$ 个，由 1 个学生组成的班委会为 $\binom{n}{1}$ 个，总而言之，由 k 个学生组成的班委会的种类是 $\binom{n}{k}$ 种。因此，班委会的种类的总和为 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ 种。

答 2　为了组建一个任意学生数目的班委会，我们需要决定每个学生是否属于班委会。因为这 n 个学生中的每一个学生要么在班委会，要么不在，所以每个学生都有两种可能性，因此有 2^n 种方法。

我们在这两个答案上的逻辑都无懈可击，因此它们一定是相等的，即恒等式成立。

另一个有用的证明技巧是把一个恒等式的左边表示为一个集合的大小，右边表示为另一个不同的集合的大小，然后在两个集合之间建立一个一一对应关系。我们用如下恒等式说明证明结构

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k}=\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k+1},\ n>0。$$

这两个求和都是有限的，因为当 $i>n$ 时，有 $\binom{n}{i}=0$。因此很容易看出等式两边计数的意义，关键是找出它们之间的对应关系。

集合 1　从有 n 个人的班里选偶数个人组成一个班委会，这个集合的大

小是 $\sum_{k \geqslant 0}\binom{n}{2k}$。

集合 2　从有 n 个人的班里选奇数个人组成一个班委会，这个集合的大小是 $\sum_{k \geqslant 0}\binom{n}{2k+1}$。

对应关系：假设班里有一名学生叫作沃尔多，那么任何一个有偶数个成员的班委会都可以通过问“沃尔多在哪儿”* 变成一个有奇数个成员的班委会。如果沃尔多在班委会里，那就去掉他；如果他不在班委会里，那就加上他。无论哪种方法，班委会的成员数都将由偶数变成奇数。

由于“去掉或加上沃尔多”的过程是完全可逆的，所以我们在这些集合间得到一个一一对应的关系。因此，这两个集合必须大小相等，于是恒等式成立。

如果我们认为另一种证明方法会给问题的解决带来新的思路，通常我们会用不止一种方法证明恒等式。例如，上面的恒等式也能通过直接计算偶数子集数来证明。参见恒等式 129 及后续讨论。

在阅读本书时，你会期待看到哪些内容呢？第 1 章介绍了一种斐波那契数列的组合解释，即用方砖和多米诺砖进行平铺的问题，它是第 2 ~ 4 章的基础。我们从此处切入是因为斐波那契数列本身很有趣，并且作为组合学的内容，它的证明过程对于许多读者来说也将是一种意外的愉悦。与所有章节一样，本章以基本的恒等式和简单的论证开始，这将有助于读者在接触更多复杂材料前熟悉概念。推广斐波那契平铺将允许我们探究涉及广义范围的斐波那契数的恒等式，包括卢卡斯数（第 2 章）、线性递推（第 3 章）和连分式（第 4 章）。

第 5 章介绍的是二项式系数的经典组合内容。对集合计数的计重或不计重会得出有关二项式系数的恒等式。第 6 章介绍了含有交错正负号的二项式恒等式。通过在两个含有奇数个元素的集合和偶数个元素的集合间寻找对应关系，我们可以通过“容斥原理”避免使用已熟知的过度计数或计数不足的方法。

调和数，就像连分数，都不是整数。因此，组合解释需要研究具体表达式的分子和分母。调和数与第一类斯特林数是相互关联的，第 7 章探究了这种关联以及第二类斯特林恒等式。

第 8 章考虑了更多的经典结果，它们均来自算术、数论和代数学，包括连

* 校注：“沃尔多在哪儿”（Where's Waldo）是一个视觉游戏，玩家要在复杂的图形中找到沃尔多。

续整数之和、连续平方和、连续立方和及费马小定理、威尔逊定理以及拉格朗日定理的一个部分逆定理。

第 9 章我们处理了更为复杂的斐波那契恒等式和二项式恒等式。这些恒等式需要巧妙的论证，引入着色平铺或用概率模型等。它们也许是本书最具挑战性的部分，但的确值得花时间去研究。

我们偶尔会脱离恒等式去证明有趣的应用，例如，第 1 章中关于斐波那契数的可除性证明，第 2 章中一个小魔术，第 5 章中计算二项式系数奇偶性的捷径以及第 8 章中任意素数同余的推广等。

除了第 9 章，每一章节都给有兴趣的读者准备了一些对应的练习，从而帮助他们检测自己的计数技巧。大多数章节都包含了一些依然在寻求组合证明的恒等式。书中包括了习题提示，参考书目，并且在附录中列出了书中所涉及的全部恒等式。

我们希望每一章节是独立的，这样您就可以用一种非线性的方式去阅读。

谁应当计数?

这个问题最直接的答案是“每一个人!”，我们希望本书可以让没有经过数学专业训练的读者来欣赏。本书的大多数证明高中水平的学生都可以接受。另一方面，教师也许可以将这本书作为有用的教学资源，它侧重了证明的书写过程以及对问题的创造性处理技巧。我们不将这本书看成是对组合证明的完整概述。相反，这只是一个开始。阅读完之后，你再也不会用之前的方法看待斐波那契数和连分数之类的数字了，我们希望例如表示斐波那契数的恒等式

$$f_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}$$

可以让你感觉到有些东西正在被计数并且有去计数的意愿。最后，我们希望这本书能激励那些希望发现旧恒等式的组合学解释或是新的恒等式的数学家。亲爱的读者，我们诚邀您在之后的版本中与我们分享你们喜爱的组合学证明。

我们希望为完成这本书的所有努力在某些方面是有价值的。*

* 校注：这里原文一语双关：“We hope all of our effort in writing this book will count for something.”原文一语双关：“Who counts?”

谁对本书的完成做出了贡献?

我们荣幸地感谢为这本书的完成做出直接贡献或间接贡献的人们。那些早于我们的，对组合学证明的兴起具有推动作用的人。以下的书籍是我们不能忽视的，有丹尼斯·斯坦顿和丹尼斯·怀特的《构造组合学》，理查德·斯坦利的《计数组合学》的第一和第二辑，伊恩·古尔登和大卫·杰克逊的《组合计算》，荣·雷姆尔特、高德纳和帕塔许尼克的《具体数学》。除了这些数学家，其他人的工作也启发了我们，包括乔治E. 安德鲁斯、大卫·布雷苏德、理查德·布鲁阿尔迪、伦纳德·卡里茨、艾拉·盖赛尔、阿德里亚诺·盖莎、拉尔夫·格里马尔迪、理查德·盖伊、斯蒂芬·米尔恩、吉姆·普罗普、玛尔塔·斯韦德、赫伯特·维尔夫，以及多伦·泽尔博格。

寻求组合学定理证明过程的好处之一是能让本科研究者参与进来。在此感谢罗宾·鲍尔、蒂姆·加内斯、丹·奇乔、卡尔·马赫博格、格雷格·普勒斯顿以及克里斯·哈努撒、大卫·盖普勒、罗伯特·盖普勒和杰里米·劳斯，他们获得了哈维穆德学院贝克曼研究基金、霍华休斯医学研究中心以及珍妮特·迈尔的本科生研究奖励支持。我们的同行们彼得G. 安德森、鲍勃·比尔斯、杰伊·科德斯、杜安·德·唐普勒、佩尔西·戴康尼斯、艾拉·盖塞尔、汤姆·哈尔沃森、梅尔文·豪斯特、丹·卡尔曼、格雷格·莱温、T.S. 迈克尔、迈克·欧瑞森、罗伯·普拉特、吉姆·普罗普、詹姆斯·坦顿、道格·韦斯特、比尔·兹维克尔，尤其是弗朗西斯·苏，为我们提供了思路、恒等式、结果或是其他珍贵的信息。

如果没有唐·阿尔伯斯的鼓励，丹·威尔曼的工作以及美国数学协会的道奇阿尼委员会，我们将不会完成本书。

最后，我们永远感激我们的家人所给予的爱与支持。

目　录

第 1 章

斐波那契恒等式

定义 满足 $F_0=0$，$F_1=1$，并且当 $n \geqslant 2$ 时，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 的数称为斐波那契（Fibonacci）数。

斐波那契数列中的前几个数为 0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，…。

1.1 斐波那契数的组合解释

有多少种由 1 和 2 组成的序列的和为 n？我们把这一计数问题的答案记为 f_n。例如，$f_4=5$，即 4 可以用以下 5 种方式加得：

$$1+1+1+1,\ 1+1+2,\ 1+2+1,\ 2+1+1,\ 2+2。$$

表 1.1 示意的是 n 较小时 f_n 的取值。显然，f_n 至少开始几项也为斐波那契数。实际上，f_n 的增长方式和斐波那契数相同，即当 $n \geqslant 2$ 时，$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$。从组合学的角度来看，我们考虑序列中的第一个数。如果第一个数是 1，数列中其余的数之和为 $n-1$，因此有 f_{n-1} 种方法来补全这个数列；如果第一个数是 2，那么有 f_{n-2} 种方法来补全这个数列。因此，$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$。

为了对 f_n 有一个更加直观的印象，我们可以把 1 想象成方砖，把 2 想象成多米诺砖，那么 f_n 就可以看成是将一个长为 n 的木板用方砖和多米诺砖进行平铺时的方法数。为了简单起见，我们将长为 n 的木板记为 n-板[⊖]。图 1.1 列举的是 $f_4=5$ 的平铺方式。

⊖ 校者注：方砖尺寸是 1×1，多米诺砖尺寸是 1×2。在后文中我们把尺寸为 1×3 的砖块称为三米诺，尺寸为 $1 \times k$ 的砖称为 k 米诺。

n- 板的原文为 n- board。

表 1.1　f_n 和用 1 和 2 求和为 n 的方式，其中 $n=1, 2, \cdots, 6$

1	2	3	4	5	6
1	11	111	1111	11111	111111
	2	12	112	1112	11112
		21	121	1121	11121
			211	1211	11211
			22	122	1122
				2111	12111
				212	1212
				221	1221
					21111
					2112
					2121
					2211
					222
$f_1=1$	$f_2=2$	$f_3=3$	$f_4=5$	$f_5=8$	$f_6=13$

图 1.1　4-板的 5 种平铺方式

我们令 $f_0=1$，即 0-板 的平铺方法数；定义 $f_{-1}=0$。这样就可以得到斐波那契数的一种组合解释。

组合定理 1　令 f_n 为将一个 n-板用方砖和多米诺砖进行平铺的方式数，则 f_n 为斐波那契数。特别地，当 $n \geq -1$ 时，$f_n = F_{n+1}$。

1.2　恒等式

基本恒等式

数学是研究规律和模式的科学。如我们将要了解的，斐波那契数之间存在着奇妙的关系。虽然斐波那契恒等式可以有多种的证明方式，但我们发现通过组合的途径证明是最令人满意的。

为了方便构造组合，我们以 f_n 代替 F_n 来表示我们大部分的恒等式。虽然斐波那契数还有其他的组合解释（见习题 1-9），但在本书中，我们主要使用

平铺的定义方式。

第一个恒等式和本书的大多数证明一样，都将计数问题根据一些性质分解成若干不重复的小问题。我们称其为对于此性质的考量。

恒等式 1　若 $n \geqslant 0$，则 $f_0+f_1+f_2+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$。

问　至少使用一块多米诺砖将 $(n+2)$- 板平铺，共有多少种方式？

答 1　$(n+2)$- 板的平铺共有 f_{n+2} 种方式。排除全用方砖的方式，便得到 $f_{n+2}-1$ 种至少使用一块多米诺砖的方式。

答 2　对最后一块多米诺砖的位置加以考量。若最后一块多米诺砖位于第 $k+1$ 和 $k+2$ 的单元格，则有 f_k 种方式。这是因为从单元格 1 到单元格 k 有 f_k 种方式平铺，单元格 $k+1$ 和 $k+2$ 必被一块多米诺砖平铺，单元格 $k+3$ 到 $n+2$ 必须被方砖平铺。因此至少用一块多米诺砖平铺共有 $f_0+f_1+f_2+\cdots+f_n$ $\left(\text{即}\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ 种方式。(见图 1.2)。

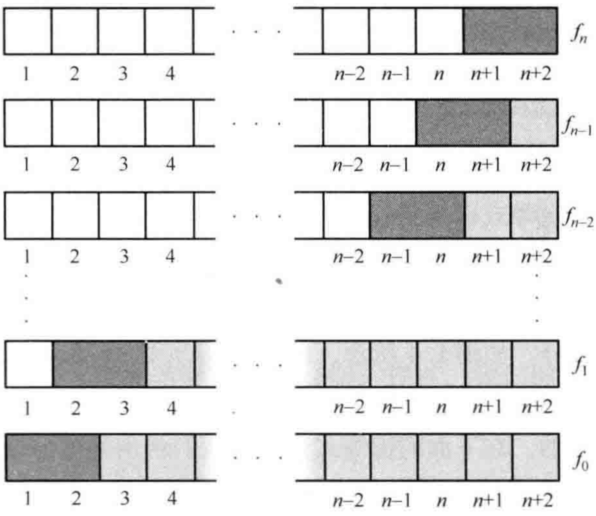


图 1.2　用方砖和多米诺砖平铺 $(n+2)$- 板，并对最后一块多米诺砖的位置加以限制可得 $f_0+f_1+f_2+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$

恒等式 2　若 $n \geqslant 0$，则 $f_0+f_2+f_4+\cdots+f_{2n}=f_{2n+1}$。

问　$(2n+1)$- 板的平铺共有多少种方式？

答 1　由定义，共有 f_{2n+1} 种方式。

答 2　对最后一块方砖的位置加以考量。因为木板的长为奇数，所以必定至

少有一块方砖并且最后一块方砖的位置在奇数单元格上。若最后一块方砖位于第 $2k+1$ 个单元格，则共有 f_{2k} 种平铺方式（见图 1.3）。因此平铺数总和为 $\sum_{k=0}^{n} f_{2k}$。

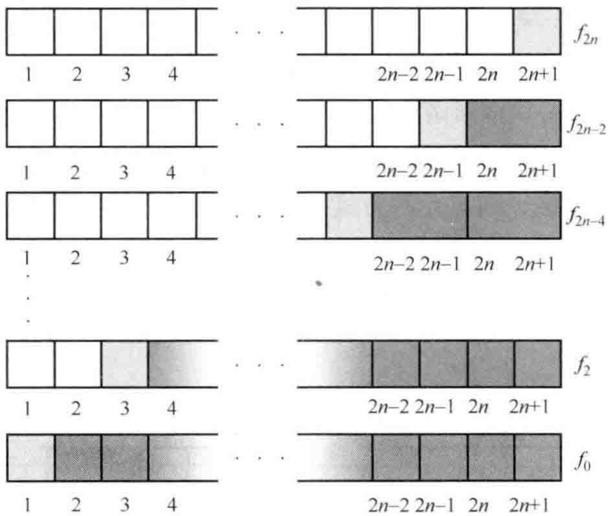


图 1.3　用方砖和多米诺砖平铺 $(2n+1)$-板，对最后一块方砖的位置加限制条件可得 $f_0+f_2+f_4+\cdots+f_{2n}=f_{2n+1}$

许多斐波那契恒等式取决于在某给定的位置是否可分。我们称 n-板在单元格 k 可分，如果其可分为两部分平铺，即一部分从单元格 1 到 k，另一部分从单元格 $k+1$ 到 n。另一方面，如果一块多米诺砖占据了单元格 k 和 $k+1$，那么就称在单元格 k 不可分。如图 1.4 所示，10-板在单元格 1，2，3，5，7，8，10 可分隔，在单元格 4，6，9 不可分隔。注意 n-板的平铺方式（简记为 n-平铺）[㊀]在单元格 n 总是可分的。在下面的恒等式证明中我们将用到这个想法。

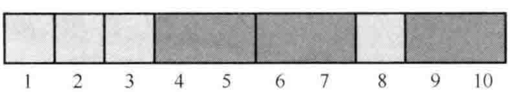


图 1.4　一个 10-平铺在单元格 1，2，3，5，7，8，10 可分隔，在单元格 4，6，9 不可分隔

恒等式 3　若 $m,n\geqslant 0$，则 $f_{m+n}=f_mf_n+f_{m-1}f_{n-1}$。

㊀ n-平铺的原文为 n-tiling。

问　$(m+n)$- 板平铺有多少种方式?

答 1　有 f_{m+n} 种。

答 2　考量在单元格 m 是否可分。

若 $(m+n)$- 平铺在单元格 m 可分，即被分成了 m- 平铺和 n- 平铺两部分，则共有 $f_m f_n$ 种方式。

若 $(m+n)$- 平铺在单元格 m 不可分，则必在单元格 m 和 $m+1$ 平铺了一块多米诺砖，因此在多米诺砖前为 $(m-1)$- 平铺，在多米诺砖后为 $(n-1)$- 平铺。因此共有 $f_{m-1}f_{n-1}$ 种方式。

由于在单元格 m 或者可分隔，或者不可分隔，因此共有 $f_m f_n+f_{m-1}f_{n-1}$ 种平铺方式（见图 1.5）。

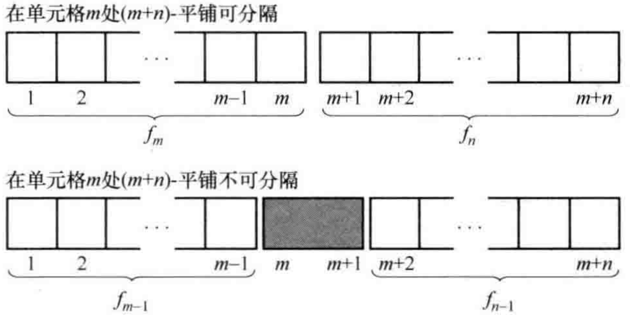


图 1.5　$f_{m+n}=f_m f_n+f_{m-1}f_{n-1}$ 的证明取决于 $(m+n)$- 平铺在单元格 m 的可分性

接下来的两个恒等式将斐波那契数与二项式系数联系了起来。在第 5 章中我们将探讨更多有关二项式系数的组合证明。现在，我们回忆一下二项式系数的组合定义。

定义　二项式系数 $\binom{n}{k}$ 是指从 n 个不同的元素中取出 k 个元素的所有组合的个数。

注意　若 $k>n$，则 $\binom{n}{k}=0$，因此下面的恒等式的和是有限的。

恒等式 4　若 $n\geqslant 0$，则 $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots=f_n$。

问　对于一个 n- 板有多少种平铺方式?

答 1　有 f_n 种。

答 2 考量多米诺砖的块数。如果用 i 块多米诺砖，那么有多少种平铺方式呢？答案若为非 0，那么必有 $0 \leqslant i \leqslant n/2$。这么一来就要使用 $n-2i$ 块方砖，因此共用了 $n\text{-}j$ 块砖。例如，图 1.6 是一个恰好使用 3 块多米诺砖和 4 块方砖平铺的 10- 平铺。多米诺砖是第 4，5，7 块砖。从 $n-i$ 个位置选取 i 个位置放多米诺砖的方式有 $\binom{n-i}{i}$ 种。因此共有 $\sum_{i\geqslant 0}\binom{n-i}{i}$ 种平铺方式。

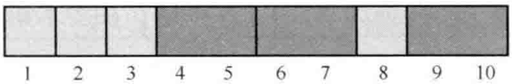


图 1.6 用 3 块多米诺砖的 10- 平铺共有 $\binom{7}{3}$ 种方式，这样的 10- 平铺将用 7 块砖，其中的 3 个为多米诺砖（第 4，5，7 为多米诺砖）

恒等式 5 若 $n \geqslant 0$，$\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}=f_{2n+1}$。

问 对于一个 $(2n+1)$- 板有多少种平铺方式？

答 1 有 f_{2n+1} 种 $(2n+1)$ - 平铺。

答 2 考量中间方砖两边的多米诺砖的块数。

$(2n+1)$- 板无论采用何种方式平铺必含有奇数块方砖。那么其中有一块方砖处于中间位置，即这块方砖的左右两侧方砖的块数相同，我们称之为中间方砖。例如，图 1.7 中一个 13- 平铺有 5 块方砖，中间方砖即第三块方砖位于第 9 个单元格。

若中间方砖左侧有 i 块多米诺砖，右侧有 j 块多米诺砖，那么有多少种平铺方式？按此方式进行平铺，共有 $(i+j)$ 块多米诺砖，$(2n+1)-2(i+j)$ 块方砖，因此中间方砖左右两侧各有 $n-i-j$ 块方砖。这样，中间方砖左侧共有 $(n-i-j)+i=n-j$ 块砖，其中有 i 块多米诺砖，因此它左侧共有 $\binom{n-j}{i}$ 种平铺方式。同理，它右侧共有 $\binom{n-i}{j}$ 种平铺方式。因此共有 $\binom{n-j}{i}\cdot\binom{n-i}{j}$ 种平铺方式。

令 i 和 j 变化，我们可得 $(2n+1)$ 平铺的种数为 $\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}$。

下面的恒等式若表示为 $F_{2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k$，则更为美观。

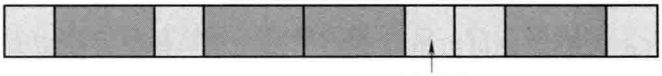


图 1.7　13- 平铺在中间方砖的左侧有 3 块多米诺砖，右侧有 1 块多米诺砖这样的平铺方式共有 $\binom{5}{3}\binom{3}{1}$ 种

恒等式 6　若 $n \geqslant 0$，则 $f_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_{k-1}$。

问　共有多少种 $(2n-1)$- 平铺

答 1　有 f_{2n-1} 种。

答 2　考量前 n 块砖中方砖的块数。我们注意到一个 $(2n-1)$- 平铺必然至少需要 n 块砖，并且其中至少有一块方砖。如果前 n 块砖中有 k 块方砖和 $n-k$ 块多米诺砖，那么共有 $\binom{n}{k}$ 种平铺方式来填满 1 到 $2n$-k 个单元格，剩下的 $k-1$ 个单元格有 f_{k-1} 种平铺方式（见图 1.8）。

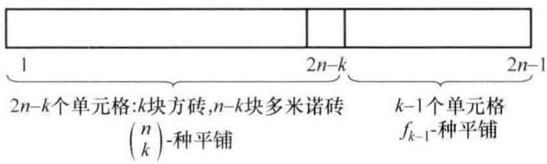


图 1.8　对于 $(2n-1)$- 板共有 $\binom{n}{k} f_{k-1}$ 种平铺方式，其中前 n 块砖中含有 k 块方砖和 $n-k$ 块多米诺砖

在下面的恒等式中，我们利用组合技巧将研究对象对应转化为两个集合，并寻找两个集合之间的对应关系特别地，我们将寻找 n- 平铺集合与集合 $(n-2)$- 平铺和 $(n+2)$- 平铺之间的一对三对应关系。

恒等式 7　若 $n \geqslant 1$，则 $3f_n = f_{n+2} + f_{n-2}$。

集合 1　n- 板平铺的集合，由定义有 f_n 个元素。

集合 2　$(n+2)$- 板或 $(n-2)$- 板平铺，有 $f_{n+2} + f_{n-2}$ 种方式。

对应关系　为了证明这个恒等式，我们要建立集合 1 与集合 2 之间的 1 对 3 的对应关系，即集合 1 中的每一个元素恰好生成集合 2 中的 3 个不同元素，且集合 2 中的元素不重复生成，因此集合 2 的大小是集合 1 的 3 倍。

具体地，对于集合 1 的 n- 平铺，我们有接下来的 3 种平铺方式，其长为