



原命题专家，一线辅导专家  
首次公布真题难度系数，指出常见错误  
详细解读30年真题 试卷与专题完美结

主审 胡金德



杨超

# 考研数学真题超解读

(数学三)

主编 杨超  
副主编 靳阳 姜晓千

北京理工大学出版社  
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

名校真题 名师解读

数学(三)真题超解读

杨超 主编 靳阳 姜晓千 副主编

# 杨超

# 考研数学真题超解读

(数学三)

主 编 杨超 副主编 靳阳 姜晓千

 **北京理工大学出版社**  
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

---

图书在版编目(CIP)数据

杨超考研数学真题超解读. 数学三 / 杨超主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2018. 7

ISBN 978-7-5682-5878-4

I. ①杨… II. ①杨… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 145410 号

---

杨超考研数学真题超解读

杨超 编著 北京理工大学出版社 出版

---

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市宇通印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 20

字 数 / 493 千字

版 次 / 2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷

定 价 / 52.90 元

责任编辑 / 多海鹏

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

---

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

## 一、前言

本书收集了近 30 多年的真题,并将 1987 年到 2007 年的具有代表性的重点题目单独整理出来,以便于同学们在有限的时间内做到真题的精华部分,少走弯路,其中重点把近 10 年的真题做了详细具体的分析,并在以前版本的基础上从不同的角度给出试题的数据分析(特别是对真题的每个题目增加了区分度和难度值的数据),内容更加丰富,解法更加全面,希望广大考生能充分利用好这套资料,最终取得满意的成绩!

## 二、真题特点

考研数学从 1987 年到现在实行的是全国统一考试的形式,考研数学的命题因此也逐步走向成熟,而现在的考研数学有以下几个特点:

### ① 考察全面、注重基础

近几年的考研数学真题考察的均是相关课程的主干知识,而且都是核心概念、理论基础和常用方法(特别是三大计算能力的考察),都是需在课程中重点强调的内容。

### ② 强调重点、注重能力

真题在考察基础知识的内容上,试卷依然坚持能力立意的命题原则,注重科学内容的内在联系和知识的综合运用,对课程的重点内容、核心概念、重点方法进行重点考察。

### ③ 控制难度、有利选拔

从历年的真题来看,考研数学的整体难度趋于平稳,一般不会有特别大的起伏,其中中等和中等难度以下的试题占到了 70% 以上,选择题和填空题大部分都是基础题,解答题中的基本题也几乎占一半,即使在综合性较强的试题中,在设问上也会做处理,为考生作答铺了路(例如中值定理的证明题就是一个典型)。

## 三、试题的评价与指标

### 1. 试题的评价指标

① 试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分比,通常用小写的  $p$  表示,取值范围在 0 与 1 之间. 对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下为难题,难度值在 0.3~0.8 的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题. 试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

② 试题区分度是指题目对不同水平考生加以区分的程度或鉴别能力. 区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用  $D$  表示,一般  $-1 < D < 1$ .

一般试题区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2~0.3 的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小,难度中等的试题区分度通常较大,为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试

题分为六类,如下表所示.

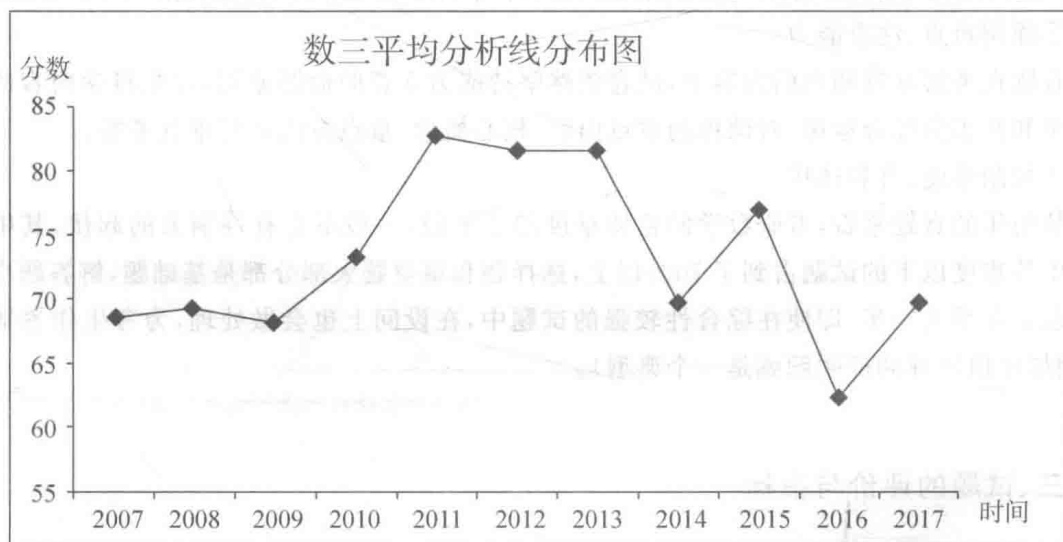
试题的六大类型分类表

类型	特征	$p$	$D$	试题特征
I		(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
II		[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
III		(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
IV		(0,0.3)	(0.3,1)	难度大但区分能力强
V		[0.3,0.8]	(0.3,1)	难度适中且区分能力强
VI		(0,0.3)	(0.3,1)	难度小且区分能力强

在历年真题中,第V类试题是测试效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上);第I类试题属于“题太难谁都不会做”;第III类试题属于“题太易谁都会做”;而第IV类试题往往对区分中、高水平的考生很有效,这类试题往往是考察考生综合应用能力的试题.

## 2. 近十年平均分分布

数三平均分分布											
年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
平均分	68.59	69.63	68.25	73.46	82.84	81.54	81.80	69.77	77.09	62.49	69.90



# 目 录

高等数学部分 .....	( 1 )
第一章 极限 .....	( 1 )
第二章 导数与微分 .....	( 11 )
第三章 一元函数积分学 .....	( 16 )
第四章 中值定理与证明 .....	( 22 )
第五章 多元函数微分学 .....	( 25 )
第六章 二重积分 .....	( 33 )
第七章 微分方程 .....	( 40 )
第八章 无穷级数 .....	( 43 )
第九章 微积分的经济学应用 .....	( 50 )
线性代数部分 .....	( 53 )
第一章 行列式 .....	( 53 )
第二章 矩阵 .....	( 56 )
第三章 向量组 .....	( 65 )
第四章 方程组 .....	( 71 )
第五章 特征值与特征向量 .....	( 77 )
第六章 二次型 .....	( 81 )
专题一 抽象行列式的计算 .....	( 84 )
概率部分 .....	( 86 )
第一章 随机事件与概率 .....	( 86 )
第二章 一维随机变量及其分布 .....	( 88 )

第三章 多维随机变量及其分布 .....	(91)
第四章 随机变量的数字特征 .....	(97)
第五章 大数定律与中心极限定理 .....	(98)
第六章 统计量的数字特征 .....	(99)
第七章 点估计 .....	(102)
2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(107)
2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(114)
2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(125)
2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(132)
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(145)
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(151)
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(165)
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(173)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(187)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(193)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(209)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(217)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(231)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(238)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(253)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(259)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(275)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(282)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三) .....	(297)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案 .....	(304)

# 高等数学部分

## 第一章 极限

### 一、极限的定义与性质

(1988) 判断:若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  都存在,则极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  必存在.

解:错误.

举例说明,令  $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ ,

故错误.

(1991) 设数列通项为  $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n$  是 ( )

(A) 无穷大量

(B) 无穷小量

(C) 有界变量

(D) 无界变量

解:选(D).

分析:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)^2 + \sqrt{2k+1}}{2k+1} = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} = 0$ , 故当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n$  既不是无穷大量,也不是无穷小量,而是无界变量.

(2000) 设对于任意的  $x$ , 总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  ( )

(A) 存在且等于零

(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在

(D) 不一定存在

解:选(D).

分析:举例说明,令  $\varphi(x) = f(x) = g(x) = x + \frac{1}{x}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在.

### 二、无穷小的阶

(1989) 设  $f(x) = 2^x + 3^x - 2$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时 ( )

(A)  $f(x)$  是  $x$  的等价无穷小

(B)  $f(x)$  与  $x$  是同阶但非等价无穷小

(C)  $f(x)$  是比  $x$  更高阶的无穷小

(D)  $f(x)$  是比  $x$  低阶的无穷小

解:选(B).

分析:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} \right) = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6.$

(1992) 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列四个无穷小量中, 阶数最高的无穷小是 ( )

(A)  $x^2$  (B)  $1 - \cos x$

(C)  $\sqrt{1-x^2} - 1$  (D)  $x - \sin x$

解: 选(D).

分析: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\sqrt{1-x^2} - 1 = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ ,  $x - \sin x \sim$

$\frac{1}{6}x^3$ , 故选(D).

(1997) 设函数  $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$ ,  $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的 ( )

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但不等价的无穷小

解: 选(B).

分析:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt}{\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt}{x^5} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-\cos x)^2 \cdot \sin x}{5x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)^2 \cdot x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^5}{x^4} = 0.$$

(2000) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$  为 ( )

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D)  $\infty$

解: 选(C).

分析: 由极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ , 可得

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin 6x + xf(x) = o(x^3)$ ,  $xf(x) = -\sin 6x + o(x^3)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + o(x^3)}{x^3} = 36.$$

(2007) 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小是 ( )

(A)  $1 - e^{\sqrt{x}}$  (B)  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C)  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$  (D)  $1 - \cos \sqrt{x}$

解: 选(B).

分析: 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$ ,  $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$ , 因

$$\ln(1+x) \sim x, -\ln(1-\sqrt{x}) \sim \sqrt{x},$$

低阶加高阶等价低阶,故

$$\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}.$$

### 三、极限计算

#### 1. “ $\frac{0}{0}$ ”型未定型极限

(1987) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$ .

解:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = 1.$

(1988) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$ .

解:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x \ln x} = 1.$

(1992) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}$ .

解:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1 + \cos(x-1) - 1]}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1) - 1}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

(2004) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解: 填 1, -4.

分析: 分子部分  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x (\cos x - b) = 0$ , 由无穷小的性质可知,  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$ ,  $a = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - b) = 5,$$

故  $b = -4$ .

(2008) 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$ .

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\sin x - x}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

2. “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限的计算

(1993)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

 解: 填  $\frac{6}{5}$ .

分析:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \cdot \frac{2}{x} = \frac{6}{5}$ .

(2007)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解: 填 0.

分析:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{2^x \ln 2 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 2}{2^x (\ln 2)^2 + 6x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{2^x (\ln 2)^3 + 6} = 0$ ,

$\sin x + \cos x$  为有界量, 故原极限 = 0.

 3. “ $1^\infty$ ”型极限的计算

(1987) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$ .

 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = e^A = e^1$ , 其中  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} xe^x = 1$ , 故原极限 = e.

(1989) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ .

解:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^A$ ,

其中  $A = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \cdot \sin \frac{1}{x} + x \cdot \left( \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \cdot \frac{1}{x} - x \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} \right)^2 \right] = 1$ ,

故原极限 = e.

(1991) 下列各式中正确的是

( )

(A)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1$       (B)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

(C)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x = -e$       (D)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} = e$

解: 选(A).

选项(A),  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

故原极限 = 1;

选项(C),  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{-1}$ ;

选项(D),  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{-1}$ .

(1991) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ , 其中  $n$  是给定的自然数.

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = e^A$ , 其中

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{x} \\ &= \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + e^{2x} - 1 + \cdots + e^{nx} - 1}{x} \\ &= \frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

故原极限 =  $e^{\frac{n+1}{2}}$ .

#### 4. “0 · ∞”型极限的计算

(1988) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \frac{\pi}{2} x$ .

解:  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\cos \frac{\pi}{2} x} \sin \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x} = \frac{4}{\pi}$ .

(2005) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解: 填 2.

分析: 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\sin \frac{2x}{x^2 + 1} \sim \frac{2x}{x^2 + 1}$ , 故原极限 =  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = 2$ .

#### 5. “∞ - ∞”型极限的计算

(1994) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$ .

解: 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则原极限 =  $\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t)\right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ .

(2004) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$ .

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x \cos 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 4x}{12x^2} = \frac{4}{3}.$$

(2005) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2 - (1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x-e^{-x}}{2x} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

## 6. “ $\infty^0$ ”型极限的计算

(1989) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x+e^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+e^x} \cdot (1+e^x)} = e.$$

(1991) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{1+x^2})} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = 1.$$

## 7. 含有变限积分的极限

(1990) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt$ .

$$\text{解: } \int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt = e^{-x^2} \int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt, \text{ 故}$$

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

(1992) 设  $F(x) = \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ , 其中  $f(x)$  为连续函数, 则  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  等于 ( )

(A)  $a^2$  (B)  $a^2 f(a)$  (C) 0 (D) 不存在

解: 选(B).

$$\text{分析: } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t) dt = a^2 \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = a^2 f(a).$$

(1994) 设函数  $f(x)$  可导, 且  $f(0) = 0$ ,  $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$ .

$$\text{解: 令 } u = x^n - t^n, F(x) = \frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du}{x^{2n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) x^{n-1}}{2nx^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n)}{x^n} = \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) - f(0)}{x^n - 0} \\ &= \frac{1}{2n} f'(0). \end{aligned}$$

(2002) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[ \int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1-\cos x)}$ .

$$\begin{aligned} \text{解:原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[ \int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t) dt}{\frac{3}{2}x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x^2) \cdot 2x}{3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

#### 四、数列极限的计算

##### 1. 由函数极限求数列极限

(1990) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$  \_\_\_\_\_.

解:填 2.

$$\begin{aligned} \text{分析:} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

(1993)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] =$  \_\_\_\_\_.

解:填  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{分析:} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+n} + \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

(2002) 设常数  $a \neq \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n =$  \_\_\_\_\_.

解:填  $\frac{1}{1-2a}$ .

$$\text{分析:} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^{n(1-2a) \cdot \frac{1}{1-2a}} = \ln e^{\frac{1}{1-2a}} = \frac{1}{1-2a}.$$

$$(2006) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解: 填 1.

分析: 需要分子列讨论.

$$\text{当 } n = 2k (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ 时, } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2k} \right)^1 = 1,$$

$$\text{当 } n = 2k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ 时, } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2k+1} \right)^{-1} = 1,$$

故原极限 = 1.

注: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = A$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

## 2. 单调有界准则

(1996) 设  $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} (n = 1, 2, \dots)$ , 证明数列  $\{x_n\}$  极限存在, 并求此极限.

解:  $x_2 = \sqrt{6+x_1} = 4, x_1 > x_2$ , 假设  $x_k > x_{k+1} (k \geq 1)$ , 则

$$\sqrt{6+x_k} > \sqrt{6+x_{k+1}},$$

即  $x_{k+1} > x_{k+2}$ , 故由数学归纳法, 数列  $\{x_n\}$  为单调递减数列, 又  $x_n > 0$ , 故数列  $\{x_n\}$  单调递减有下界, 可知  $\{x_n\}$  极限存在.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则由  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ , 得

$$a = \sqrt{6+a},$$

解得  $a = -2, 3$ .

又因为  $x_n > 0$ , 故可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

## 五、函数的连续与间断

(1987) 下列函数在定义域内连续的是

( )

$$(A) f(x) = \ln x + \sin x \qquad (B) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(C) f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases} \qquad (D) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

解: 选(A).

(1990) 设  $f(x)$  有连续的导数,  $f(0) = 0$ , 且  $f'(0) = b$ , 若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

在  $x = 0$  处连续, 则常数  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解: 填  $a + b$ .

分析:  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + a \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + a \cos x}{1} = a + b$ , 故  $A = a + b$ .

(1998) 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 讨论函数  $f(x)$  的间断点, 其结论为 ( )

- (A) 不存在间断点 (B) 存在间断点  $x = 1$   
 (C) 存在间断点  $x = 0$  (D) 存在间断点  $x = -1$

解: 选(B).

分析: 当  $n \rightarrow \infty$  时, 讨论  $x$  的取值范围, 当  $|x| > 1$  时,  $x^{2n} \rightarrow \infty$ ,  $f(x) = 0$ , 当  $|x| < 1$  时,  $x^{2n} \rightarrow 0$ ,  $f(x) = 1+x$ , 当  $x = -1$  时,  $f(-1) = 0$ , 当  $x = 1$  时,  $f(1) = 1$ , 故

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1+x, & |x| < 1 \\ 0, & x = -1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

可知函数  $f(x)$  有间断点  $x = 1$ .

(2003) 设  $f(x)$  为不恒为零的奇函数, 且  $f'(0)$  存在, 则函数  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  ( )

- (A) 在  $x = 0$  处左极限不存在 (B) 有跳跃间断点  $x = 0$   
 (C) 在  $x = 0$  处右极限不存在 (D) 有可去间断点  $x = 0$

解: 选(D).

分析:  $g(x)$  在  $x = 0$  处无定义,  $f(0) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0),$$

故选(D).

(2004) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ ,  $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ,

则 ( )

- (A)  $x = 0$  必是  $g(x)$  的第一类间断点  
 (B)  $x = 0$  必是  $g(x)$  的第二类间断点  
 (C)  $x = 0$  是  $g(x)$  的连续点  
 (D)  $g(x)$  在  $x = 0$  处的连续性与  $a$  的取值有关

解: 选(D).

分析:  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$ .

(2008) 设函数  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上连续, 则  $x = 0$  是函数  $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$  的 ( )

- (A) 跳跃间断点 (B) 可去间断点  
 (C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

解: 选(B).

分析:  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = f(0)$ , 故  $x = 0$  为  $g(x)$  的可去间断点.

(2008) 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则  $c =$  \_\_\_\_\_.

解: 填 1.

分析: 函数  $f(x)$  在  $x = \pm c$  处连续,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c),$$

即  $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow c^-} (x^2 + 1) = c^2 + 1,$

$$\lim_{x \rightarrow -c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -c^-} f(x) = f(-c),$$

即  $\lim_{x \rightarrow -c^+} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -c^-} \frac{2}{|x|} = c^2 + 1,$

解得  $c = 1$ .