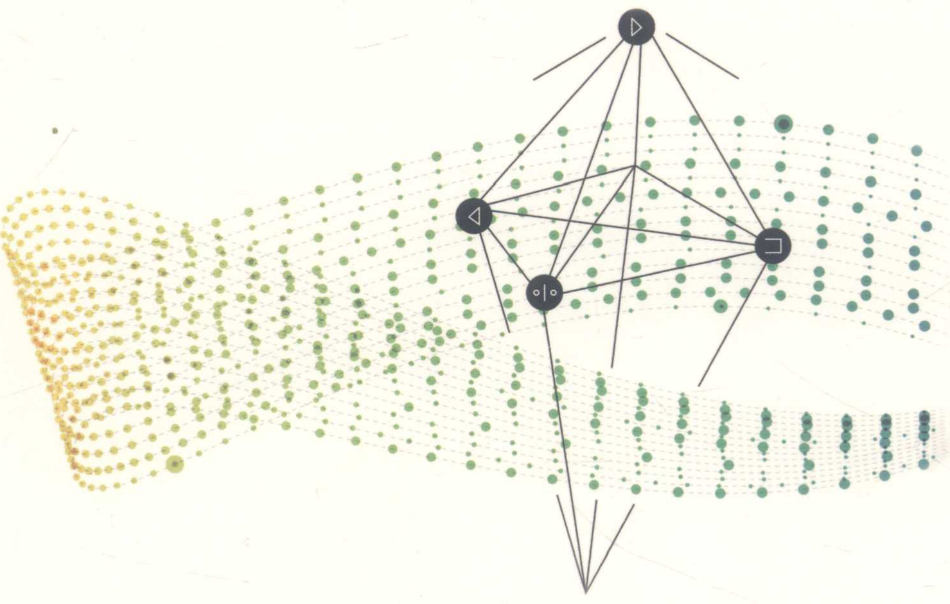
New Star

新星数学竞赛丛书

数学竞赛问题与感悟

第一卷：征解题集

牟晓生 主编



华东师范大学出版社

New Star

新星数学竞赛丛书

数学竞赛问题与感悟

第一卷：征解题集

主　编　牟晓生

编　委　冷岗松　施柯杰

罗振华　吴尉迟

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛问题与感悟. 第一卷,征解题集/牟晓生主编. —上海:华东师范大学出版社,2019
(新星数学竞赛丛书)
ISBN 978-7-5675-8859-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①牟… Ⅲ.①数学—竞赛题—题解 Ⅳ.①O1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第061758号

数学竞赛问题与感悟(第一卷:征解题集)

主　　编　牟晓生
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　唐　婧
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　江苏扬中印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　14.5
字　　数　288千字
版　　次　2019年4月第1版
印　　次　2019年4月第1次
书　　号　ISBN 978-7-5675-8859-2/G·11867
定　　价　45.00元

出 版 人　王　焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

序 言

数学新星网创办于 2014 年元月. 创办的宗旨是为参加国内外高层次的数学竞赛学生和他们的老师提供一个网上交流平台. 五年多来,它坚持严格的择文标准,宁缺毋滥,因此成长为一个高质量的中学数学竞赛网. 现在,它既是反映中学生数学创新能力的一个窗口,又引导师生在数学竞赛活动中进行“研究型学习”.

五年多来,数学新星网共发表各类文章 180 余篇,新星征解问题 30 期(共计 120 个问题).

数学新星网中最有特色的专栏是数学新星问题征解,供题者有在读的中学生、教练员及年轻的数学家(他们不少是当年的数学竞赛选手,有些甚至是当年的国家队队员). 从第十三期开始,新星征解栏由牟晓生(2008 年 IMO 满分金牌获得者,哈佛大学博士)主持,题目的新颖度和难度更是有了大的提升,获得了广泛赞誉.

数学新星网中另一个亮丽的专栏是学生作品专栏. 学生投稿踊跃,其中不少文章具有新的观点、新的视野及新的方法,反映出中学生极强的创新能力. 不少学生作品被一些专家和学者关注、讨论、精心修改. 在这里,我们要特别感谢那些幕后的专家和学者的无私奉献. 也正是因为这样,学生们的研究兴趣被大大激发,研究能力也得到相应的提升. 现在,学生们以能在新星网学生专栏中发表文章为荣. 我们也会为收到一篇优秀的学生作品而兴奋不已.

数学新星网的所有文章将分别在两个出版社正式出版. 其中有 27 篇学生作品将发表在由熊斌教授主编的《数学竞赛与初等数学研究》一书中,由高等教育出版社出版. 其他的大多数文章和新星征解题都将收录新星系列丛书《数学竞赛问题与感悟》,分三卷在华东师大出版社出版. 第一卷书名为《征解题集》,主编:牟晓生;第二卷书名为《研究文集》,主编:冷岗松;第三卷书名为《真题集锦》,主编:羊明亮.

在新星系列丛书出版之时,我们特别感谢中国数学奥林匹克的创始人之一裘宗沪先生,他一直关注数学新星网的创建和发展,多次献计献策,使我们备受鼓舞. 我们还要特别感谢华东师范大学的熊斌教授,他一直特别关心新星网的建设,给予很多鼓励,在新星网文的出版过程中更是鼎力支持.

我们还要感谢余红兵、李伟固、吴建平、冯志刚、朱华伟、瞿振华、艾颖华、何忆捷、张思汇、付云皓、王彬、冯跃峰、萧振纲、边红平、张瑞祥、聂子佩、邹瑾、张端阳、李先颖等老师多年来对新星网的支持和厚爱. 我们还要感谢华东师大出版社教辅分社倪明社长和孔令志副社长,他们的辛勤劳动和支持使得这套系列丛书能够顺利出版. 我们也要感谢仁慧书院的张慧伦先生为新星网的宣传和传播所做的贡献.

最后我们还要感谢新星网的一些编辑人员:施柯杰、杜昌敏、王广廷、席东盟、李晋、罗振华、吴尉迟、孙孟越、叶思及一些其他工作人员.

永无踌躇和休止,不断追求和创新. 祝愿新星网越办越好!

冷岗松

2019 年 4 月

目 录

一、数学新星征解问题

003 第一期问题
004 第二期问题
005 第三期问题
006 第四期问题
007 第五期问题
008 第六期问题
009 第七期问题
010 第八期问题
011 第九期问题
012 第十期问题
013 第十一期问题
014 第十二期问题
015 第十三期问题
016 第十四期问题
017 第十五期问题

018 第十六期问题
019 第十七期问题
020 第十八期问题
021 第十九期问题
022 第二十期问题
023 第二十一期问题
024 第二十二期问题
025 第二十三期问题
026 第二十四期问题
027 第二十五期问题
028 第二十六期问题
029 第二十七期问题
030 第二十八期问题
031 第二十九期问题
032 第三十期问题

二、数学新星征解问题解答与评析
035 第一期问题解答与评析
042 第二期问题解答与评析
051 第三期问题解答与评析
059 第四期问题解答与评析
069 第五期问题解答与评析
074 第六期问题解答与评析
082 第七期问题解答与评析
090 第八期问题解答与评析
097 第九期问题解答与评析
105 第十期问题解答与评析
113 第十一期问题解答与评析
120 第十二期问题解答与评析

127 第十三期问题解答与评析
135 第十四期问题解答与评析
143 第十五期问题解答与评析
149 第十六期问题解答与评析
153 第十七期问题解答与评析
157 第十八期问题解答与评析
162 第十九期问题解答与评析
168 第二十期问题解答与评析
171 第二十一期问题解答与评析
180 第二十二期问题解答与评析
186 第二十三期问题解答与评析
192 第二十四期问题解答与评析
197 第二十五期问题解答与评析
201 第二十六期问题解答与评析
205 第二十七期问题解答与评析
210 第二十八期问题解答与评析
216 第二十九期问题解答与评析
220 第三十期问题解答与评析

1

一、数学新星征解问题

第一期问题

2014年4月

第一题 设a、b、n是正整数，a，$b\leqslant n$. 证明：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_k^a\mathrm{C}_k^b\leqslant\frac{1}{a+b+1}\mathrm{C}_n^a\mathrm{C}_n^b.$$

注：当$m<k$时，规定$\mathrm{C}_m^k=0$.

（上海大学　冷岗松　供题）

第二题 设G是一个简单图，$\overline{G}$是G的补图. 已知G和$\overline{G}$都是连通的，求G和$\overline{G}$的直径之和的最大值.

注：图G的直径是G中任何两点距离的最大者.

（上海大学　冷岗松　供题）

第三题 设v_1，v_2，…，v_n是平面上的n个单位向量，n是奇数. 证明：存在$\varepsilon_i\in\{-1,1\}$，$i=1,2,\cdots,n$使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i\right|\leqslant 1.$$

（上海大学　席东盟　供题）

第四题 对给定的正整数$n\geqslant 8$，证明：存在正整数的集合A使得$|A|=n$且

$$|A-A|<|A+A|.$$

其中$|A-A|=\{a-b\mid a\in A,b\in A\}$，$|A+A|=\{a+b\mid a\in A,b\in A\}$.

（上海大学　冷岗松　供题）

第二期问题

2014年5月

第一题 证明：每个凸n边形中总存在三个相继顶点A、B、C使得$\triangle ABC$的外接圆能覆盖这个凸n边形.

（经典问题）

第二题 对于正整数k，设$\alpha(k)$表示k的最大奇因子，记$T(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha(k)}{k}$. 证明：

$$\frac{2n^2+1}{3n}\leqslant T(n)\leqslant\frac{2n(n+3)}{3(n+1)}.$$

（上海大学　杜昌敏　供题）

第三题 已知$n\in\mathbf{N}_+$，集合$A_n=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$. 对给定的$k$，若存在$A_n$的全体子集的一个排列$P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{2^n}$满足$|P_i\Delta P_{i+1}|=k$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n$，则称$A_n$的子集可$k$-循环排列，其中$P_{2^n+1}=P_1$，$A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$. 求所有的正整数$k$，使得$A_n$的子集可$k$-循环排列.

（湖北武钢三中学生　陈泽坤　供题）

第四题 设$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$是实数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-a_{k-1})^2\leqslant 2\left(1+\cos\frac{\pi}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}a_k^2,$$

其中$a_0=a_{n+1}=0$.

（上海大学　施柯杰　供题）

第三期问题

2014 年 6 月

第一题 设 v_1, v_2, …, v_n 是 $\mathbf{R}^m$ 中的 n 个单位向量.证明:存在 ε_1, ε_2, …, $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i\right| \geqslant \sqrt{n}.$$

注:对于任意的 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)\in \mathbf{R}^m$,定义 $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}$.

(华东师范大学 瞿振华 供题)

第二题 设 k 是一个给定的正整数,$X=\{x\in \mathbf{N}_+ \mid x\leqslant 6k,\ x\equiv 1, 2, 3 \pmod 6\}$.求满足下列条件的正整数对$(p, q)$的个数:

(1) $p<q$ 且$(p, q)=1$;

(2) 存在 X 的一个分划 $X=A\cup B(A\cap B=\varnothing)$ 使得

$$p\cdot\left(\sum_{a\in A}a\right)=q\cdot\left(\sum_{b\in B}b\right).$$

(深圳高级中学 冯跃峰 供题)

第三题 给定正整数 m、n、r,其中 $1<m<n$.在 $m\times n$ 方格表中选出若干个方格,使得每行每列选出的方格数不超过 r.试求 a 的最小值,使得总可以用 a 种颜色对选出的方格进行染色,且每行每列都不存在 3 个同色的方格.

(上海中学学生 陆一平 供题)

第四题 设正整数 $n>1$, z_1, z_2, …, z_n 是复数,证明:

$$\sum_{k=1}^{n}|1+z_k|+\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|1+z_iz_j|\geqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

(上海大学 冷岗松 供题)

第四期问题

2014年9月

第一题 设 $k \geqslant 2$ 是一个整数,a、b 是实数.证明:当且仅当 $a-b$ 是整数且 $k \mid a-b$ 时,对任意的正整数 n 有

$$\lfloor an \rfloor \equiv \lfloor bn \rfloor \pmod{k}.$$

(郑州外国语学校学生 朱书聪 供题)

第二题 设 Ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆,I 为内心.BI 交 AC 于 B_1,CI 交 AB 于 C_1,B_1C_1 的延长线交 Ω 于 K.BI 的中点为 B_2,CI 的中点为 C_2,B_2C_2 的延长线交 Ω 于 M.证明:K、I、M 三点共线.

(上海中学学生 高继扬,华东师范大学第二附属中学学生 俞辰捷 供题)

第三题 设 n 是一个正整数,证明:存在无穷整数数列

$$\cdots,\ t_{-1},\ t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n,\ \cdots$$

使得其中只有 2^n-n 项不为 0,且对任意连续 $n+2$ 项 t_i,t_{i+1},t_{i+2},$\cdots$,$t_{i+n+1}(i \in \mathbf{Z})$ 存在一个次数不超过 n 的多项式 $f(x)$ 使得对 $j=i$,$i+1$,$\cdots$,$i+n+1$ 有

$$|f(j)-t_j| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

(上海中学学生 陆一平 供题)

第四题 设 p 是一个素数,$4 \mid p-1$,a 是一个正整数使得 $a<\frac{p}{2}$,$p \mid a^2+1$.定义数列如下:$x_0=p$,$x_1=a$,对 $n \geqslant 2$,

$$x_n=\min\{m \geqslant 0 \mid m \equiv x_{n-2} \pmod{x_{n-1}}\}.$$

证明:存在正整数 k 使得 $p=x_k^2+x_{k+1}^2$.

(湖北武钢三中学生 黄一山 供题)

第五期问题

2014年10月

第一题 Q同学参加某次考试，考试共由$4a+1$道题组成，每题有4个选项，只有一个是对的，且概率都为$\frac{1}{4}$. 每题选对得4分，选错不得分，不选得1分. 已知金牌分数线为$4b+1$分，其中a、b为正整数且满足$4(4a+1) \geqslant 4b+1$，$b \geqslant \frac{4}{3}a$. 若Q同学所有题都不会做，问他将多少个题选出答案可使获金牌的概率最大？

（东北师范大学附属中学学生　浦鸿铭　供题）

第二题 证明：对任意素数p，存在无穷多个正整数对(m, n)使得$[n\sqrt{p}]=\frac{3m^2-m}{2}$.

（济南市历城第二中学学生　齐仁睿　供题）

第三题 称一个矩形为"格矩形"当且仅当该矩形两边平行于坐标轴且四顶点均为格点. 给定无穷多个不同的格矩形，证明：可以从中选出无穷多个，使得它们或者两两有覆盖关系，或者两两不交.

（济南市历城第二中学学生　齐仁睿　供题）

第四题 对于$\{1, 2, \cdots, n\}$的一个排列σ，记$f(\sigma)$为每次交换σ的两个数，将σ变为$\sigma_0=\{1, 2, \cdots, n\}$的最少步数，这里$f(\sigma_0)=0$，$f(\sigma) \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. 记$T(i)=\{\sigma \mid f(\sigma)=i\}$，$i=0, 1, 2, \cdots, n-1$. 求$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \mid T(i) \mid$.

（深圳中学学生　周韫坤　供题）

第六期问题

2015年1月

第一题 设 a、b 是正整数且 $a<b$. 证明：存在正整数 n 及整数 x_1，x_2，…，x_n 满足 $1\leqslant |x_1|<|x_2|<\cdots<|x_n|<b^2$ 使得

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}.$$

（湖北武钢三中学生 陈泽坤 供题）

第二题 在空间直角坐标系中，以原点为起点作三条两两垂直的单位向量，从这三个向量的三个终点向 XOY 平面作射影 A、B、C. 证明：A、B、C 的横坐标的平方和为 1.

（湖南雅礼中学学生 何通木 供题）

第三题 设四边形 $ABCD$ 是圆外切四边形，O_A、O_B、O_C、O_D 分别是 $\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$、$\triangle ABC$ 的外心. 证明：$O_AO_BO_CO_D$ 也是圆外切四边形.

（中国人民大学附属中学 张端阳 供题）

第四题 已知 n 阶完全图可拆分为 n 个两两无公共边的完全图 G_1，…，G_n 的并，其中 G_1，…，G_n 均至少有两个顶点. 设 G_1，…，G_n 的顶点集和边集分别为 V_1，…，V_n 及 E_1，…，E_n. 证明：要么 $\{|V_1|,\cdots,|V_n|\}=\{\underbrace{2,\cdots,2}_{n-1\text{个}2},n-1\}$，要么 $|V_1|=\cdots=|V_n|=a$ 且 $n=a^2-a+1$.

（深圳市第三高级中学学生 吴东晓 供题）

第七期问题

2015 年 4 月

第一题 圆内接四边形 $ABCD$ 中存在一点 P，使得 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCD=\angle PDA$，证明：$AB\cdot CD=BC\cdot DA$.

（郑州外国语学校学生 朱书聪 供题）

第二题 设正实数 x、y、z、w 满足 $\max\{x, y, z, w\}\leqslant\sqrt{5}\min\{x, y, z, w\}$. 证明：

$$\frac{xy}{5x^2-y^2}+\frac{yz}{5y^2-z^2}+\frac{zw}{5z^2-w^2}+\frac{wx}{5w^2-x^2}\geqslant 1.$$

（浙江省富阳中学学生 黄昊中 供题）

第三题 在一个连通二部图中，点 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 与点 B_1, B_2, $\cdots$, B_m 相连. 设点 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的度数分别为 a_1, a_2, $\cdots$, a_n，点 B_1, B_2, $\cdots$, B_m 的度数分别为 b_1, b_2, $\cdots$, b_m，且每个点都放有一定数量的糖果. 每次操作，若某点的糖果数大于等于其度数，则将该点的糖果分给与它相邻的点各一个. 证明：若糖果总数为 $(a_1+a_2+\cdots+a_n-1)$ 个，则不论初始状态如何，只能进行有限次操作.

（辽宁省实验中学学生 苏海舰 供题）

第四题 设 π_1, π_2, $\cdots$, $\pi_{n!}$ 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全体排列，并且 $\pi_1=(1, 2, \cdots, n)$，$\pi_{n!}=(n, n-1, \cdots, 1)$. 对于图 $G(V, E)$：$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_{n!}\}$，$v_i$ 和 v_j 相邻当且仅当 π_i、π_j 两个排列仅有两位不同. 试问：至少删去多少个 G 的顶点，才能使得 v_1、$v_{n!}$ 在图 G 中不连通.

（上海中学学生 陆一平，湖北武钢三中学生 陈泽坤 供题）

第八期问题

2015年6月

第一题 设正整数 $n>1$，记 $A_n=\{k\in\mathbf{N}_+ \mid (k,\ n)=1,\ k<n\}$. 问是否存在满射 $f: A_n\times A_n\to A_n$ 使得对任意 $a,\ b,\ c\in A_n$，只要 $c\equiv ab\pmod n$ 就有

$$f(a,\ k)\cdot f(b,\ k)\equiv f(c,\ k)\pmod n,$$
$$f(k,\ a)\cdot f(k,\ b)\equiv f(k,\ c)\pmod n,$$

对任意的 $k\in A_n$ 成立.

（湖北武钢三中学生　陈泽坤　供题）

第二题 设 $n(n\geqslant 2)$ 是正整数. 用 1×2 的方格覆盖 $n\times n$ 方格表，要求任意两个 1×2 方格不重叠. 设放了 k 个 1×2 方格后，无法再放入一个这样的方格. 证明：$k\geqslant\left\lfloor\frac{n^2}{3}\right\rfloor$. 进一步，当 $n=3m(m\in\mathbf{N}_+)$ 时，求 k 的最小值.

（辽宁省实验中学学生　毕梦达　供题）

第三题 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，D、E、F 为内切圆在三边上的切点，EF 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 X、Y（X 在 $\overset{\frown}{AB}$ 内）. 证明：

$$\angle IXD-\frac{1}{2}\angle B=\angle IYD-\frac{1}{2}\angle C.$$

（湖南雅礼中学学生　谢昌志　供题）

第四题 设 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 是 $n(n\geqslant 3)$ 个正实数，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=n$. 证明：若 $k>t>1$，则

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k-n}{k-1}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^t-n}{t-1}.$$

（上海中学学生　李嘉昊　供题）