高等数学

（理工类）

GAODENG SHUXUE

主　编：郭连英　于　烊

副主编：文冀中　平　仙　侯英涛

主　审：张志良

外语教学与研究出版社

高等数学

（理工类）

主　　编：郭连英　于　烊
副主编：文冀中　平　仙　侯英涛
主　　审：张志良

外语教学与研究出版社
北　京

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学：理工类 / 郭连英，于烊主编. — 北京：外语教学与研究出版社，2014.6
ISBN 978-7-5135-4768-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①郭… ②于… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 131990 号

出 版 人　蔡剑峰
项目策划　王海龙
责任编辑　牛贵华
封面设计　王雪莲
出版发行　外语教学与研究出版社
社　　址　北京市西三环北路 19 号（100089）
网　　址　http://www.fltrp.com
印　　刷　北京铭传印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　19.5
版　　次　2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5135-4768-0
定　　价　36.00 元

购书咨询：（010）88819929　电子邮箱：club@fltrp.com
外研书店：http://www.fltrpstore.com
凡印刷、装订质量问题，请联系我社印制部
联系电话：（010）61207896　电子邮箱：zhijian@fltrp.com

物料号：247680001

前　　言

高职高专教育作为高等教育的重要组成部分，以培养生产、建设、服务、管理第一线的高端技能型专门人才为主要任务，在推动经济的发展和社会的进步方面发挥着重要作用.

高等数学不仅是高职高专院校的一门重要的基础课和工具课，更是一门解决实际问题和广泛应用的基础学科，它对培养、提高学生的思维能力发挥着特有的作用. 高等数学的基础理论广泛应用于各个学科及各个领域，由此推动了数学的发展.

为了适应社会发展形势，本书从高职高专人才培养目标出发，充分体现高职高专院校“以应用为目的，以必需、够用为度”的教学基本原则，力求体现基础课为专业课服务的宗旨，依照教育部颁布的《高职高专教育数学课程教学基本要求》，结合编者多年来积累的高职高专数学课程教学改革经验编写而成.

本书主要内容包括一元微积分、微分方程、拉普拉斯变换、线性代数、向量代数与空间解析几何、多元微积分、级数七个模块，共十章内容，基本涵盖了高职高专院校专业课学习所需要的数学理论知识. 教师可以根据专业需求选学部分章节，学生也可以根据自己的爱好进行有选择的自学. 本书着眼于基本概念、基本理论和基本方法，强调直观性和应用背景，注重可读性，方便自学.

为了更好地体现本课程与专业课间的内在联系，使本课程内容和专业课结合得更紧密、更贴切，在教材编写过程中，编者有意识地从专业课挖掘素材引入教材，实现公共基础课与专业课的紧密衔接，注重对学生逻辑思维能力、分析问题解决问题能力的培养.

为了便于学生学习，书后增加了复数、初等数学中的常用公式、数学建模知识初步和数学家生平简介、习题参考答案五个附录内容.

本书具有以下特点：

(1)结合高职高专学生的特点，较好地处理了高等数学与初等数学的衔接关系，在内容处理上兼顾了对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题及解决问题能力的培养.

(2)注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，突出强调数学概念与实际问题的联系，加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学的原理和方法消化吸收工程概念、工程原理及专业知识的能力.

(3)恰当地把握了教学内容的深度和广度，不过分追求理论上的严密性，注重应用性，注意适度保持数学自身的系统性与逻辑性.

(4)注意对有关概念及结果实际情况的解释，力求表述准确、思路清晰、通俗易懂，并注重数学思想与方法的阐述，注意培养学生的综合素质，体现了数学课程改革的新思路——数学教学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能，立足于综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学知识解决实际问题的能力.

(5)书后附录有助于解决学生学习过程中可能出现的初等数学公式遗忘问题.

参加本书编写的有保定电力职业技术学院的郭连英、于烊、文冀中、平仙、侯英涛，郭连英对全书稿件进行了统稿，全书由张志良主审.

鉴于我们的研究能力和学术水平有限，书中难免有疏漏之处，恳切广大读者给予批评指正.

编　者

2014 年 7 月

目　录

第一模块　一元微积分

第二模块　微分方程

第 5 章　微分方程

第三模块　拉普拉斯变换

第 6 章　拉普拉斯变换

第四模块　线性代数

第 7 章　行列式、矩阵、线性方程组

第五模块　向量代数与空间解析几何

第 8 章　向量代数与空间解析几何

第六模块　多元微积分

第 9 章　多元微积分

第七模块　级　数

第 10 章　级　数

第一模块　一元微积分

知识结构：

■ 极限与连续
■ 导数与微分
■ 导数的应用
■ 不定积分
■ 定积分

第 1 章　极限与连续

极限是高等数学的一个重要概念，极限理论是微积分的根基；连续性是函数的一种属性．本章将在介绍极限理论的基础上，讨论函数的连续性．

第一节　函数

【本节重点内容】

邻域的概念；复合函数的合成与分解；基本初等函数中各函数的定义表达式及图像特征．

一、集合

集合是现代数学的一个最基本的概念，数学的各个分支普遍运用集合的表示方法和符号．在中学阶段已经学习过集合的知识，现在把其中部分内容进行回顾．

1. 集合的概念

定义 1　具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**．如某学校图书馆的藏书，所有的自然数，方程 $x^2-4x+3=0$ 的实数解等，都分别构成一个集合．集合通常用大写字母 A，B，C，…表示．

组成某一集合的对象称为该集合的**元素**．元素通常用小写字母 a，b，c，…表示．集合中的元素具有确定性、互异性和无序性．

若 a 是集合 A 的元素，记作“$a\in \mathbf{A}$”，读作“a 属于 A”；否则记作“$a\notin \mathbf{A}$”（或 $a\overline{\in}\mathbf{A}$），读作“$a$ 不属于 A”.

特别的，如集合中不含任何元素，这种集合称为**空集**，用 Φ 表示．

2. 集合的表示法

集合通常用列举法和描述法来表示．

(1)列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号{　}内，其中各元素间用逗号隔开，每个元素只写一次(不分次序)．如小于 10 的正偶数构成的集合表示为 $A=\{2,4,6,8\}$；满足不等式 $|x+1|\leqslant 2$ 的所有整数构成的集合表示为 $B=\{-3,-2,-1,0,1\}$.

(2)描述法：把集合中的元素所具有的共同属性描述出来，写在大括号{　}内．如不等式 y 的所有实数解构成的集合表示为 $B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$.

元素都是数的集合称为数集．常见的数集有自然数集 **N**，整数集 **Z**，有理数集 **Q**，实数集 **R**，正整数集 $\mathbf{N}^*$．

二、区间

区间是高等数学中常用的一种符号，分为有限区间和无限区间，具体定义如下．

设 a，b 为任意实数，且 $a<b$.

1. 有限区间

开区间：$(a, b)=\{x \mid a<x<b, x\in\mathbf{R}\}$.

闭区间：$[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$.

半开区间：$[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b, x\in\mathbf{R}\}$；$(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$.

a，b 称为区间的端点，$b-a$ 称为区间的长度．

2. 无限区间

$(a, +\infty)=\{x \mid x>a, x\in\mathbf{R}\}$；　　$[a, +\infty)=\{x \mid x\geqslant a, x\in\mathbf{R}\}$；

$(-\infty, b)=\{x \mid x<b, x\in\mathbf{R}\}$；　　$(-\infty, b]=\{x \mid x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$；

$(-\infty, +\infty)=\{x \mid x\in\mathbf{R}\}$.

三、邻域

设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**，记作 $U(x_0, \delta)$，即

$$U(x_0, \delta)=(x_0-\delta, x_0+\delta),$$

其中 x_0 称为**邻域中心**，δ 称为**邻域半径**．

从数轴上看，$U(x_0, \delta)$ 表示到点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合，如图 1-1 所示．故有

$$U(x_0, \delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$

在点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0 的点的集合，称为点 x_0 的去心 δ 邻域，如图 1-2 所示，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，因而有

$$\mathring{U}(x_0, \delta)=(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

如 $U(1, 0.02)=(0.98, 1.02)$，$\mathring{U}(1, 0.02)=(0.98, 1)\cup(1, 1.02)$.

x_0 的左 δ 邻域：$(x_0-\delta, x_0)$；x_0 的右 δ 邻域：$(x_0, x_0+\delta)$.

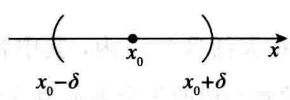

图 1-1

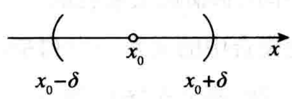

图 1-2

四、函数

在自然界或实际问题中，常会发生一个量随另一个量的变化而变化的情况，如自由落体中物体下落的距离 s 随时间 t 而改变，圆的面积 A 随半径 r 的改变而改变．我们将两个量之间的

这种关系定义为函数关系．

1. 函数的概念

定义 2　设 x，y 是两个变量，数集 $D\subseteq\mathbf{R}$ 且 $D\neq\Phi$. 如果 $\forall x\in\mathbf{D}$（“$\forall$”表示“对任意的”），按照某种对应法则 f，y 都有确定的值与之对应，称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{D}$.

自变量 x 的取值范围（数集 D）称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，记作 D_f.

由函数定义知道，对 D_f 中任意给定的数值 x_0，y 都有确定的值 y_0 与之对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$.

函数值的全体构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 R_f，即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in\mathbf{D}_f\}.$$

说明　对应关系符号 f 也可用其他字母表示，如 g、φ、ψ 等．

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，称函数为单值函数，否则称为多值函数．如 $y=x+1$ 为单值函数，$y^2=x+1$ 为多值函数．以后凡是没有特殊说明时，均指单值函数．

如果两个函数的定义域和对应法则分别相同，称这两个函数为相同的函数（此时值域必定相同）．如函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数；而 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是不同的函数，因为 $y=x+1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，而函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq1\}$.

通常将函数的定义域和对应法则称为函数的两要素．

例 1　设函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}-2$，求 $f(1)$ 和 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解　$f(1)=1^2+\dfrac{1}{1}-2=0$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{1}{\frac{1}{x}}-2=\dfrac{1}{x^2}+x-2$.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，取 $x_0\in\mathbf{D}_f$，得到对应的 y_0，由 x_0 和 y_0 构成的一组有序实数对 $(x_0,\ y_0)$ 对应 xOy 平面上的一个点．当 x 取遍 D_f 上所有值时，得到 xOy 平面上的点集 M

$$M=\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in\mathbf{D}_f\}.$$

点集 M 称为函数 $y=f(x)$ 的**图像**（或图形）．图形 M 在 x 轴上的垂直投影点集就是 D_f，在 y 轴上的垂直投影点集就是 R_f，如图 1－3所示．

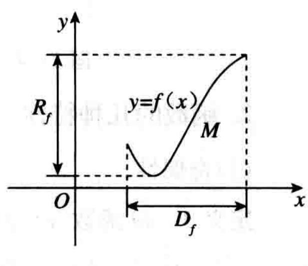

图 1－3

如果函数在自变量的不同取值范围内有不同的对应法则，这种函数称为**分段函数**．

下面举几个分段函数的例子．

例 2　狄利克雷(Dirichlet)函数.

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

其定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{0, 1\}$.

例 3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

其定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$，如图 1-4 所示.

对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 或 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$.

例 4　取整函数

$$y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n\in\mathbf{Z}$$

对任意实数 x，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，其定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，如图 1-5 所示.

如$[0.2]=0$，$[-3.1]=-4$，$[5]=5$.

例 5　函数

$$y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

其定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=[0, +\infty)$，如图 1-6 所示.

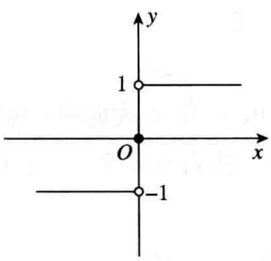

图 1-4

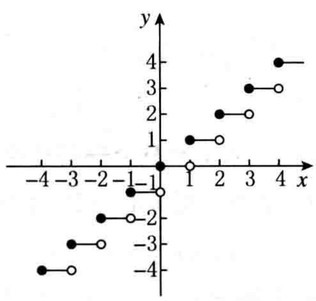

图 1-5

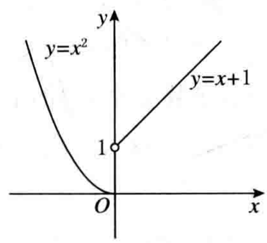

图 1-6

2. 函数的几种特性

(1)奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$的定义域 D_f 关于原点对称. $\forall x\in\mathbf{D}_f$，如果有$f(-x)=-f(x)$ ($f(-x)=f(x)$)，称 $y=f(x)$为**奇函数(偶函数)**. 如果 $f(-x)\neq-f(x)$，且 $f(-x)\neq f(x)$，称函数 $y=f(x)$为**非奇非偶函数**.

如 $f(x)=x^2+1$ 为偶函数，$f(x)=x^3+x$ 为奇函数，$f(x)=x^3+x^2-1$ 为非奇非偶函数.

由奇偶函数定义知，奇函数图像关于原点对称(图 1-7)，偶函数图像关于 y 轴对称(图 1-8).

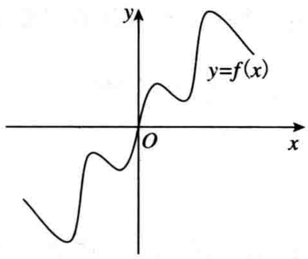

图 1-7

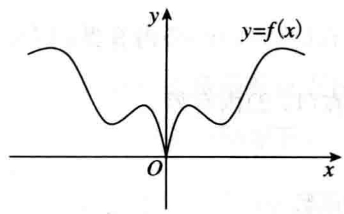

图 1-8

任意一个定义在对称区间上的函数 $f(x)$，总能表示成一个奇函数与一个偶函数之和．事实上，$F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数，$G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数，而 $f(x)=F(x)+G(x)$.

(2)单调性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，如果 $\forall x_1<x_2\in I\subseteq D_f$，都有

$$f(x_1)<f(x_2)\,(f(x_1)>f(x_2)),$$

称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少)．单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**．单调增加函数的图像沿 x 轴正向上升，单调减少函数的图像沿 x 轴正向下降，如图 1-9 及图 1-10 所示．

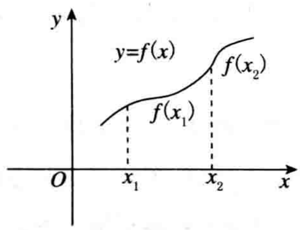

图 1-9

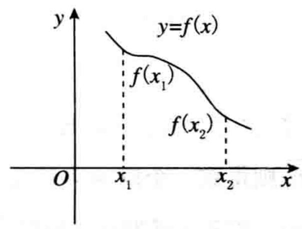

图 1-10

注意　如果一个函数在某一个定义区间上单调增加，而在另一个定义区间上单调减少，则在整个定义域上不具备单调性．如函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,\ 0)$内单调减少，在区间$(0,\ +\infty)$内单调增加，因此在$(-\infty,\ +\infty)$内不是单调函数．

(3)有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，$I\subseteq D_f$．如果存在正数 M，使 $\forall x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**．如果对于任何正数 M，总存在 $x_0\in I$，使 $|f(x_0)|>M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**无界**．

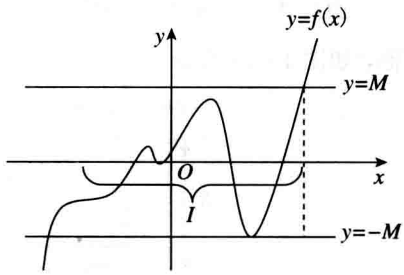

图 1-11

由绝对值不等式知，$|f(x)|\leqslant M$ 等价于 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，因此当函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时，函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图像必介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间，如图 1-11 所示．

注意 考虑函数的有界性时，不但要注意函数本身的特点，还要注意自变量的取值范围．如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $(1,2)$ 内有界．

(4)周期性

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，如果存在不为零的数 T，使 $\forall x\in \mathbf{D}_f$，有 $x\pm T\in \mathbf{D}_f$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**．

显然，若 T 为函数 $f(x)$ 的周期，则 $kT(k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期．通常所说的函数的周期指**最小正周期**．

如函数 $\sin x$、$\cos x$ 的周期为 2π，$\tan x$、$\cot x$ 的周期为 π.

由周期函数定义知，周期为 T 的函数的图像沿 x 轴方向每相隔 T 个单位重复一次，如图 1－12 所示．

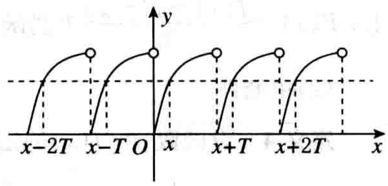

图 1－12

五、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f. 因为 R_f 是由函数值组成的集合，所以对每一个 $y_0\in \mathbf{R}_f$，必定有 $x_0\in \mathbf{D}_f$，使 $f(x_0)=y_0$，但这样的 x_0 可能不止一个，如图 1－13 所示．

定义 7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f. 若 $\forall y\in \mathbf{R}_f$，$D_f$ 中有唯一的 x 与之对应，使得 $f(x)=y$，则得到一个以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$，称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 R_f，值域为 D_f. 由于习惯上自变量用 x 表示，故将 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

并非任何函数都存在反函数，但单调函数一定存在反函数，且有如下定理．

定理 如果 $y=f(x)$，$x\in \mathbf{D}_f$ 是单调增加(减少)函数，则它一定存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in \mathbf{R}_f$，且 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 具有同样的单调性．

由反函数定义知，函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，且它们的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－14 所示．

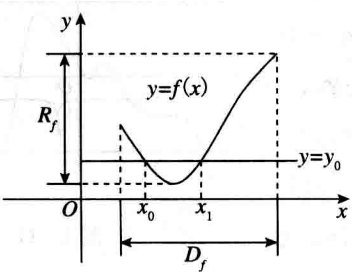

图 1－13

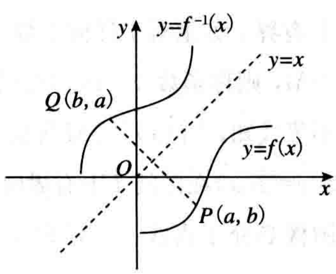

图 1－14

六、基本初等函数

以前已经学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五种函数，今后接触的函数大部分是它们经过某种运算得到的．现将这五种函数简单总结如下．

1. 幂函数

定义 8 形如 $y=x^\alpha$（α 是常数）的函数称为**幂函数**．其定义域视 α 的值而定．

$y=x^\alpha$ 中，$\alpha=1、2、3、\frac{1}{2}、-1$ 是最常见的幂函数，图像如图 1-15 所示．

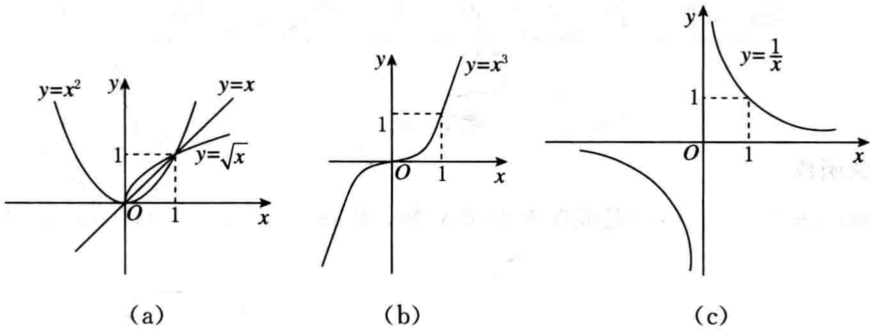

图 1-15

2. 指数函数

定义 9 形如 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）的函数称为**指数函数**．其定义域为实数集 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}^+$，图像过(0，1)点．

$a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调增加；$0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调减少，如图 1-16 所示．

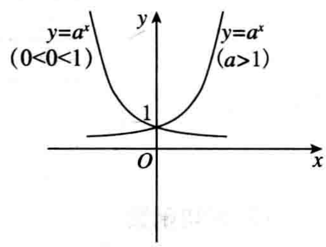

图 1-16

3. 对数函数

定义 10 形如 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）的函数称为**对数函数**．其定义域为 $\mathbf{R}^+$，值域为 $\mathbf{R}$，图像过(1，0)点．

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）与指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）互为反函数．

$a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调增加；$0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调减少，如图 1-17 所示．

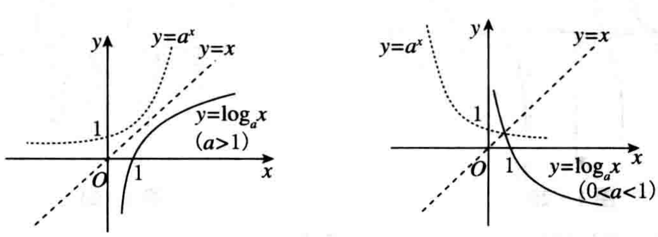

图 1-17

以无理数 e=2.71828…为底的对数函数，称为**自然对数函数**，记作 $y=\ln x$．