"十三五"移动学习型规划教材

高等数学教程

下册

第2版

张汉林　范周田　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"移动学习型规划教材

高等数学教程

下　册

第 2 版

张汉林　范周田　编著

机　械　工　业　出　版　社

本书是课本与网络（手机）结合的立体教材.

本书在编写过程中取国内外优秀教材之长，在透彻研究的基础上，以尽可能简单的方式呈现微积分知识.

网络（手机）支持重点知识讲解、图形演示、习题答案或提示、扩展阅读、讨论等移动学习功能.

本套教材分为上、下册，并有《高等数学教程例题与习题集》与之配套．本书是下册，内容包括：常微分方程、无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分.

本书各节末均配有分层习题，各章末配有综合习题．书后的附录对若干重点问题进行了细致的分析.

本书适合作为高等院校理工科类各专业学生的教材，也可作为自学、考研的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程．下册/张汉林，范周田编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2016.11

“十三五”移动学习型规划教材

ISBN 978-7-111-55125-6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①张…　②范…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第246399号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：李永联　责任编辑：李永联　陈崇昱

责任校对：肖　琳　封面设计：陈　沛

责任印制：李　洋

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2017年1月第2版第1次印刷

169mm×239mm·19.75印张·380千字

标准书号：ISBN 978-7-111-55125-6

定价：41.50元

张汉林　教授

1961年10月出生，硕士学位，研究方向是微分方程奇异摄动理论及应用。高校教龄33年，其间多年从事微积分教育教学研究与改革，主编北京市精品教材两部，近年来积极倡导传统与现代网络技术结合的微积分二维码教材。北京市优秀教师。中国数学会奇异摄动专业委员会理事，中国高等教育学会教育数学专业委员会常务理事。

范周田　教授

1963年4月出生，先后就学于北京大学、中国科技大学研究生院、清华大学，分别获得理学学士、硕士、博士学位。主要研究模糊数学、神经网络及算法等，著有《模糊矩阵理论与应用》《工科矩阵论》。以“透彻研究，简单呈现”为理念来进行微积分教育教学的研究与改革，主编北京市精品教材两部，国家规划教材两部，首倡传统与现代网络技术结合的微积分二维码教材。中国高等教育学会教育数学专业委员会副秘书长。

本书第1版在2013年被评为

北京高等教育精品教材

序

《高等数学教程》(上、下册)是北京工业大学数理学院的范周田、张汉林等多位教师经过数年总结探索，结合自身教学实践而编写的公共数学教材，在概念和方法上都很有创新.

高等数学是几乎所有大学生的必上之课，恐怕也是最重要的一门基础课.现在的高等数学教材种类繁多，内容大同小异，那么选什么教材就变得尤为关键，而本套教材确实是一套内容翔实、易教易学的高等数学教材.

本套教材从无到有，由浅入深，抓住了微积分的牛鼻子，从无穷小入手，进而引入极限的一般概念，循序渐进地将学生引入微积分的殿堂.书中有很多评注和要点总结，这是学生最希望看到的.

值得一提的是，在第 1 章中引入无穷小时，书中话语通俗易懂、平易直观，摆脱了以往教材生硬、古板、上来就是 ε-δ 语言的讲法，而是一语中的，抓住了“无穷小”的本质.生动之后又将其数学化，老师易教，学生也易学.将复杂的内容，抓住实质讲得明白，使学生觉得自然亲切，真正是以一个例子说清了最不易说清楚而又不得不说的无穷小问题.

微积分的教学改革既举足轻重，又颇具难度.本套教材对微积分的教学改革是一个很大的推动.应该说，微积分的教学改革是一场攻坚战，我们仍需努力，将它进行到底!

中国科学院　院士

林　群

2011 年 2 月 23 日于北京

第 2 版前言

高等数学（微积分）是学习如何解决问题的一门课程。尽管有些人可能在工作之后再也用不到微积分，但是他们仍然可以从微积分的学习中受益，因为学习微积分的好处不仅体现在专业上，而且还体现在智力上. 我们编写本书的目的正是期望读者能够更顺利地完成微积分的学习.

本书延续了第 1 版逻辑简约，语言科学、平易的优点，取国内外优秀教材之长，秉承“透彻研究，简单呈现”的原则，对微积分内容及叙述方式做了进一步的梳理.

本次修订的最大变化是增加了网络支持功能，是传统教材与现代教育手段有机结合的一次尝试. 网络（手机）视频、音频或文本支持重点知识讲解、图形演示、习题答案或提示、扩展阅读、讨论等，实现移动学习的功能，并将不断升级、扩展和完善.

在本次修订过程中，北京服装学院谢伟献、董庆华、刘蓉、侯志萍等老师完成了习题分级，并提出了其他有益的建议，在此表示感谢.

对我们的同事，关心并支持我们的朋友和出版社的朋友们一并表示感谢！

由于编者水平和时间有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

第 1 版前言

高等数学（微积分）是大学各理工科专业最重要的公共基础课程，具有周期长、课时多、内容多、难点多等特点．一套好的教材应该用科学、平易的语言阐明微积分的主要内容，并且应该易教易学．

为了实现这一目标，我们长期致力于高等数学教材的建设工作，先后有范周田、张汉林、平艳茹、杨晓华、丁津、唐兢、王术、田鑫、张方、李贵斌、胡京兴、徐大川等十余位教师参与其中．

在教材的写作过程中，我们有幸得到了林群院士的指导．林群院士指出："擒贼先擒王，无穷小就是微积分的王．抓住了无穷小就可以学会微积分．"同时，我们学习了张景中院士的教育数学理论，即要"通过对数学本身的研究来化解数学的难点"，知识的结构与表达要做到"逻辑结构尽可能简单，概念引入要平易直观，要建立有力而通用的解题工具"．《高等数学教程》的写作充分借鉴了这些思想和理论．

《高等数学教程》具有以下特点：

1. 化解障碍，平易衔接．极限理论是微积分理论的重要基础，也是微积分入门的主要障碍．我们首先从自变量的变化趋势出发，直观地介绍了三个基本的无穷小，然后用极限的 ε-δ 定义证明了无穷小的比较定理．以此为基础，我们从正面诠释极限理论，避开了极限定义中"颠倒因果关系"造成的学习困难．这样既能表达极限 ε-δ 语言的意境和作用，又和初学者已有的知识水平和思维习惯相适应，在一定程度上降低了极限理论的学习难度．

2. 重点突出，难点分散．例如，中值定理是导数应用的理论基础，也是一元微积分教学的重点和难点，我们从便于学习者加深理解并掌握的角度对其进行了重新设计．每一节都只有一个重点或难点，从定理证明、思想方法、应用等多侧面由易到难进行介绍．

3. 对重点概念或定理的表述更加科学，更加平易直观，例如，函数、不定积分和曲率等概念的表述，以及复合函数的导数公式、积分换元法、牛顿-莱布尼兹公式的证明等．

4. 突出数学的思想方法，用数学思想解决实际问题．例如，教材中借助求解常微分方程过程中经常使用的变量替换的思想，简化了二阶常系数线性微分方程的求解过程．又如，对坐标的曲面积分是为解决物理中的场论问题产生的，我们从物理问题出发建立对坐标的曲面积分的概念，并从概念中产生了计算

方法.

《高等数学教程》整套教材的写作得到了韩云瑞教授、李心灿教授、郭镜明教授等多位专家的热心支持与无私帮助，其中韩云瑞教授认真审阅了本书的全部书稿，李心灿教授审阅了部分书稿，并提出了许多宝贵意见. 专家们广博深厚的知识、严谨治学的风范以及乐于助人的美德深刻地影响了我们. 正是在他们的帮助和鼓励下本书才得以顺利完成，在此向他们表示崇高的敬意！

在《高等数学教程》成书之际，诚挚感谢林群院士和张景中院士！

感谢我校蒋毅坚副校长、教务处及数理学院的相关领导长期以来对我们的关心和支持！

对我们的同事，关心并支持我们的朋友和出版社的朋友们一并表示感谢！

由于编者水平和时间有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

目　　录

第 7 章

常微分方程

确定变量之间的函数关系，既是用数学解决实际问题的关键之处也是最困难之处. 在某些情况下，通过对实际问题的抽象和简化，可以建立未知函数与其导数的关系式，即微分方程. 这样的微分方程就是问题的数学模型.

本章我们介绍几类微分方程的求解方法.

7.1 常微分方程的基本概念

常微分方程是指含有一元未知函数的导数（或微分）的方程，微分方程中出现的最高阶导数的阶数 n 称为该微分**方程的阶**，此时也称该方程为 n 阶常微分方程. 例如

$$y'' + xy' + x^2 y = 0$$

是二阶常微分方程.

n 阶常微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

其中 $y^{(n)}$ 必须出现.

使微分方程成为恒等式的函数称为**微分方程的解**，即如果

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

则 $y=\varphi(x)$ 就是微分方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$ 的解．解的图形叫作微分方程的**积分曲线**.

以后我们讨论的微分方程都是可以把最高阶导数解出来的，即

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)})$$

例 7.1　人口增长的微分方程模型.

2004 年初，世界人口总量约为 64 亿．据说，到 2020 年世界总人口将达到 79 亿．这个结果是怎么预测出来的？

在数学上是这样处理这个问题的：用 $y=f(t)$ 表示世界人口在 2004 年后时刻 t 的总量（时间单位是年）．$y=f(t)$ 是一个未知函数，取值是整数，当有人出生或死亡时，$y=f(t)$ 的值是跳跃的．然而，相对于巨大的人口总量来说，这种跳跃幅度如此之小，以至于我们可以把 $y=f(t)$ 看作一个可导函数.

一个看似合理的假设是：在一个很小的时间段 $[t,t+\Delta t]$ 内，人口总量的增量 Δy（出生人口数减死亡人口数）与人口总量 y 成比例，即 $\Delta y=ky\Delta t$，或

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=ky$$

取极限，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$$

这就是人口增长的一个微分方程模型，其中 k 为比例参数，当 $k>0$ 时，人口总量增加；当 $k<0$ 时，人口总量减少.

容易验证，$y=C\mathrm{e}^{kt}$ 满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$，因而它是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$ 的解，其中 C 为任意常数.

这个微分方程模型被称作**指数模型**．自然界中的许多量的变化都与自身的大小成一定的比率，如细菌的繁殖、放射性物质的质量、按复利计算的投资收益等，这些问题都适合于指数模型.

由条件，$y(0)=64$，代入 $y=C\mathrm{e}^{kt}$ 得 $y=64\mathrm{e}^{kt}$．世界人口的历史数据表明，$k\approx 0.0132$，即 $y=64\mathrm{e}^{0.0132t}$．当 $t=16$ 时，

$$y(16)=64\mathrm{e}^{0.0132\times 16}\approx 79$$

即 2020 年世界总人口约为 79 亿.

注　按照指数模型，随着时间的增加，人口增长速度将越来越快．实际上，受空间和资源等限制，世界人口总量不可能无限制地增长，必然有一个上限．于是世界人口增长的微分方程模型被修正为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky(L-y)$$

其中 L 就是世界人口总量的上限. 当 y 远远小于 L 时, y 近似指数增长, y 越接近 L, 其增长的速度越慢. 这个微分方程模型称为逻辑斯谛（Logistic）模型.

例 7.2 设 $k\neq 0$ 为常数, 验证 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$（C_1、C_2 是任意常数）是二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$ 的解.

解 因为

$$\frac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt$$

将 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 和 x 代入原方程, 得

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)=0$$

故

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$$

是原方程的解.

方程的解 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 中包含两个任意常数 C_1 和 C_2. C_1 和 C_2 在解中的作用不能相互替代, 我们称之为独立的任意常数.

如果微分方程的解中包含有独立的任意常数, 且独立的任意常数的个数等于该微分方程的阶数, 则这种解就是微分方程的**通解**.

例如, $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 就是二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$ 的通解; $y=Ce^{kt}$ 是微分方程 $\frac{dy}{dt}=ky$ 的通解.

例 7.3 验证 $y=\sin(x+C)$（C 为任意常数）是微分方程

$$y^2+y'^2=1$$

的通解.

解 把 $y=\sin(x+C)$, $y'=\cos(x+C)$ 代入方程, 得恒等式

$$\sin^2(x+C)+\cos^2(x+C)\equiv 1$$

所以, $y=\sin(x+C)$（C 为任意常数）是微分方程 $y^2+y'^2=1$ 的解.

又因为 $y=\sin(x+C)$ 中含有一个任意常数, 而 $y^2+y'^2=1$ 是一阶微分方程, 所以, $y=\sin(x+C)$（C 为任意常数）是微分方程 $y^2+y'^2=1$ 的通解.

注 微分方程的通解不一定能包含所有的解,例如, $y\equiv 1$ 是微分方程的一个解, 但它并不在通解 $y=\sin(x+C)$ 当中.