iPraclass
高等职业教育“十三五”规划新形态教材

应用高等数学

（理工类）

◉ 主编 苗 慧

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十三五”规划新形态教材

应用高等数学

（理工类）

主　编　苗　慧

副主编　陈　燕

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学:理工类/苗慧主编. —北京:北京理工大学出版社,2019. 7
ISBN 978 -7 -5682 -7216 -2

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①苗…　Ⅲ. ①高等数学 - 高等职业教育 - 教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 138544 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张 / 17
字　　数 / 402 千字
版　　次 / 2019 年 7 月第 1 版　2019 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 52. 00 元

责任编辑 / 钟　博
文案编辑 / 钟　博
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 施胜娟

前 言 PREFACE

本书的编写以高职院校的人才培养目标为依据,贯彻“以应用为目的、以必需够用为度”的高职院校教学理念,努力体现“注重实际应用,淡化数学理论,强化数学实践”的编写原则,同时充分吸收了一线教师在教学改革中的宝贵经验,兼顾学生的可持续发展.本书增加了微视频、电子教案等数字资料,线上教学与线下教学相结合,纸质教材与数字资源相结合,形成了一本完整的、系统的、新形态立体化教材,充分利用学生的碎片化时间,增强学生的自主学习能力.本书共分为六大模块:微积分、微分方程、拉普拉斯变换、无穷级数、线性代数、软件 Mathematica 数学实训并附有相应的练习.本书培养学生应用所学知识解决实际问题的能力.

本书具有以下特色:

(1)专业结合,增强教材的针对性.

本书的编写团队的成员均为长期从事工科专业应用数学教学的一线教师,同时还吸收了计信系、建工系系主任和各专业教研室主任和一线教师的意见和建议,以便能恰如其分地针对实际要求和专业需要来设计编写理念、编写原则,使编写内容更具有针对性.

(2)经典案例,增加教材的生动性.

本书采用“案例引入”的编写方式,所选择的案例与实际生活和后续专业密切相关,使学生切身感受到现实生活中无处不用数学,同时,培养学生将数学知识运用到专业课程和实际生活中,从而体现高等数学既是一门必修的基础课,又是一门必需的工具课.

(3)模拟实训,增加教材的操作性.

本书的最后模块介绍了数学软件 Mathematica 的应用,详细讲述了该软件的一般功能和各种操作技巧,使学生能初步掌握数学软件 Mathematica 的基本用法,锻炼学生的操作技能,从而提高学生运用数学软件解决实际问题的能力.

(4)阅读材料,培养学生的人文素养.

本书的每个应用后面增加了有关数学方面的阅读材料,适当加强数学文化的通识教育,精选一些数学文化的素材,例如古代的极限思想、变化率思想、建模思想等,展示数学思想的形成背景和数学对现实世界的影响,引导学生领会数学的精神实质和思想方法,通过阅读材料提高学生的数学文化,培养学生的人文素养.

(5)信息手段,提升教学的有效性.

本书的每一部分知识点都配有二维码,学生通过扫描二维码可以获取该部分知识的微视频、题库、电子课件、在线课程等数字资料,方便学生课前预习与课后复习.本书的组织方式是对“应用高等数学”课程进行教学改革与创新的有力支撑、对教材形态的创新和教学有效性的

提升.

本书适用于高职院校理工类的各个专业,可根据专业的需求选取相应的模块.

本书由苗慧担任主编,由陈燕担任副主编,并参考其他教师的意见和建议,最后由苗慧统稿、定稿.

本书的编写得到了学院有关领导、基础部王华主任的大力支持和帮助,得到了北京理工大学出版社的热情关怀与指导,在此一并致谢.

由于编者水平有限和时间紧迫,本书难免有错误和不妥之处,欢迎广大读者不吝赐教,以备改正.

编 者

2019. 6

目录 CONTENTS

模块一 微积分

微积分(Calculus)是高等数学中研究函数的微分(Differentiation)、积分(Integration)以及有关概念和应用的数学分支. 它是高等数学的一个基础学科. 其内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用. 微分学包括求导数的运算,是一套关于变化率的理论. 它使函数、速度、加速度和曲线的斜率等问题均可用一套通用的符号进行讨论. 积分学包括求积分的运算,为定义和计算面积、体积等问题提供一套通用的方法. 微积分与实际应用紧密联系,它在天文学、力学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学等多个领域中有着越来越广泛的应用,特别是计算机的发明更有助于这些应用的不断发展. 本模块主要介绍函数、极限、连续的基本概念以及其应用,微分学的基本概念、基本公式及其应用,积分学的基本概念、基本定理、基本公式及其应用.

应用一 函数、极限、连续及其应用

《应用高等数学》导课

1.1.1 函数及其应用

函数是近代数学的基本概念之一. 高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程. 极限贯穿于高等数学的始终,是基本的理论工具. 连续则是函数的一个重要性态,连续函数是高等数学研究的主要对象. 本小节介绍函数、极限和连续的基本知识和实际应用,为后续的学习和应用奠定基础.

1. 函数的概念

在观察各种自然现象或研究实际问题的时候,常常会遇到各种不同的量,这些量一般可分为两种:有一些量在所考察的过程中不发生变化,也就是保持一定的数值,这种量称为常量;还有一些量在所考察的过程中会发生变化,也就是可以取不同的数值,这种量称为变量. 比如,自由落体的下降时间和下降距离是变量,而落体的质量是常量.

通常用字母 a,b,c 表示常量,用字母 x,y,z 表示变量. 变量的变化范围叫作变量的变动区域,有一类变量可以取介于两个实数之间的任意实数,称为连续变量,连续变量的变动区域常用区间表示.

同一现象中的各种变量通常并不都是独立变化的,它们之间存在依赖关系. 下面考察几个具体例子:

案例 1-1-1【自由落体运动】 设落体下落的时间为 t,下降距离为 s. 根据自由落体公式得

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度. 这个公式指出了自由落体运动中,落体的下降距离 s 和时间 t 的依赖关系.

假定物体着地的时刻为 $t=T$,那么当 t 取 $[0,T]$ 上的任一值时,由上式就可以确定下降距离 s 的相应数值.

案例 1-1-2【产品的总成本】 生产某种产品的固定成本为 3 000 元,每生产一件产品,成本增加 60 元,那么该种产品的总成本 C 和产量 Q 的关系可由下式给出:

$$C = 3\ 000 + 60Q.$$

当产量 Q 取任何一个合理值时,总成本 C 有确定的数值与之对应.

在上面两个案例中,抽去所考虑的量的实际意义,可以发现它们都表达了两个变量之间的依赖关系,根据这种依赖关系,当其中一个变量取其变化范围内的任一数值时,另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1-1-1 设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时,变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

这里,x 称为**自变量**,y 称为**因变量或函数**. 集合 D 称为函数的定义域,相应的 y 值的集合则称为函数的值域. f 是函数符号,它表示 y 与 x 的对应规则.

从函数的定义可以看出,构成函数的要素是定义域 D 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时,因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫作当 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 1-1-1 求函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解:该函数为偶次根式和对数式的代数和,此时函数的定义域应为这两部分定义域的交集,即满足不等式组

$$\begin{cases} 3+2x-x^2 \geqslant 0, \\ x-2>0 \end{cases}$$

的 x 值的全体.

解此不等式组,得其定义域为 $(2,3]$.

例 1-1-2 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f(0)$, $f(-x)$.

解:$f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$,

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}.$$

常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图形法,下面用三个例子说明:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{(x-1)(x-2)}$.

这是一个用解析法表示的函数. 这个函数的定义域是 $(-\sqrt{3},1)\cup(1,\sqrt{3})$. 在这个集合中的每个 x,都可以通过公式计算得到函数 y 的相应值.

(2)某商店一年中各月份毛线的销售量(单位:10^2 kg)的关系见表 1-1-1.

表 1－1－1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 $y/10^2$ kg	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

这是用表格法表示的函数. 当自变量 x 取 1～12 的任一整数时，从表格中可以找到 y 的对应值.

(3) 图 1－1－1 所示是气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线.

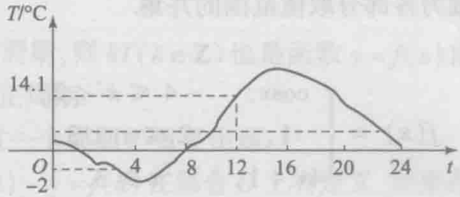


图 1－1－1

这是用图形法表示的函数. 气温 T 和时间 t 的函数关系是由曲线给出的，当 t 取 0～24 的任意一个数值时，在曲线上都能找到确定的 T 与之对应. 例如，当 $t=12$ 时，气温 $T=14.1$℃.

2. 分段函数

案例 1－1－3【出租汽车收费问题】 某城市出租汽车收费情况如下：起步价（3 km 以内）为 11 元/km，行驶里程为 3～10 km 时，每千米租费为 2.5 元；超过 10 km 以上的部分租费为 3.75 元/km. 如果设行驶里程为 x，所需费用为 y，其解析式就是一个分段函数，即

$$y=\begin{cases}11, & 0<x\leqslant 3,\\ 11+2.5(x-3), & 3<x\leqslant 10,\\ 11+2.5\times 7+3.75(x-10), & x>10.\end{cases}$$

案例 1－1－4【电压波】 考察脉冲发生器所产生的一个单三角脉冲电压波，其电压 U(V) 与时间 t(μs) 之间的关系如图 1－1－2 所示.

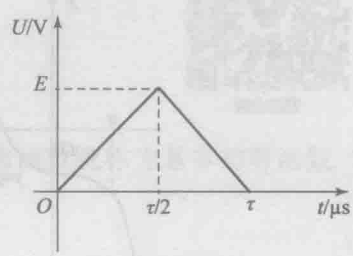


图 1－1－2

当 $0\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}$ 时，$U=\frac{2E}{\tau}t$；当 $\frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau$ 时，$U=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau)$；当 $t>\tau$ 时，$U=0$.

这一波形的数学表达式可统一写为

$$U=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2},\\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau), & \frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases}$$

其中 t 的取值范围（即定义域）为 $[0,+\infty)$.

定义 1－1－2 把定义域分为若干部分，每一部分表达式不同的函数称为**分段函数**.

例 1-1-3 设函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0, \\ 2, & x=0, \\ 3x, & x<0 \end{cases}$$

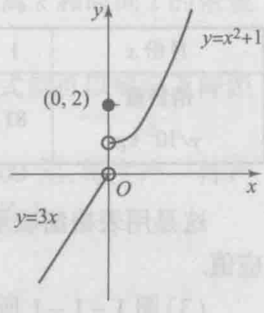


图 1-1-3

当 x 取 $(0,+\infty)$ 内的值时，y 的值由表达式 $y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取 $(-\infty,0)$ 内的值时，y 的值由表达式 $y=3x$ 来计算，如图 1-1-3 所示. 例如：$f(2)=2^2+1=5$，$f(-1)=3\times(-1)=-3$.

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

注意：分段函数的定义域为各部分取值范围的并集.

例 1-1-4 设函数

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & -4\leqslant x<2, \\ 1, & 2\leqslant x<3, \\ 4x+1, & x\geqslant 3. \end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(2)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域.

解：因为 $-\pi\in[-4,2)$，所以 $f(-\pi)=\cos(-\pi)=-1$；因为 $2\in[2,3)$，所以 $f(2)=1$；因为 $3.5\in[3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=4\times(3.5)+1=15$.

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$.

3. 函数的几种特性

定义 1-1-3（单调性） 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加（或单调减少）的. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

单调增加函数的图形沿 x 轴的正向上升，单调减少函数的图形沿 x 轴的正向下降，如图 1-1-4 所示.

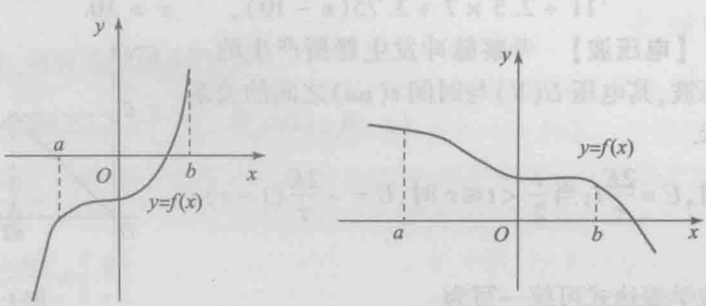


图 1-1-4

定义 1-1-4（奇偶性） 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的，如图 1-1-5 所示.

定义 1-1-5（周期性） 对于函数 $y=f(x)$，如果存在非零常数 T，使 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称此函数为周期函数，T 称为周期.

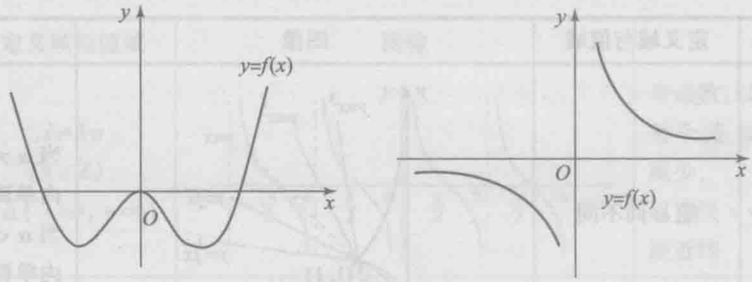


图 1-1-5

若 T 为函数 $y=f(x)$ 的周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z})$ 也是函数 $y=f(x)$ 的周期. 把满足 $f(x)=f(x+T)$ 的最小正数 T_0 称为最小正周期.

周期函数的图形每经过一个周期 T 重复出现.

定义 1-1-6（有界性） $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 与 $y=N$ 之间，如图 1-1-6 所示.

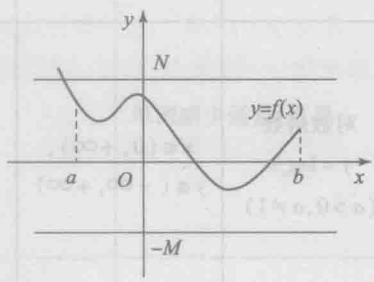


图 1-1-6

注意：(1) 当一个函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界时，正数 M 的取法是不唯一的. 如 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，$|\sin x|\leqslant 1$，但也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|<2$. 事实上，M 可以取大于等于 1 的一切实数.

(2) 有界性依赖于区间. 如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，而在区间 $(0,1)$ 内是无上界的.

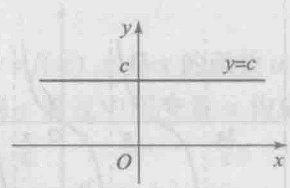
复合函数

4. 复合函数和初等函数

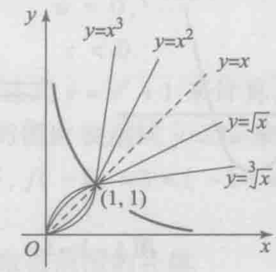
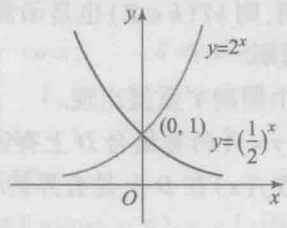
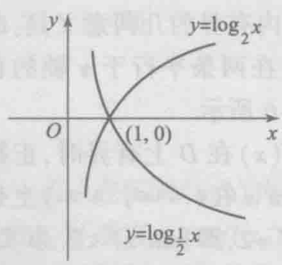
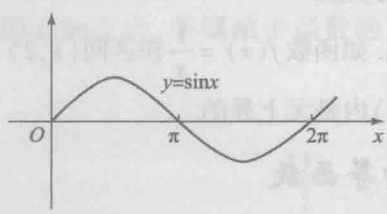
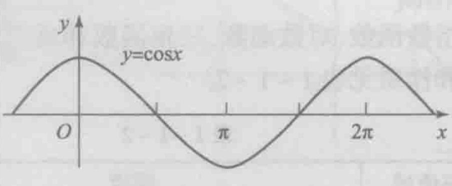
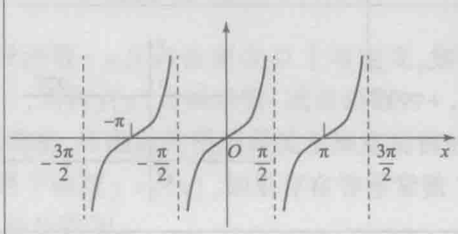
1) 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 它们的定义域、值域、图像和性质见表 1-1-2.

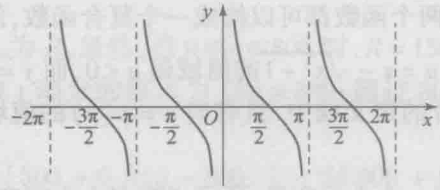
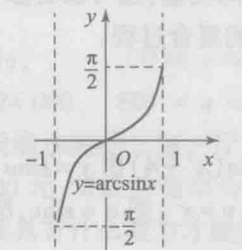
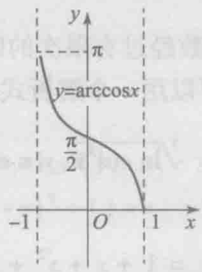
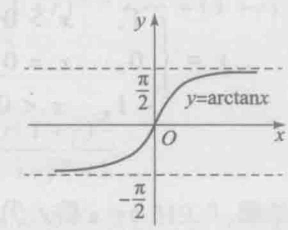
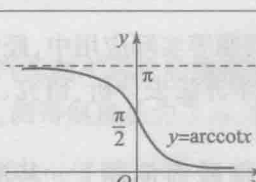
表 1-1-2

函数	定义域与值域	图像	性质
常数函数 $y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=c$		偶函数

续表

函数	定义域与值域	图像	性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$	随 α 而不同		当 $\alpha>0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加， 当 $\alpha<0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(0,+\infty)$		过点(0,1)， 当 $a>1$ 时，单调增加， 当 $0<a<1$ 时，单调减少， 曲线以 x 轴为渐近线
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$x\in(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		过点(1,0)， 当 $a>1$ 时，单调增加， 当 $0<a<1$ 时，单调减少
三角函数：正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[-1,1]$		奇函数，以 2π 为周期，有界
三角函数：余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[-1,1]$		偶函数，以 2π 为周期，有界
三角函数：正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$， $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，以 π 为周期，每个连续区间内单调增加， 以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线

续表

函数		定义域与值域	图像	性质
三角函数	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,以 π 为周期,每个连续区间内单调减少,以直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		单调增加的奇函数,有界
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$, $y\in[0,\pi]$		单调减少函数,有界
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		单调增加的奇函数,有界,以直线 $y=\pm\frac{\pi}{2}$ 为渐近线
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[0,\pi]$		单调减少函数,有界,以直线 $y=0,y=\pi$ 为渐近线

2)复合函数

定义 1-1-7 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 如果 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中,则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数称为 x 的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中,x 是自变量,u 称作中间变量.

例如,$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的;$y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=1-x^2$ 复合而成的.

必须注意,不是任何两个函数都可以构成一个复合函数,例如 $y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$就不能构成复合函数,因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$的值域是 $u<0$,而 $y=\ln u$ 的定义域是 $u>0$,前者的值域完全没有被包含在后者的定义域中. 只有当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空时,才可以复合.

复合函数不仅可以有一个中间变量,还可以有多个中间变量.

例 1-1-5 指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sin(x^3+4)$;

(2) $y=5^{\sin x^2}$.

解:(1) 设 $u=x^3+4$,则 $y=\sin(x^3+4)$ 由 $y=\sin u$,$u=x^3+4$ 复合而成.

(2) 设 $u=\sin x^2$,则 $y=5^u$;设 $v=x^2$,则 $u=\sin v$,所以,$y=5^{\sin x^2}$可以看成由 $y=5^u$,$u=\sin v$,$v=x^2$ 三个函数复合而成.

3) 初等函数

定义 1-1-8 由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的函数叫作**初等函数**,一般来说,初等函数都可以用一个解析式表示.

例如:$y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,$y=\sqrt[5]{\ln\cos^3 x}$,$y=e^{\operatorname{arccot}\frac{x}{3}}$,$y=\dfrac{3^x+\sqrt[3]{x^2+5}}{\log_2(3x-1)-x\sec x}$都是初等函数,而

$$y=1+x+x^2+x^3+\cdots,$$

$$y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

都不是初等函数.

5. 函数模型的建立

在解决工程技术问题、经济问题等实际应用中,经常需要先找到问题中变量之间的函数关系,然后利用有关的数学知识、数学方法去分析、研究、解决这些问题. 下面以几个较为简单的案例来说明函数模型的建立过程.

案例 1-1-5【灌溉渠的横截面问题】 某灌溉渠的横截面是一个等腰梯形,如图 1-1-7 所示,底宽为 2 m,斜边的倾角为 45°,CD 表示水面. 试建立过水截面 $ABCD$ 的面积 S 与水深 h 的函数关系.

解:过水截面是一个等腰梯形,其面积随着水深 h 和上底 CD 的变化而变化. 由题意知,上底 CD 与 h 有关:

$$CD=2+2h,$$

因此,过水截面 $ABCD$ 的面积 S 为

$$S=\frac{1}{2}(2+2+2h)\cdot h=2h+h^2\ (h>0).$$

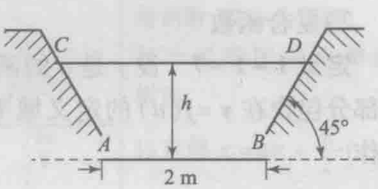


图 1-1-7