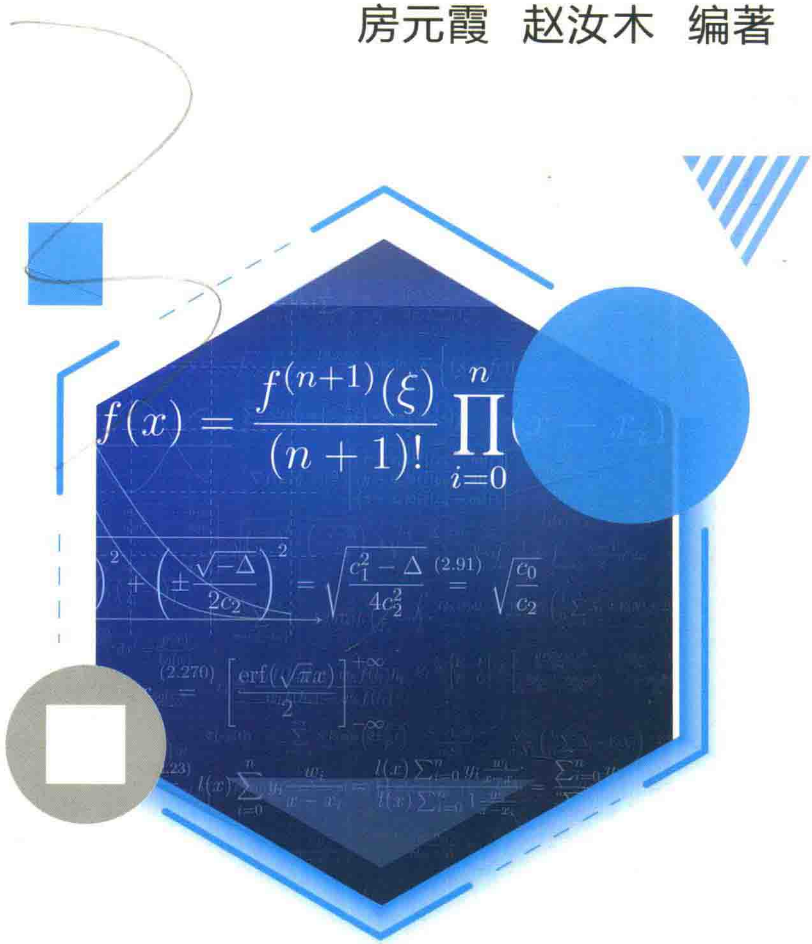
21世纪高等教育规划教材

——学习指导与考研系列

高等数学

学、思、用一体化方案

房元霞　赵汝木　编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

高等数学
学、思、用一体化方案

房元霞　赵汝木　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书按照《高等数学（2）》的体例编写。每一节都依据课程大纲和教材内容确定学习目标、学习重点，分离出本节学习基础的预备知识与方法，然后以问题的形式显现知识思维发展的脉络，归纳出基本题型，反思解题方法及其原理，并对知识与方法进行适当的拓展，引导读者对高等数学课程的内容进行深入透彻的思考、理解与运用，达到胸有成竹，总览高等数学学习全局的学习效果。

本书适合本、专科高等学校理、工、农、医、经管等专业学生和教师使用，特别对考研的学生复习《高等数学》有一定指导作用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学、思、用一体化方案/房元霞，赵汝木编著. —北京：机械工业出版社，2019.6

21世纪高等教育规划教材. 学习指导与考研系列

ISBN 978-7-111-62528-5

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①房…②赵…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第070493号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：张金奎　责任编辑：张金奎　汤　嘉

责任校对：王明欣　封面设计：严娅萍

责任印制：孙　炜

北京中兴印刷有限公司印刷

2019年6月第1版第1次印刷

169mm×239mm·12.25印张·249千字

标准书号：ISBN 978-7-111-62528-5

定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线：010－88379833

读者购书热线：010－68326294

网络服务

机 工 官 网：www.cmpbook.com

机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

金 书 网：www.golden－book.com

前　言

目前全国高等教育进入了深入贯彻落实全国教育大会和全国高等学校本科教育工作会议精神的新时代。聚焦“两个根本”“以本为本”“四个回归”的总体要求，加快推进一流本科教学体系建设，全面提高人才培养能力，全面振兴本科教育，这就需要我们用新的理念、新的标准、新的眼光、新的措施去全面推进本科教育综合改革。

建设一流本科教育需要一流的本科教学。学科教师就要以人为本、因材施教，创新教学方法，把课堂变成碰撞思维、启迪智慧的场所，以精彩的教学内容和新颖的教学方式吸引学生全身心地投入其中，让学生成为学习的主人，引导学生主动学习、刻苦学习、深度学习，并且通过各种方式，优化学生的课下学习。基于上述目的，我们聚焦“高等数学”课程学习，设计了高等数学学、思、用一体化方案，强化学生的课前、课中及课后的学习。几年教学的实践证明采用这种方法取得的效果是非常令人欣喜的。

本书是山东省教学改革项目（2015M054）和聊城大学教学改革项目《学科课程课堂翻转的理论与实践》的部分研究成果，以同济版“十一五”国家规划教材《高等数学（1）》（第七版）、《高等数学（2）》（第三版）及有关经管类高等数学教材为蓝本，按照《高等数学（2）》的体例编写。通过对本书的学习，读者可以居高临下，总览全局，对高等数学的内容、方法与应用有清晰的认识。与相关教材、教辅资料相比，本书有以下几个鲜明的特色：

1. 导准备，明确内容学到什么程度，需要哪些准备知识，使读者学习前就心中有底，适合数学学习特点。

2. 导思考，用问题引导读者的思考，揭示知识发展的线索，这样透过形式更能从本质上把握数学知识与思想方法，增强理解的透彻性和数学思维的深刻性，提高学生的数学核心素养，使其养成独立思考的良好习惯，促进其创新意识的发展。

3. 导运用，有知识、方法和题型的整理与解法的分析，方便读者进行反思性的学习，思考和运用所学的知识解决问题，优化学习方法，提高学习质量。

4. 此外，书中设置了“归纳总结”“收获与认识”等栏目，目的是让学生对自己所学的知识、方法进行盘点，力争有所思、有所悟，养成反思整理的习惯。

由于作者学识、水平所限，书中不当之处敬请批评指正。

房元霞

于聊城大学

目　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函数【学案】

【学习目标】

1. 通过阅读教材、回忆中学所学函数的知识：

（1）集合、集合的表示方法（特别是数集）、集合的运算及性质.

（2）函数的概念及表示方法.

（3）函数的单调性、奇偶性、周期性.

（4）反函数的概念和性质.

（5）基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数的图像和性质.

2. 掌握用邻域表示数集的方法.

3. 熟悉常数函数、绝对值函数、符号函数、分段函数、取整函数、狄利克雷函数或图形（常用来举反例）.

4. 了解反三角函数的图像和性质.

5. 能够结合具体函数，理解函数的有界性.

6. 理解复合函数的概念，知道初等函数的概念.

【重、难点】基本初等函数的图形与性质. 复合函数的概念.

【学习准备】

这一节是对中学所学集合、函数、函数的性质、反函数与复合函数知识的整理与扩充，课前适当阅读、回顾、思考与解答，为课堂重点学习扩充的部分打下基础.

【数学思考】

问题 1　如何用符号、图示表示以 a，b 为左、右端点的有限区间与无限区间?

问题 2　抽象函数的自然定义域是函数有意义的自变量的取值范围，求函数定义域时常用的规则有：

（1）

（2）

（3）

问题 3　设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求下列函数值：$f(0),f(1),f(-1),f\left(\dfrac{1}{a}\right),f(x_0)$，

$f(x_0+h)$.

问题4 高中研究函数的单调性、奇偶性时，应用了什么数学思想方法？

问题5 满足什么条件的函数有反函数？直接函数与其反函数有什么关系？

【知识补充】

反三角函数的定义：

(1) 反正弦函数：正弦函数 $y=\sin x$ 在定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，有反函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$ 称为反正弦函数.

(2) 反余弦函数：余弦函数 $y=\cos x$ 在定义域为 $[0,\pi]$ 时，有反函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$ 称为反余弦函数.

(3) 反正切函数：正切函数 $y=\tan x$ 在定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有反函数 $y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 称为反正切函数.

(4) 反余切函数：余切函数 $y=\cot x$ 在定义域为 $(0,\pi)$ 时，有反函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 称为反余切函数.

请试着根据互为反函数的两个函数图像的性质，画出反函数的图像. 并试着总结函数的性质.

【归纳总结】

练习1 (1) 以 a 为左端点，b 为右端点的四个有限区间为：________________________________；四个无限区间为：__________________________________.

(2) $U(x_0,\delta)$（点 x_0 的 δ 领域）表示数集____________，$\mathring{U}(x_0,\delta)$ 表示数集____________，开区间 $(a,a+\delta)$，$(a-\delta,a)$ 分别称为____________，____________.
请进一步用图示表示.

(3) 基本初等函数包括____五类.

(4) 由常数与基本初等函数经过________________与______________所构成的，并且可以用________________的函数，称为初等函数.

(5) 函数的单调性与有界性是定义在函数的某个定义区间上或定义域上的，所以说单调性与有界性是函数的局部性质；而函数的奇偶性、周期性是定义在函数的整个定义域上的，是函数的____性质.

练习 2　请画出如下常用的几个特殊的函数（在函数的微分学性质的学习中常用于举反例）的图像，说出其定义域、值域、函数的性质及图像的特点.

（1）常数函数 $y=1$.

（2）绝对值函数 $f(x)=|x|$.

（3）符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0.\end{cases}$

（4）整数部分（取整）函数 $f(x)=[x]$.

（5）小数部分函数 $f(x)=x-[x]$.

（6）狄利克雷（Dirichlet）函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\ 0, x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$（狄利克雷函数无法用图像法表示）

练习 3　（1）分别举出有下（上）界、有界函数的例子，举出无下（上）界函数的例子.

（2）如果 K_1 是 $f(x)$ 在 X 上的一个下界，那么还能构造出 $f(x)$ 在 X 上的另一个下界吗？下界是否唯一？上界呢？

（3）函数 $f(x)$ 在 X 上无界，如何定义？

练习 4　下列各小题中的函数由哪些函数复合而成？

（1）$y=(1-2x)^{10}$；　（2）$y=\ln\cos x$；

（3）$y=e^{x^2}$；　（4）$y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$；

（5）$y=\ln\cos e^{x}$；　（6）$y=\sqrt[3]{1-2x^2}$；

（7）$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$；　（8）$y=\sin\sqrt{1+x^2}$.

【学习拓展】

1.（1）设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的偶函数，若 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调减少，则 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 内单调增加.

（2）两个奇函数之和是奇函数，两个奇函数之积是偶函数.

你能类比猜想到什么结论？

2. 设 $f(x)$ 在 X 上有定义，试证：$f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是它在 X 上既有上界，也有下界.

函数在某个区间 I 上有上界、有下界、有界，无上界、无下界、无界的辩证关系如何？

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, |x|<1,\\ 0, |x|=1,\\ -1, |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^{x}$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

4. 设函数$f(x)$对任何$x\in\mathbf{R}$，满足等式$2f(x)+f(1-x)=e^x$，求$f(x)$.

分析 需要实现符号x，$1-x$之间的转换.

参考解答 令$t=1-x$，则$x=1-t$. 代入等式，得

$$2f(1-t)+f(t)=e^{1-t}$$

由于函数的定义域为$\mathbf{R}$，且函数的表示与用哪个变量无关，所以$2f(1-x)+f(x)=e^{1-x}$.

与原式两边分别相加，得

$$f(x)+f(1-x)=\frac{1}{3}(e^x+e^{1-x})$$

用原式上式两端分别相减，得

$$f(x)=\frac{1}{3}(2e^x-e^{1-x}).$$

大家可以代入原式，检验所求表达式是否符合题目要求.

【收获与认识】

第二节 数列的极限【学案】

【学习目标】

1. 能通过观察数列$\{x_n\}$有限项的变化趋势（或一般项的特征）正确判断数列的敛散性及极限.

2. 通过聆听老师对数列极限概念蕴涵的辩证统一关系的讲解，认识到数学知识的方法论价值，初步认识到由有限来认识无限、由量变来认识质变，进一步发展辩证唯物主义观点.

3. 掌握收敛数列的性质：唯一性、有界性、保号性.

【重、难点】数列极限概念、性质. 极限概念与性质的理解.

【学习准备】

在正式学习极限之前，大家头脑中可能已建立了对极限的模糊认识. 会认为，极限就像渐近线一样，从一侧任意接近它的极限值，但不会超过它. 例如：只承认$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$，而不接受$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$. 因为$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$是围绕$x$轴波动的而不像双曲线的渐近线一样从单侧靠近$x$轴. 这是大家头脑中形成的极限概念，虽然有可取之处，但其不是科学的极限概念.

科学的极限概念在中小学数学课程中早已涉及. $\frac{1}{3}=0.333\cdots$（无限循环小

数)、双曲线的渐近线、平均速度的极限是瞬时速度、平均变化率的极限为瞬时变化率等无不包含着对极限思想的渗透和运用.

动态的描述性极限概念并不难掌握，但要真正理解极限概念往往需要人们在相当长的学习时间内（甚至要到学习微积分以后）反复体会才能深化认识.

【学习引导】

引导1　引例中刘徽的“割圆术”：割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣. 即圆的内接正多边形面积数列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$，当 $n\to\infty$ 时的极限值是圆的面积. 这表明这个数列极限是______（无限次，有限次）运算的结果，这个结果确确实实是可以实现的，是客观存在的.

引导2　数列极限定义中“$n\to\infty$ 时，x_n 无限接近于某个确定的常数 a”，表明 a 是一个确定的常数，它不受变量 n，x_n 的影响和制约；x_n 无限接近于 a，即 x_n 与 a 的距离 $|x_n-a|$，在 $n\to\infty$ 时无限接近于 0.

$2+\dfrac{1}{n}$ 随着 n 的增大，越来越接近 0，但不是无限接近 0. 所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}(2+\dfrac{1}{n})\neq 0$.

引导3　通过观察数列的有限项或通项，我们可以归类得到：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=$____，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=$____，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=$____，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=$____，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)=$____，

（注意：$n\to\infty$ 时，这是无限项的和，我们不会求. 只能将其分子先求和，合并化简后，再求极限.）

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=$____，$(\alpha>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$____.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=$____，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4^n}=$____，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=$____，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=$____，$|q|<1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}3=3$，常数函数的极限等于它本身.

说明：这是需要掌握的三类极限，后面我们要以此为基础，根据运算法则，计算出更多数列的极限.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}[1+(-1)^n]$ 不存在.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}3^n$ 不存在.

引导4　收敛数列的有界性“收敛数列必有界”的逆否命题“**无界数列必发散**”为真；逆命题“有界数列必收敛”不真，如 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在. **数列有界是数列收敛的______而非________.**

引导5 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a(a>0)$，则存在正整数$N$，当$n>N$时，有$x_n>0$；但是即使对任何$n$，都有$x_n>0$，也得不到$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a(a>0)$的结论，如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

【学习拓展】

1. 能力发展

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

(2) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a(a\neq0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$；反之是否成立？

2. 认识提升

极限是现代数学的一个基本概念，是高等数学与初等数学的分水岭，也是一种重要的数学思想方法. 掌握极限的概念不仅是学习微积分的基础，而且对了解数学思想、追求数学严密性具有重要意义.

建立正确的极限概念，要有全面的、客观的和辩证的无穷观. 自然数列具有二重性：内蕴性和排序性. 内蕴性是指自然数列所具有的内在性质（如数论和代数研究的大部分内容），内蕴性是研究不完的. 从这个角度看自然数列，它永远处在不断构造的进程中，可不断延伸而永无尽头，在哲学上称为“潜无限”；排序性是自然数列的整体性质，微积分中所处理的如数列极限、上、下确界、实数的无穷小展开式、抽取子列等，无不以排序性的整体把握为基础. 从排序性看，必须把自然数看作完成了的无限过程，看作一个整体、一个对象，看作“实无限”，是“从延伸到穷竭的产物”. 内蕴性是潜藏于自然数列中的“微观属性”，排序性则是它显示的“宏观属性”. 因为它兼有上述两重属性，从而能有两种形式上对立而相合的模式，所以自然数列本质上是一种“双相无限结构”. 当研究数论时，应当是潜无穷论者；当承认无穷集合 **N**，**Q** 等时，应当是一个实无穷论者；当研究诸如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$时，应当是一个双相无穷论者，因为“$n\to\infty$”既包含潜无限性质，又包含实无限性质，它在本质上具有双相无限性，而这里的极限0确实达到了，这里确确实实是一个精确的等式.

极限概念包括两层含义. 首先，极限是一个无穷过程，一种变化趋势. 这是从微观、从分析角度，从过程去理解，如：$\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$表示当$n$无限增大时，$(-1)^n\frac{1}{n}$的值无限接近于0. 其次，极限是一种运算结果，或者说是一个值（包括数值、函数等），求极限是一种定义在函数（包括数列）上的一元运算，这是从宏观的、从代数角度去理解，如：$\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$表示$\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$是一个值，它是0. 求导数、求积分也是这个意义下的极限. 以上两方面分别对应潜无限与它的实无限两种观点，可以说，极限本身是一个包含实无限与潜无限的辩证统

一，也是一个用静态去表示动态的辩证过程，它具有高度抽象性，而且包含着认知、思维、运算、哲学等多方面因素.

极限思想是研究变量在无限变化中的变化趋势，本质上是通过对变化过程中量的分析来把握变化过程质的结果，是用无限逼近的方式从有限认识无限，从量变认识质变，用近似认识精确的辩证思想. 有限与无限的辩证统一是微积分的灵魂，它贯穿微积分的始终，使微积分越来越深入.

参考解答

(1) **证明**　当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，根据定义有 $n\to\infty$ 时，x_n 无限接近于 0，即 $|x_n-0| = |x_n|$ 无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$；当 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$，有 $|x_n| = |x_n-0|$ 无限接近于 0，即 x_n 无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$.

(2) **证明**　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(a\neq 0)$，则 $n\to\infty$ 时，x_n 无限接近于 a，即 $|x_n - a|$ 无限接近于 0，而 $\left||x_n| - |a|\right| \leqslant |x_n - a|$，从而 $\left||x_n| - |a|\right|$ 无限接近于 0，即 $|x_n|$ 无限接近于 $|a|$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

反之，不成立. 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} |(-1)^n| = 1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

猜想：如果 $\{x_n\}$ 不变号，结论是否成立.

【收获与认识】

第三节　函数的极限【学案】

【学习目标】

1. 理解函数极限的六个概念，能根据函数的表达式或函数图像直观确定较简单函数的极限.

2. 理解函数极限与两个单侧极限的关系，掌握极限存在的充要条件.

3. 掌握函数极限的性质：唯一性、局部有界性、局部保号性.

4. 认识到函数极限研究的是与极限过程有关的函数局部变化的性质.

【重、难点】 函数极限的概念和性质. 极限概念的理解.

【学习准备】

阅读教材，对六个函数极限有初步的印象，为课堂学习做好准备，避免课堂上 7 个定义（多）、3 个结论、3 个性质的大容量而造成记忆和理解的困难.

【数学思考】

问题 1　你对极限过程 $x\to x_0$ 是如何理解的？

参考：x_0 是确定的一个实数点，$x\to x_0$（x 趋于 x_0）是自变量 x 无限接近但不等于 x_0. $x\to x_0^-$ 是自变量 x 从 x_0 左侧无限接近但不等于 x_0，$x\to x_0^+$ 是自变量 x 从 x_0 右侧无限接近但不等于 x_0. 所以极限过程 $x\to x_0$ 包含 $x\to x_0^-$ 与 $x\to x_0^+$ 两个极限过程. 有的函数，特别是分段函数，在 x_0 两侧的表达式不同（变化趋势不同），不能统一分析，只能分开考察.

$x\to\infty$（x 趋于∞）是自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，它可以是 $x\to+\infty$，即自变量 x 取正值无限增大；也可以是 $x\to-\infty$，即自变量 x 取负值无限减小（即 $|x|=-x$ 无限增大）还可能有其他形式，我们的课程中不涉及.

问题 2　你对极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是如何理解的?

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是函数在 x_0 附近的变化趋势，它与函数在点 x_0 有无定义，有定义时函数值 $f(x_0)$ 是多少没有关系. 但随着以后的学习我们知道，我们所研究的函数多是初等函数，初等函数在其定义域内都连续即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；如果不是初等函数就不一定有这个结论了.

问题 3　你对水平渐近线是怎么认识的?

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的几何意义为直线 $y=A$ 是函数 $y=f(x)$ 的图像的一条水平渐近线. 例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，说明直线 $y=0$（x 轴）是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的水平渐近线. 再如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，说明直线 $y=\frac{\pi}{2}$ 是反正切函数的一条水平渐近线. 但并不表明函数不能穿越渐近线，只是说明 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-A|=0$ 罢了. 例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，但 $\frac{\sin x}{x}$ 的符号不是一成不变的.

你能用绘图软件画出（或从网络上下载）函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的图像吗? 请粘贴在下方.

问题 4　函数极限的充要条件有什么用途?

函数在某点（∞ 称为无穷远点）处的极限存在需要其两个单侧极限都存在且相等；这个定理有两个用途，一是利用单侧极限求极限；二是利用单侧极限不存在或存在但不相等判断函数无极限.

问题 5　函数的极限描述的是函数的局部性质还是整体性质?

函数的极限是函数在某点（∞ 称为无穷远点）处的变化趋势，所以函数极限的性质也只是函数在某点（∞ 称为无穷远点）处附近的性质，至于函数在其他部

分是怎样的，函数极限并不能告诉我们．所以函数在某点有极限只能是在这点局部有界，局部保号．

问题 6　基本初等函数的极限怎么求？

结论：基本初等函数在某点的极限，等于函数在该点的函数值（区间端点处的极限是单侧极限）．将基本初等函数求极限的无限运算转变成初等运算，解决了基本初等函数求极限的问题．初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合而成的，所以，这个定理引出了下节的基本内容．

【归纳总结】

1．自变量 $x \to x_0$ 时函数的极限：____________________.

自变量 $x \to x_0^-$ 时函数的极限：____________________.

自变量 $x \to x_0^+$ 时函数的极限：____________________.

定理 1　两个单侧极限的关系：____________________.

2．自变量 $x \to \infty$ 时函数的极限：____________________.

自变量 $x \to -\infty$ 时函数的极限：____________________.

自变量 $x \to +\infty$ 时函数的极限：____________________.

定理 2　两个极限的关系：____________________.

3．极限的性质

自变量六种变化情形下，函数极限的唯一性、局部有界性、局部保号性.

【学习拓展】

下列极限是否存在，如果存在将其求出.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} |x|$.　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$.　(3) $\lim\limits_{x \to x_0} [x]$.　(4) $\lim\limits_{x \to x_0} \{x\}$.

观察法求函数极限.

参考解答　可以先画出这四个函数的图像，看着图像求极限既方便又不容易出错.

(1) 因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$，$\lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$，由于 $1 \neq -1$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在.

(3) 当 x_0 为整数时，$\lim\limits_{x \to x_0^-} [x] = x_0 - 1$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} [x] = x_0$，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} [x]$ 不存在；当 x_0 不是整数时，$\lim\limits_{x \to x_0} [x] = [x_0]$.

(4) 当 x_0 为整数时，$\lim\limits_{x \to x_0^-} \{x\} = \lim\limits_{x \to x_0^-} (x - [x]) = x_0 - (x_0 - 1) = 1$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} \{x\} = \lim\limits_{x \to x_0^+} (x - [x]) = \lim\limits_{x \to x_0^+} (x_0 - x_0) = 0$，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} \{x\}$ 不存在；当 x_0 不是整数时，$\lim\limits_{x \to x_0} \{x\} = \lim\limits_{x \to x_0} (x - [x]) = x_0 - [x_0]$.

【收获与认识】

第四节 极限的运算法则【学案】

【学习目标】

1. 掌握无穷小与无穷大的概念、理解无穷小与无穷大的关系，并能互相转化.
2. 掌握无穷小的性质，能够用无穷小的性质求解一些简单函数的极限.
3. 掌握极限的运算法则，明确其适用的条件.

【重、难点】无穷小的性质、极限的运算法则. 看清具体函数的结构，利用对应法则求出函数极限.

具体函数的搭配往往分不清楚，而不能正确应用定理.

【学习准备】

1. 了解学习极限运算法则的必要性.
2. 了解本节先处理无穷小的思路或方法.

本节教材先介绍无穷小的知识，有三个理由，一是本节极限的运算法则是用无穷小的知识来证明的；二是无穷小是应用最多的一种极限类型；三是以 A 为极限的函数与无穷小等价，都可以转化为无穷小来处理. 所以从无穷小开始研究具有普遍性.

本节有无穷小、无穷大两个定义，关于无穷小的 7 个性质或结论，两个极限的运算法则. 还要应用法则求函数极限的多种类型：$x \to x_0$ 时，有理分式函数的 3 种情况，$x \to \infty$ 时，有理分式函数的 3 种情况. 变量代换的方法，分子或分母有理化的方法. 内容较多，如果课下没有了解，课上压力会较大.

【数学思考】

问题 1 举出你学过的无穷小、无穷大的数列或函数的例子.

问题 2 很小的数是否为无穷小?

0 是否为无穷小?

很大的数是否为无穷大?

无界函数是否为无穷大?

问题 3 无穷小与无穷大的关系如何?

问题 4 无穷小与无穷小的商是否为无穷小?

问题 5 无穷小与无穷大的积是否为无穷小?