



高等数学

练习与测试(上)

(第二版)

南京工业大学数学系 ▶ 编



苏州大学出版社
Soochow University Press

高等数学练习与测试(上)

(第二版)

南京工业大学数学系 编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学练习与测试·上/南京工业大学数学系编
·—2版·—苏州:苏州大学出版社,2018.8
ISBN 978-7-5672-2581-7

I. ①高… II. ①南… III. ①高等数学—高等学校—
习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 184125 号

高等数学练习与测试(上)
南京工业大学数学系 编
责任编辑 征 慧

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市十梓街1号 邮编:215006)

苏州工业园区美柯乐制版印务有限责任公司印装

(地址:苏州工业园区东兴路7-1 邮编:215021)

开本 787 mm×1 092 mm 1/16 印张 15.25 字数 380 千

2018年8月第2版 2018年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5672-2581-7 定价:32.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换

苏州大学出版社营销部 电话:0512-67481020

苏州大学出版社网址 <http://www.sudapress.com>

前 言

要学好高等数学,总离不开解题,学生通过解题能加深对所学课程内容的理解,能熟练掌握运算方法和解题技巧,还能培养分析问题和解决问题的能力.因此,如何帮助学生提高解题能力,是当前高等数学课程教学改革的一项重要任务.

为了帮助学生更好地完成作业,并能比较系统地复习、巩固所学知识,我们组织部分教师针对高等数学课程的特点,编写了这本《高等数学练习与测试(上)》.全书共分六章内容.一般每节内容包括基础题和提高题,基础题部分绝大多数学生都会做,提高题供学有余力的学生练习.每章还配备了自我测试题,起到检查督促作用.

考虑到不同专业对高等数学的学习要求不同,以及部分学生将来考研的需要,每章设置了重点与难点分析,随后还配备了一些综合题,供学有余力的学生选做.另外,书中还增加了期中与期末模拟试卷以及近几年的期末真题,便于学生自测.书末还附有参考答案.

本书是在多年使用讲义的基础上修改而成的,是多位教师共同努力的结晶.本书的编写人员有马树建、许丙胜、赵剑、焦军彩、李金凤、张国娟、张小平、左永生、刘浩等,全书由许丙胜负责统稿.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误和不当之处在所难免,敬请广大读者批评指正.

编写组

2018年8月

目 录

第 0 章 预备知识

| | |
|-----------------|---|
| § 0-2 函 数 | 1 |
|-----------------|---|

第 1 章 极限与连续函数

| | |
|-------------------------------|----|
| § 1-1、§ 1-2 数列的极限 函数的极限 | 3 |
| § 1-3 极限运算法则 | 7 |
| § 1-4 极限存在准则 两个重要极限 | 9 |
| § 1-5 无穷小的比较 | 11 |
| § 1-6 函数的连续性 | 15 |
| (一) 连续性与间断点 | 15 |
| (二) 连续函数的运算与初等函数的连续性 | 17 |
| (三) 闭区间上连续函数的性质 | 21 |
| 自我测试题 | 23 |
| 重点与难点分析 | 25 |
| 参考答案 | 31 |

第 2 章 导数与微分

| | |
|--------------------------------------|----|
| § 2-1 导数的概念 | 35 |
| § 2-2 函数求导法则 | 37 |
| § 2-3 高阶导数 | 41 |
| § 2-4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率 | 43 |
| § 2-5 函数的微分 | 45 |
| 自我测试题 | 47 |
| 重点与难点分析 | 49 |
| 参考答案 | 53 |

第 3 章 微分中值定理及导数的应用

| | |
|---------------------------|----|
| § 3-1 微分中值定理 | 55 |
| § 3-2 洛必达法则 | 59 |
| § 3-3 泰勒公式 | 61 |
| § 3-4 函数的单调性与曲线的凹凸性 | 63 |
| § 3-5 函数的极值与最值 | 67 |
| § 3-6 函数图形的描绘与曲率 | 71 |

| | |
|---------------------------------------|-----|
| 自我测试题 | 73 |
| 重点与难点分析 | 75 |
| 参考答案 | 83 |
| 期中模拟试卷一 | 85 |
| 期中模拟试卷二 | 91 |
| 期中模拟试卷三 | 95 |
| 参考答案 | 99 |
| 第 4 章 不定积分 | |
| § 4-1 不定积分的概念与性质 | 101 |
| § 4-2 换元积分法 | 103 |
| § 4-3 分部积分法 | 107 |
| § 4-4 有理函数的积分 | 109 |
| 自我测试题 | 111 |
| 重点与难点分析 | 113 |
| 参考答案 | 119 |
| 第 5 章 定积分 | |
| § 5-1 定积分的概念与性质 | 121 |
| § 5-2 微积分基本公式 | 123 |
| § 5-3 定积分的换元积分法和分部积分法 | 127 |
| § 5-4 反常积分与 Γ 函数 | 133 |
| 自我测试题 | 135 |
| 重点与难点分析 | 137 |
| 参考答案 | 141 |
| 第 6 章 定积分的应用 | |
| § 6-1、§ 6-2 定积分的微元法 定积分在几何学上的应用 | 143 |
| § 6-3 定积分在物理学上的应用 | 149 |
| 自我测试题 | 153 |
| 重点与难点分析 | 155 |
| 参考答案 | 163 |
| 第 7 章 微分方程 | |
| § 7-1 微分方程的基本概念 | 165 |
| § 7-2 可分离变量的微分方程 | 167 |
| (一) 可分离变量的微分方程 | 167 |
| (二) 齐次方程 | 169 |
| § 7-3 一阶线性微分方程 | 171 |
| § 7-5 可降阶的高阶微分方程 | 173 |
| § 7-6 高阶线性微分方程 | 175 |

| | |
|--------------------------|-----|
| § 7-7 常系数线性齐次微分方程 | 177 |
| § 7-8 常系数线性非齐次微分方程 | 179 |
| 自我测试题 | 181 |
| 重点与难点分析 | 183 |
| 参考答案 | 189 |
| 期末模拟试卷一 | 191 |
| 期末模拟试卷二 | 195 |
| 期末模拟试卷三 | 199 |
| 期末模拟试卷四 | 203 |
| 期末模拟试卷五 | 207 |
| 期末真题一 | 211 |
| 期末真题二 | 215 |
| 期末真题三 | 219 |
| 期末真题四 | 223 |
| 参考答案 | 227 |

第 0 章 预备知识

§ 0-2 函 数

基础题

1. 判断下列函数是否为同一函数:

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x$;

(2) $f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 问: $f(x+a) + f(x-a) (a > 0)$ 的定义域是什么?

3. 证明:任意一个定义在关于原点对称的集合 D 上的函数都可以唯一地表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

4. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$.

第 1 章 极限与连续函数

§ 1-1、§ 1-2 数列的极限 函数的极限

基础题

1. 用数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1.$$

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 数列 $\{|x_n|\}$ 的极限存在, 但数列 $\{x_n\}$ 的极限却不一定存在.

3. 用函数极限的定义证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12;$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4;$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$

4. 求 $f(x) = \frac{x}{x}, g(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并判断它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

5. 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 试举例说明.

6. 证明: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\sin\sqrt{x}$ 没有极限.

7. 判断并证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是否无界; 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是否为无穷大.

§ 1-3 极限运算法则**基础题**

计算下列极限:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3}$.

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x + 1}{5x^2 + 2x - 3}$.

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$.

§ 1-4 极限存在准则 两个重要极限

基础题

1. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$ (x 为非零常数);

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{kx}$ (k 为正整数);

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

2. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

提高题

1. 求下列极限:

(1)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$$

(2)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x};$$

(3)
$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}};$$

(4)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

2. 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n} (n=1,2,3,\dots)$. (1) 试证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在; (2) 求此数列的极限.