基于可靠性的
交通网络建模与算法

Reliability-based transportation network modeling and algorithms

邵 虎 吴 婷 著

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

基于可靠性的交通网络建模与算法

邵　虎　吴　婷　著

中国矿业大学出版社

内容提要

本书探讨了基于可靠性的交通网络建模与算法部分较新的研究成果，具体包括求解结构型变分不等式的非精确增广拉格朗日 LQP 方法、需求变动驱使的基于出行时间可靠性的用户平衡交通配流问题、基于出行时间可靠性的多用户类随机交通配流模型、一类广义的基于出行时间可靠性的随机交通配流模型、不确定性条件下随机 OD 需求矩阵和协方差估计、不确定条件下可靠路径搜索算法、基于迭代子空间的模式搜索算法。本书可以作为高等院校及研究所的硕士、博士研究生学习交通网络可靠性的教材，也可以作为交通规划与交通工程实践者的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

基于可靠性的交通网络建模与算法 / 邵虎，吴婷著.
—徐州：中国矿业大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-5646-2824-6

Ⅰ.①基… Ⅱ.①邵… ②吴… Ⅲ.①交通网—系统建模②交通网—系统最优化—最优设计—算法 Ⅳ.①U491.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 214080 号

书　　名　基于可靠性的交通网络建模与算法
著　　者　邵　虎　吴　婷
责任编辑　张　岩　耿东锋
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　江苏徐州新华印刷厂
开　　本　850×1168　1/32　**印张** 7.875　**字数** 205 千字
版次印次　2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　30.00 元
(图书出现印装质量问题，本社负责调换)

前　言

传统的交通网络建模与算法研究，都是基于名义上的“典型”的或“理想”的交通状况下的分析，即系统中交通网络的需求和供给都是确定的，很少关注其中的不确定性因素。但是，在现实生活中，受到各种复杂因素的干扰，交通需求和供给中都存在很多不确定性因素，例如地质灾害、恶劣天气、交通事故、设备故障、重大事件等。在这种情况下，交通网络的可靠性突显重要。鉴于此，本书通过理论分析的方法，研究基于可靠性的交通网络建模与算法。

交通网络的可靠性具有不同于其他工程领域可靠性的特点。可靠性研究是工程学科研究领域中一个比较成熟的课题，相关的研究常见于通信网络或者计算机网络的设计中。由于交通网络系统中有人的出行行为(网络使用者或者出行者)，因此交通网络可靠性的研究比其他网络可靠性的研究复杂。例如，受到很多因素的干扰，出行者的出行时间增加了，道路设施的通行能力降低了，进而使出行者无法准时到达目的地。在这种情况下，出行者会表现出一种基于可靠性的交通出行行为，传统的交通模型并不能描述这些交通行为。本书探讨了基于可靠性的交通网络建模与算法部分较新的研究成果，具体包括求解结构型变分不等式的非精确增广拉格朗日 LQP 方法、需求变动驱使的基于出行时间可靠性的用户平衡交通配流问题、基于出行时间可靠性的多用户

类随机交通配流模型、一类广义的基于出行时间可靠性的随机交通配流模型、不确定性条件下随机 OD 需求矩阵和协方差估计、不确定条件下可靠路径搜索算法、基于迭代子空间的模式搜索算法。本书可以作为高等院校及研究所的硕士、博士研究生学习交通网络可靠性的教材，也可以作为交通规划与交通工程实践者的参考资料。

从专著的选题、资料的收集到专著的撰写过程中，作者得到了许多专家的帮助和支持，在此表示真诚的感谢。他们是香港理工大学 William H. K. Lam 教授，南京大学何炳生教授，北京航空航天大学黄海军教授，北京交通大学高自友教授，美国犹他州立大学 Anthony Chen 教授，南京大学周晶教授，同济大学张小宁教授，香港理工大学 Agachai Sumalee 博士、Mei Lam Tam 博士和新加坡国立大学的孟强博士，东南大学李敏教授等。

需要特别感谢沈良同学在本书资料收集、文字校对等方面所做的认真细致的工作，此外，还要感谢赵见、付强、徐小拼、赵甜甜、周正梅、王钰、杨秀丽、夏曼曼、李小静等同学为本书的出版提供的帮助。

最后，感谢如下项目对本书出版的资助：中国矿业大学基础与新兴学科建设项目（编号：04209，名称：数学学科梯队和高水平成果建设），国家自然科学基金项目（编号：71271205，71201080，71571096，71371175），中国矿业大学青年科技基金项目（编号：2012QNA44），江苏省青蓝工程优秀青年骨干教师培养对象项目，中国矿业大学青年学术带头人培养对象项目，中国博士后科学基金项目（编号：2012M511256，2013T60526），江苏省社会科学基金项目（编号：14GLC001）。

著　者

2015 年 5 月

目　录

1　绪论 ………………………………………………………… 1
1.1　变分不等式的定义 ……………………………………… 1
1.2　变分不等式的基本理论 ………………………………… 2
1.3　单调性变分不等式的求解方法 ………………………… 5
1.4　变分不等式的应用 ……………………………………… 9
1.5　交通配流模型 …………………………………………… 10
1.6　基于可靠性的交通配流模型 …………………………… 15

2　求解结构型变分不等式的
非精确增广拉格朗日 LQP 方法 ………………………………… 20
2.1　本章内容简介 …………………………………………… 21
2.2　所提出方法的一般结构 ………………………………… 24
2.3　收缩性质 ………………………………………………… 28
2.4　收敛性 …………………………………………………… 36

2.5 数值实验 …… 38
2.6 结论 …… 44

3 需求变动驱使的基于出行时间可靠性的用户平衡交通配流问题 …… 45
3.1 本章内容简介 …… 46
3.2 模型建立 …… 48
3.3 求解算法 …… 54
3.4 数值算例 …… 55
3.5 结论 …… 63

4 基于出行时间可靠性的多用户类随机交通配流模型 …… 65
4.1 本章内容简介 …… 65
4.2 符号和定义 …… 68
4.3 RSUE 条件和相关的变分不等式模型 …… 71
4.4 求解算法 …… 74
4.5 数值算例 …… 77
4.6 结论 …… 84

5 一类广义的基于出行时间可靠性的随机交通配流模型 …… 85
5.1 本章内容简介 …… 86
5.2 模型建立 …… 88
5.3 求解算法 …… 106

5.4　数值算例 …………………………………………………… 107
5.5　结论 ………………………………………………………… 117

6　不确定性条件下随机 OD 需求矩阵和协方差估计 ……… 119
6.1　本章内容简介 ……………………………………………… 119
6.2　模型建立 …………………………………………………… 125
6.3　求解算法 …………………………………………………… 140
6.4　数值算例 …………………………………………………… 143
6.5　结论 ………………………………………………………… 166

7　不确定条件下可靠路径搜索算法 …………………………… 168
7.1　网络 K 短路完善算法……………………………………… 168
7.2　基于 K 短路的可靠路径搜索局部最优算法……… 181
7.3　基于回溯思想的可靠路径搜索全局最优算法 …… 191

8　基于迭代子空间的模式搜索算法 …………………………… 202
8.1　本章内容简介 ……………………………………………… 202
8.2　一般的模式搜索方法 ……………………………………… 204
8.3　迭代子空间方法 …………………………………………… 206
8.4　算法框架 …………………………………………………… 207
8.5　数值实验 …………………………………………………… 212
8.6　结论 ………………………………………………………… 216

参考文献 ………………………………………………………… 217

1 绪　论

在这一章中,根据文章中的一些内容给出了一些预备知识。首先,给出了变分不等式的定义和一些基础理论。在本节中,简单综述了几种主要的变分不等式的单调性。变分不等式在现实中有着广泛的应用,在交通领域中,一些交通配流问题通常可以转化成变分不等式问题,进而进行求解。因此,后面主要讨论了两种主要的交通配流模型以及转化成的变分不等式。研究交通配流问题可以发现,基于可靠性的交通配流问题在最近几年得到了更多的关注,后面将给出一些简要的介绍。最后,给出这本书的组成部分。

1.1 变分不等式的定义

定义 1.1.1 设 Ω 为 n 维欧式空间 $\mathfrak{R}^n$ 中的非空闭凸集,映射 $F:\mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$,则变分不等式问题 $VI(\Omega,F)$ 是求满足下列条件的向

量 $x^* \in \Omega$，使得

$$F(x^*)^{\mathrm{T}}(x-x^*) \geqslant 0, \forall x \in \Omega \tag{1.1}$$

众所周知，这个问题是由 STAMPACCHIA(1964)在 1964 年首次提出的，而且在金融学、数学规划、网络经济学、交通研究、博弈理论和区域科学等几个不相关领域都扮演着非常重要的角色(FERRIS and PANG，1997；HARKER and PANG，1990；NOOR，1997；PANG，1994)。

当可行集 Ω 在 $\Re^n$ 上为非负象限时，变分不等式 $VI(\Omega,F)$ 可以变成互补问题，即找到 $x^* \in \Omega$，使得

$$x^* \geqslant 0, F(x^*) \geqslant 0, F(x^*)^{\mathrm{T}} x^* = 0 \tag{1.2}$$

1.2 变分不等式的基本理论

1.2.1 单调性

定义 1.2.1 映射 $F: \Re^n \to \Re^n$，有

(1) 若 $(F(x)-F(y))^{\mathrm{T}}(x-y) \geqslant 0, \forall x, y \in \Omega$ (1.3)

则称 F 在可行集 Ω 上是单调的。

(2) 若 $F(y)^{\mathrm{T}}(x-y) \geqslant 0$ 意味着

$$F(x)^{\mathrm{T}}(x-y) \geqslant 0, \forall x, y \in \Omega \tag{1.4}$$

则称 F 在可行集 Ω 上是伪单调的。

(3) 若 $(F(x)-F(y))^{\mathrm{T}}(x-y) > 0, \forall x, y \in \Omega, x \neq y$ (1.5)

则称 F 在可行集 Ω 上是严格单调的。

(4) 若存在一个系数$\partial>0$,使得

$$(F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\geqslant\partial\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega \tag{1.6}$$

则称 F 在可行集 Ω 上是强单调。

(5) 若存在一个向量 $\boldsymbol{x}^0\in\Omega$,使得

$$\lim_{x\in\Omega,\|x\|\to\infty}\frac{F(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)}{\|\boldsymbol{x}\|}=\infty \tag{1.7}$$

其中$\|\cdot\|$表示 $\Re^n$ 中任意一个向量范数,F 在可行集 Ω 上是强制单调。

性质 1.2.1　设 Ω 为 n 维欧式空间 $\Re^n$ 中的非空闭凸集。如果 F 在可行集 Ω 上是连续可微的,而且雅可比矩阵$\nabla F(\boldsymbol{x})$(不需要对称)是半正定(正定)的,则 F 是单调的(严格单调)。

1.2.2　投影映射

定义 1.2.2　设 Ω 为 n 维欧式空间 $\Re^n$ 中的非空闭凸集,且 Ω 是 $n\times n$ 的对称正定矩阵。对给定的 $y\in\Re^n$,则问题

$$\min\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_G\,|\,\boldsymbol{x}\in\Omega\} \tag{1.8}$$

的解叫做 $\boldsymbol{y}$ 到 Ω 上的 G 范数投影,记作 $P_{\Omega,G}(\boldsymbol{y})$。

其中$\|\boldsymbol{x}\|_G=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{x})^{1/2}$表示 n 维欧式空间 $\Re^n$ 中的 G 范数向量 $\boldsymbol{x}$。$\boldsymbol{y}$ 到 Ω 上的 G 范数投影也可以写成如下的形式:

$$P_{\Omega,G}(\boldsymbol{y})=\arg\min\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_G\,|\,\boldsymbol{x}\in\Omega\} \tag{1.9}$$

为简单起见,得 $P_{\Omega,I}(\boldsymbol{y}):=P_\Omega(\boldsymbol{y})$。

命题 1.2.1　当且仅当:

$$e(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*-P_\Omega[\boldsymbol{x}^*-\beta F(\boldsymbol{x}^*)]=0 \tag{1.10}$$

可以得到 $\boldsymbol{x}^*$ 是变分不等式 $VI(\Omega,F)$的解。其中 $e(\cdot)$叫作投影方程,β 可以是任意正实参数。

1.2.3 变分不等式的存在性和唯一性

定理 1.2.1 设 Ω 为 n 维欧式空间 $\Re^n$ 中的非空紧凸集，F 是一个从 Ω 到 $\Re^n$ 的连续映射，则变分不等式 $VI(\Omega,F)$ 至少存在一个解。

命题 1.2.2 如果映射 F 在可行集 Ω 上是严格单调的，那么变分不等式问题 $VI(\Omega,F)$ 至多有一个解决方案。

推论 1.2.1 设 Ω 为 n 维欧式空间 $\Re^n$ 中的非空紧凸集，F 是一个从 Ω 到 $\Re^n$ 的连续映射。如果 F 是关于 Ω 的强单调映射，则变分不等式问题 $VI(\Omega,F)$ 存在唯一解。

关于存在性和唯一性条件的详细内容可以在相关文献(EAVES，1971；HARTMAN and STAMPACCHIA，1966)中查阅。

1.2.4 特殊形式的变分不等式

定义 1.2.3 设 $F(\boldsymbol{x})$ 是一个仿射映射，如果对于一些给定的矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}\in\Re^{n\times n})$ 和向量 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}\in\Re^n)$ 可以得到 $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}$，那么就可以把变分不等式问题称为线性的变分不等式问题。

不同于一般的变分不等式，线性变分不等式由于其特殊的结构，许多现有的研究已经得到一些特殊的方法去解决这类问题。

定义 1.2.4 当可行集 Ω 表示成如下的集合形式，即

$$\Omega=\{\boldsymbol{x}\in\Re^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\} \tag{1.11}$$

则把变分不等式问题($VI(\Omega,F)$)称为结构型变分不等式($SVI(\Omega,F)$)。

结构型变分不等式在交通研究领域有很多应用。因此，这种

变分不等式的求解算法在过去几年得到了广泛的关注(HE et al.,2000;HE and ZHOU,2000;HE et al.,2002)。

1.3 单调性变分不等式的求解方法

在本节中,对一些现有的解决单调变分不等式的方法进行了综述。在现有的研究基础之上,介绍了一类增广拉格朗日对数—平方函数邻近点(简称 LQP)方法。

本节介绍的方法有两个共同的特征。第一,这些方法的实现都需要有效地计算闭凸集 Ω 上的投影。第二,这些方法不需要使用到 F 的导数,而且除了 Ω 上的投影不涉及任何复杂的计算。一方面,当投影是很容易通过计算得到时,那么第二个特征会使得这些方法变得极其简单。另一方面,无导数信息的使用在某些情况下可能会使这些方法变慢。然而,应该指出的是"没有导数信息"功能意味着只有函数值需要去评估,这可能会使得算法更适应于实际情况。在现实中,我们可能会遇到变分不等式问题,但是我们可能不会知道导数信息,甚至不知道映射 F 的闭集形式(MENG et al.,2005; YANG and HUANG,2005)。在这种情况下,基于投影的方法是可以完成的。

1.3.1 外梯度算法

外梯度算法是由 KORPELECH(1976)提出的,它可以被看成是预测校正方法。在预测步骤使用显式方法,在校正步骤使用

隐式方法。外梯度方法的整个步骤流程如下：

第一步：令 $k=0$，且 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega, \beta>0$。

第二步：如果 $e(\boldsymbol{x}^k)=0$，则停止运算。否则，执行第三步。

第三步：计算：

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{k+1}=P_\Omega[\boldsymbol{x}^k-\beta F(\boldsymbol{x}^k)] \tag{1.12}$$

（预测步骤）

$$\boldsymbol{x}^{k+1}=P_\Omega[\boldsymbol{x}^k-\beta F(\tilde{\boldsymbol{x}}^{k+1})] \tag{1.13}$$

（校正步骤）

然后令 $k=k+1$，执行第二步。

外梯度函数的收敛性是由函数 F 满足利普希茨连续所保证的。外梯度方法得名于在每次迭代过程中，函数 F 的额外的函数计算（额外的投影）（FACCHINEI and PANG，2003）。

1.3.2 Tikhonov 正则化算法

当原始的变分不等式问题很难解决的时候，我们有一个最基本的解决变分不等式问题的方法，就是通过一系列其他的问题来替换变分不等式问题。在某种意义上，这可能会得到更好的结果。实现这种想法的一个典型方法就是 Tikhonov 正则化算法（FACCHINEI and KANZOW，1999；NDRAN and GOWDA，2000；TIKHONOV，1963），它应用 Tikhonov 正则化问题去解决变分不等式问题。变分不等式问题的正则化过程可以被表示为一系列被摄动的子变分不等式的求解。

$$(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(F(\boldsymbol{x})+\varepsilon_k \boldsymbol{I}\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ \forall\, \boldsymbol{x}' \in \Omega \quad \varepsilon_k \to 0 \tag{1.14}$$

Tikhonov 正则化算法存在一个潜在的计算缺点，那就是当 ε_k 趋向于零时，摄动问题接近原始问题，使得问题变得更加难以解

决。关于 Tikhonov 正则化算法的详细内容可以参考相关文献(FACCHINEI and PANG, 2003)。

1.3.3 邻近点算法

邻近点算法是由 MARTINET(1970)提出的用于解决变分不等式问题的算法。当时算法的提出是试图缓解在使用 Tikhonov 正则化算法时的一些难点,也就是想去逐步解决越来越多的病态问题。大致说,邻近点算法和 Tikhonov 正则化算法相似,都需要解决一系列的子问题。对于给定的 $\boldsymbol{x}_k>0$,

$$(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\beta_k F(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k))\geqslant 0 \quad \forall\, \boldsymbol{x}'\in\Omega \qquad (1.15)$$

注意到,在第 k 步中扰动函数是由 $\beta_k F(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k)$给定的,对于一些 $\beta_k>0$ 的情况,可以用 $\epsilon_k\to 0$ 进行代替。直观上可以看出,先前扰动的优势是如果序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$是收敛的,$\{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\}$趋近于零时仍然可以保持 β_k 有界,因此 β_k 不需要趋向于无穷。结果表明,我们可以保持扰动函数 $\beta_k F(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k)$的一致强单调性对于所有的 k 都是成立的,即使 F 只是单调的。事实证明,邻近点思想具有深远的应用价值和发展前景,并不仅仅是用于改进 Tikhonov 正则化算法。

1.3.4 拉格朗日对数—平方函数邻近点方法

邻近点算法广义上来看已经被线性项 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k$ 和一些非线性函数 $r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)$所替代。因此,一些“内点”邻近方法(AUSLENDER et al., 1991; AUSLENDER and TEBOULLE, 2000)引入了 Bregman 函数(AUSLENDER and HADDOU, 1995; CENSOR, 1994; ECKSTEIN, 1998)和熵的 φ—差异邻近项。鉴于此,我们

求解如下一系列子问题：

对于给定的 $\boldsymbol{x}^k$（k 是迭代步数），有

$$(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\{f(\boldsymbol{x})+r\nabla_x D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)\}\geqslant 0,\ \forall\, \boldsymbol{x}'\in\Omega \qquad (1.16)$$

其中

$$\nabla_x D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k)+\mu(\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{x}^{-1}) \qquad (1.17)$$

μ 是一个在(0,1)内的参数，$\boldsymbol{X}_k=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_1^k,\boldsymbol{x}_2^k,\cdots,\boldsymbol{x}_n^k)$，$\boldsymbol{x}^{-1}$ 是一个 n 维的向量并且它的第 j 个元素是 $1/x_j$。由于积分函数 $\nabla_x D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)$ 满足 $D(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{x}^k)=0$ 的式子为：

$$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k\|^2+\mu\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left((\boldsymbol{x}_j^k)^2\log\frac{\boldsymbol{x}_j^k}{\boldsymbol{x}_j}+\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j^k-(\boldsymbol{x}_j^k)^2\right), & \boldsymbol{x}\in R_{++}^n\\ +\infty, & \text{否则}\end{cases} \qquad (1.18)$$

式中 $D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)$ 包括拉格朗日对数项和平方函数项，这种方法就叫做拉格朗日对数—平方函数邻近点方法。很明显，可以发现在式(1.16)中 $\nabla_x D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)$ 的第一项是为了避免解太远离 $\boldsymbol{x}^k$，第二项是保证解是 R_+^n 的一个内点。因此，在第 k 次迭代中用拉格朗日对数—平方函数邻近点方法去求解式(1.16)等同于去求解下列非线性等式：

$$f(\boldsymbol{x})+r[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k)+\mu(\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{x}^{-1})]=0 \qquad (1.19)$$

我们把式(1.19)称为拉格朗日对数—平方函数邻近点非线性等式组。AUSLENDER 等(1991)指出，拉格朗日对数—平方函数邻近点系统有唯一的正解。

1.3.5 非精确的增广拉格朗日对数—平方函数邻近点方法

在拉格朗日对数—平方函数邻近点方法中，需要在每次迭代

过程中精确地求解 LQP 系统，实现起来非常耗时。为了克服这个困难，在第 2 章中提出了一类新的求解结构型变分不等式（见定义 1.2.4）的非精确的 LQP 方法。在这个方法中，每一步迭代的非线性方程组在给定的不精确准则下，只需要近似求解式（1.19）。在这种情况下，构造了一个新的可行集，这个可行集比原始的式（1.11）中的集合 Ω 有更简单的投影，并把拉格朗日乘子附加到等式约束 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中。因此，第 2 章中提出的方法称为非精确的增广拉格朗日对数—平方函数邻近点方法。

1.4 变分不等式的应用

自 1964 年变分不等式出现以来，在过去五十年的时间里变分不等式得到了越来越多人的关注。变分不等式的研究在数学规划领域已经发展成为一个具有丰富成果的研究方向。这些发展已经见证了变分不等式在工程学和经济学领域具有广泛的应用（BILLUPS and MURTY，2000；FERRIS et al.，2001；FERRIS and PANG，1997；PATRIKSSON，1999）。在后文中，我们重点关注变分不等式在交通规划工程的应用。交通配流在交通规划分析中是非常重要的一步，交通配流的基本目的是在交通需求、网络拓扑结构和路段阻抗函数给定的条件下找到路径或者路段流量。在后文中，将会介绍两个经典的交通配流模型，且这两个交通配流模型都可以转化成变分不等式问题。