

XINJIAOCAI GAOKAO FUXI JINGBIAN

浙江省基础教育  
课程教材开发研究中心

新教材 高考复习精编

# 数学

(文科版)

浙江教育出版社

G636.605  
33932

前言

# 新教材

## 高考复习精编

---

# 数学

## (文科版)

浙江省基础教育课程教材开发研究中心

浙江教育出版社

---

图书在版编目(CIP)数据

新教材高考复习精编·数学(文科版)/许芬英等编写. —杭州:浙江教育出版社,2004.1

ISBN 7-5338-5154-4

I.新... II.许... III.数学课—高中—升学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第119218号

---

**新教材高考复习精编·数学(文科版)**

《新教材高考复习精编》编写组

出版:浙江教育出版社

发行:浙江省新华书店

印刷:浙江印刷集团有限公司

开本:787×1092 1/16

印张:21

字数:415 000

版次:2004年1月第1版

印次:2004年1月第1次印刷

书号:ISBN 7-5338-5154-4/G·5124

定价:20.00元

版权所有 翻印必究

# 前言

WUQU

按照高考改革的新思路——以能力考核为主导,课程改革的新理念——促进学生的自主发展,复习应有新策略——突出重点、强调过程。为了帮助大家理解课程改革和高考改革的精神,把握好高三复习的内容、范围、要求以及难度。我们听取了部分师生的意见和建议,根据教育部 2002 年颁布的学科教学大纲以及按照教学大纲修订的教材,邀请我省部分特级教师以及多年在高三任教的骨干教师,编写了《新教材高考复习精编》丛书。

本丛书包括语文、数学、英语、理科综合(物理、化学、生物分册)、文科综合(政治、历史、地理分册)。

数学分册分单元按课时编写,每单元设[考点透视]栏目,每课时设[例题剖析]、[方法提炼]、[基础过关]和[能力迁移]四个栏目。

**[考点透视]** 阐述本单元内容在高考中的地位和要求,以及通过本单元学习应达到的知识、能力要求,应掌握的方法等。

**[例题剖析]** 精选新颖、典型的代表性例题 5 个。其中两个例题列出规范详解及评注,评注从规范解题、能力迁移,以及本题的引申、拓展、举一反三等方面加以点拨;后 3 个例题只放题目,供学生自主探索解答。

**[方法提炼]** 根据 5 个典型例题,归纳应用本节课内容可以解决的问题,以及应用本节课内容解决问题的常规思路、常用方法、技能技巧,注意事项等。

**[基础过关]** 精选 6 道有代表性的基础题。

**[能力迁移]** 精选 7 个可以用本节课所及内容和方法解决的代表性问题。

每章最后设置一份能力测试卷,书的最后还编制了与高考要求和难度相适应的模拟试卷。

本书的特点:重在突出一个“精”字,精要阐释学科的主干知识和能力考核的基本内容,阐明考点与能力训练的关键点,使复习更具有针对性;精选深剖重点问题及解决方法。所选例题的思维层次、解题方法都具有典型性;问题剖析简明扼要,击中要害,具有适切性。并从审题、分析、规范等角度评述解题的策略和方法具有实效性;精选的基础过关和能力迁移题,既考虑知识的覆盖面,又注重知识的综合和应用,并注意问题的新颖性、应用性、探索性、开放性和前瞻性。

参加本书编写的有特级教师王而冶、刘建永、赖忠华、李昌官、冯寅、朱恒元、占章根,高级教师郑日锋、许芬英。全书由占章根、许芬英统稿。

丛书凝聚着广大教师指导高考复习的精华,希望能为考生和教师提供有益的参考,并恳请大家在使用过程中多提宝贵意见,使之更臻完美。

浙江省基础教育课程教材开发研究中心

2003年10月

# 目 录

MUQU

第一章 集合与简易逻辑 .....	1
一、集合 .....	1
第1课时 集合的概念 .....	1
第2课时 集合的运算 .....	3
第3课时 含绝对值不等式及一元二次不等式的解法 .....	6
二、简易逻辑 .....	9
能力测试 .....	12
第二章 函数 .....	14
一、映射与函数 .....	14
第1课时 映射与函数 .....	14
第2课时 函数的定义域与值域 .....	17
第3课时 反函数 .....	19
二、函数的性质 .....	22
第1课时 函数的奇偶性与周期性 .....	23
第2课时 函数的单调性与对称性 .....	26
三、指数函数与对数函数 .....	29
第1课时 指数式、对数式 .....	30
第2课时 指数函数与对数函数 .....	32
四、函数的图象 .....	36
五、函数的最值及应用 .....	40
能力测试 .....	43
第三章 数列 .....	46
一、数列的基本概念 .....	46
二、等差、等比数列 .....	48
第1课时 等差、等比数列的通项、前 $n$ 项和及其性质 .....	49
第2课时 等差、等比数列的综合运用 .....	51
三、数列求和 .....	54
四、数列知识的实际应用 .....	56
五、归纳、猜想与证明 .....	60
能力测试 .....	63
第四章 三角函数 .....	66
一、任意角的三角函数 .....	66

第 1 课时	三角函数的概念	66
第 2 课时	同角三角函数的基本关系式	68
<b>二、</b>	<b>两角和与差的三角函数</b>	<b>71</b>
第 1 课时	基本公式	71
第 2 课时	三角函数式的求值问题	73
第 3 课时	三角函数式的化简与证明	76
<b>三、</b>	<b>三角函数的图象和性质</b>	<b>78</b>
第 1 课时	三角函数的图象和性质	78
第 2 课时	三角函数的最值(值域)问题	82
第 3 课时	三角函数的应用	84
	能力测试	88
<b>第五章</b>	<b>平面向量</b>	<b>90</b>
<b>一、</b>	<b>向量及其运算</b>	<b>90</b>
第 1 课时	向量、向量的加减法和实数与向量的积	90
第 2 课时	平面向量的坐标运算和线段的定比分点	93
第 3 课时	平面向量的数量积和平移	95
<b>二、</b>	<b>解斜三角形</b>	<b>98</b>
	能力测试	101
<b>第六章</b>	<b>不等式</b>	<b>104</b>
<b>一、</b>	<b>不等式性质及算术平均数与几何平均数</b>	<b>104</b>
第 1 课时	不等式的性质	104
第 2 课时	算术平均数与几何平均数	107
<b>二、</b>	<b>不等式的证明</b>	<b>109</b>
第 1 课时	比较法证明不等式	110
第 2 课时	综合法与分析法证明不等式	112
第 3 课时	不等式证明的其他方法	114
第 4 课时	含有绝对值不等式的证明	116
<b>三、</b>	<b>不等式的解法与应用</b>	<b>119</b>
第 1 课时	不等式的解法	119
第 2 课时	不等式的应用	122
	能力测试	125
<b>第七章</b>	<b>直线和圆的方程</b>	<b>128</b>
<b>一、</b>	<b>直线和线性规划</b>	<b>128</b>
第 1 课时	直线的方程	128
第 2 课时	两直线的位置关系	130
第 3 课时	简单的线性规划	133
<b>二、</b>	<b>圆</b>	<b>135</b>
第 1 课时	圆的方程	136

第 2 课时 直线和圆的位置关系 .....	138
能力测试 .....	140
<b>第八章 圆锥曲线方程</b> .....	<b>142</b>
<b>一、椭圆、双曲线、抛物线</b> .....	<b>142</b>
第 1 课时 椭圆 .....	142
第 2 课时 双曲线 .....	146
第 3 课时 抛物线 .....	149
<b>二、直线和圆锥曲线</b> .....	<b>151</b>
<b>三、圆锥曲线中的重点问题</b> .....	<b>154</b>
第 1 课时 轨迹问题 .....	154
第 2 课时 最值问题 .....	157
第 3 课时 范围问题 .....	159
能力测试 .....	161
<b>第九章 直线、平面、简单几何体</b> .....	<b>164</b>
<b>一、空间直线和平面</b> .....	<b>164</b>
第 1 课时 平面、空间两直线 .....	164
第 2 课时 直线和平面的位置关系 .....	167
第 3 课时 平面和平面的位置关系 .....	170
<b>二、简单几何体</b> .....	<b>174</b>
第 1 课时 棱柱和棱锥 .....	174
第 2 课时 多面体、正多面体和球 .....	177
<b>三、立体几何的应用性、开放性问题</b> .....	<b>180</b>
<b>四、空间向量、夹角和距离(B)*</b> .....	<b>184</b>
第 1 课时 空间向量 .....	184
第 2 课时 夹角和距离 .....	187
能力测试 .....	190
<b>第十章 排列、组合和概率</b> .....	<b>194</b>
<b>一、排列与组合</b> .....	<b>194</b>
第 1 课时 分类计数原理和分步计数原理 .....	194
第 2 课时 排列 .....	196
第 3 课时 组合 .....	199
第 4 课时 二项式定理 .....	202
<b>二、概率</b> .....	<b>204</b>
第 1 课时 随机事件的概率 .....	204
第 2 课时 互斥事件有一个发生的概率 .....	207
第 3 课时 相互独立事件同时发生的概率 .....	209
能力测试 .....	212

<b>第十一章 统计</b> .....	214
第 1 课时 抽样方法与总体分布的估计 .....	214
第 2 课时 总体期望值和方差的估计 .....	217
能力测试 .....	220
<b>第十二章 导数</b> .....	222
第 1 课时 导数的概念与求导方法 .....	222
第 2 课时 导数的应用 .....	224
能力测试 .....	227
<b>第十三章 专题讲座</b> .....	229
一、等价转化思想 .....	229
二、数形结合思想 .....	232
三、函数方程思想 .....	234
四、分类讨论思想 .....	236
五、综合运用 .....	239
第 1 课时 数学知识之间的沟通 .....	239
第 2 课时 数学和其他学科知识的沟通 .....	242
六、研究性学习 .....	244
<b>第十四章 综合测试</b> .....	249
试卷(一) .....	249
试卷(二) .....	251
试卷(三)2003 年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷) .....	255
<b>参考答案</b> .....	258

# 第一章

## 集合与简易逻辑

### 一、集合

#### 考点透视

Kaodian toushi

集合是每年高考必考的知识点之一.要求理解集合的有关概念,掌握有关的术语与符号,能正确地表达一些较简单的集合.高考试题常以选择、填空的形式出现,同时集合作为一种数学语言、数学工具、数学思想,它在函数、方程、不等式、排列组合及解析几何等方面都有广泛的运用.

课时

#### 集合的概念

#### 例题剖析

例1 设  $S$  是数集,满足下列两个条件:

①  $1 \notin S$ ; ② 若  $x \in S$ , 则  $\frac{1}{1-x} \in S$ .

(1) 若  $2 \in S$ , 求集合  $S$ ;

(2) 证明: 若  $a \in A$ , 则  $1 - \frac{1}{a} \in A$ .

解 (1)  $\because 2 \in S, \therefore \frac{1}{1-2} \in S$ , 即  $-1 \in S$ , 得  $\frac{1}{1-(-1)} \in S$ , 即  $\frac{1}{2} \in S$ .

由此得  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in S. \therefore S = \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ .

(2) 证明:  $a \in A \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in A \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in A$ , 即  $\frac{1-a}{-a} = 1 - \frac{1}{a} \in A$ .

评注 正确理解元素与集合的关系及集合中元素的三个特性是解答集合问题的基础,准确的转译符号语言和文字语言是解题的关键.

例2 已知实数  $a, x$ , 集合  $A = \{2, 4, x^2 - 5x + 9\}$ , 集合  $B = \{3, x^2 + ax + a\}$ , 集合  $C = \{x^2 + (a+1)x - 3, 1\}$ . 求:

(1) 使  $A = \{2, 3, 4\}$  的  $x$  的值;

(2) 使  $2 \in B, B \subsetneq A$  的  $a, x$  的值;

(3) 使  $B = C$  的  $a, x$  的值.

例3 若  $x, y \in \mathbf{R}, A = \{(x, y) | xy = 0\}, B = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\}, C = \{(x, y) | (x-y)^2 = 0\}, D = \{(x, y) | x^2 = y^2\}$ , 试将集合  $A, B, C, D$  中具有包含关系的任两个集

合都写出来.

例4 设  $M$  是满足下列两个条件的函数  $f(x)$  的集合:

①  $f(x)$  的定义域为  $[-1, 1]$ ;

② 若  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ , 则  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4|x_1 - x_2|$ .

试问:  $g(x) = x^2 + 2x - 1$  是否属于集合  $M$ ? 并说明理由.

例5 已知  $x \in \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - ax + (a-1) = 0\}$ ,  $C = \{x | x^2 - bx + 2 = 0\}$ . 问: 是否存在实数  $a, b$ , 使  $B \subsetneq A, C \subseteq A$  同时成立. 若存在, 求出  $a, b$  所有的值的集合; 若不存在, 说明理由.

解  $A = \{1, 2\}, B = \{1, a-1\}$ .

由  $B \subsetneq A$ , 有  $\begin{cases} a-1 \neq 1, \\ a-1 \neq 2, \end{cases}$  得  $\begin{cases} a \neq 2, \\ a \neq 3. \end{cases}$

由  $C \subseteq A$ , 知  $\Delta = b^2 - 8$ .

(1) 当  $\Delta < 0$  时,  $C = \emptyset \subseteq A$ , 此时  $-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$ ;

(2) 当  $\Delta \geq 0$  时,  $b \geq 2\sqrt{2}$  或  $b \leq -2\sqrt{2}$ , 此时  $C \neq \emptyset$ .

若  $C = A = \{1, 2\}$ , 则  $1+2 = b$ ,  $\therefore b = 3$ ;

若  $C = \{1\}$  或  $C = \{2\}$ , 则  $\Delta = 0$ , 即  $b = \pm 2\sqrt{2}$ , 此时方程  $x^2 - bx + 2 = 0$  的根为  $x = \pm\sqrt{2}$ , 不满足  $C = \{1\}$  或  $\{2\}$ , 舍去.

综上所述, 这样的  $a, b$  存在,  $a \in (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$ ,

$b \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \cup \{3\}$ .

评注 准确理解符号  $\subseteq, \subsetneq$  的含义及集合元素的互异性, 注意  $\emptyset \subseteq A$ . 正确进行分类讨论是解决本题的关键.

## 方法提炼

fangfa tiliian

正确理解集合语言, 掌握  $\in, \subseteq, \subsetneq, \cap, \cup, \complement_U A$  等符号的含义, 是解集合问题的基础. 对于用描述法给出的集合  $\{x | x \in P\}$ , 要抓住竖线前面的代表元素  $x$  及它所具有的性质  $P$ , 切不可将  $A = \{x | y = x^2 - 1\}, B = \{y | y = x^2 - 1\}, C = \{(x, y) | y = x^2 - 1\}$  混淆. 要注意等价思想的运用, 如  $A \cup B = B, A \cap B = A$  均等价于  $A \subseteq B$ .

掌握集合元素的特征是解有关集合问题的重要环节, 其中元素的互异性常易疏忽, 在解题时注意检验. 特别注意“ $\emptyset$ ”这个特殊的集合, 防止“ $\emptyset$ ”引起的取值范围的扩大或缩小, 应周密思考.

## 基础过关

chushi guoguan

1. 下面4个集合中, 表示空集的是( )

(A)  $\{0\}$ .

(B)  $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 0, x, y \in \mathbf{R}\}$ .

(C)  $\{x \in \mathbf{C} | x^2 + 1 = 0\}$ .

(D)  $\left\{x \mid \sin x + \cos x = \frac{3}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ .

2. 设集合  $P, Q$  与全集  $U$ , 下列命题: ①  $P \cap Q = P$ ; ②  $P \cup Q = Q$ ; ③  $P \cap \complement_U Q = \emptyset$ ;

④  $\complement_U P \cup Q = U$  中与命题  $P \subseteq Q$  等价的有( )

(A) 1个. (B) 2个. (C) 3个. (D) 4个

3. 当  $\{a, 0, -1\} = \{c, \frac{1}{b}, 1\}$  时, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 若  $a \in \mathbf{R}$ , 集合  $M = \{2a, a^2 - a\}$  有 4 个子集, 则  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 已知  $A = \{x \mid |x - 1| \geq a\}$ ,  $B = \left\{x \mid \begin{cases} 2x - 1 < 3x + 5, \\ 5x - 2 < 3x + 6 \end{cases}\right\}$ , 且  $A \cup B = \mathbf{R}$ , 求  $a$  的范围.

6. 含有 3 个实数的集合, 可表示为  $\left\{x, \frac{y}{x}, 1\right\}$ , 也可表示为  $\{x^2, x + y, 0\}$ . 试求  $x^{2004} + y^{2004}$  的值.

## 能力迁移

*Nengli jiangqi*

7. 设  $A, B$  是两个非空集合, 定义  $A$  与  $B$  的差为  $A - B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \notin B\}$ , 则  $A - (A - B)$  为 ( )

(A)  $A$ . (B)  $B$ . (C)  $A \cap B$ . (D)  $A \cup B$ .

8. 设  $A = \left\{(x, y) \mid \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\right\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid y = x + a\}$ , 若  $\emptyset \subsetneq A \cap B$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

(A)  $-3\sqrt{2} \leq a \leq 3\sqrt{2}$ . (B)  $-3 \leq a \leq 3$ .

(C)  $-3 < a \leq 3\sqrt{2}$ . (D)  $3 \leq a \leq 3\sqrt{2}$ .

9. 设全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $M = \{x \mid y = 6 - 4x\}$ ,  $N = \{x \mid y = \sqrt{x - 1}\}$ , 则  $M \cup \complement_U N = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设集合  $A_n = \{x \mid 2^n < x < 2^{n+1}, \text{且 } n = 7m + 1, m, n \in \mathbf{N}^*\}$ , 则  $A_5$  中各元素之和为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 已知函数  $f(x) = x^2$ , 集合  $A = \{x \mid f(x - 1) = ax, x \in \mathbf{R}\}$ , 且  $A \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ , 求实数  $a$  的范围.

12. 设有命题  $p$ : “若  $x \in A$ , 则  $8 - x \in A$ ”. 在正整数集  $\mathbf{N}^*$  的子集中

(1) 分别写出满足命题  $p$  的一元集  $A$  和二元集  $A$ ;

(2) 满足命题  $p$  的集合  $A$  共有多少个?

13. 设  $M = \{a + \sqrt{2}b \mid |a^2 - 2b^2| = 1, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$ . 已知  $x \in M, y \in M$ , 求证:

(1)  $xy \in M$ ;

(2)  $\frac{1}{x} \in M$ .

课时

2 集合的运算

## 例题剖析

**例 6** 设  $U = \{x \mid x \text{ 为小于 } 20 \text{ 的正偶数}\}$ , 若  $A \cap \complement_U B = \{12, 14\}$ ,  $B \cap \complement_U A = \{2, 4, 16, 18\}$ ,  $\complement_U A \cap \complement_U B = \emptyset$ , 求集合  $A, B$ .

**解法 1**  $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ ;

由  $A \cap \complement_U B = \{12, 14\}$ , 得  $12, 14 \in A$ , 但  $12, 14 \notin B$ ;  
 由  $B \cap \complement_U A = \{2, 4, 16, 18\}$ , 得  $2, 4, 16, 18 \in B$ , 但  $2, 4, 16, 18 \notin A$ ;  
 此时只剩下  $6, 8, 10$  未确定, 假定  $6 \in \complement_U A$ , 由  $\complement_U A \cap \complement_U B = \emptyset$ , 得  $6 \notin \complement_U B$ ,  
 $\therefore 6 \in B$ , 从而  $6 \in B \cap \complement_U A$  与已知矛盾,  
 $\therefore 6 \in A$ . 同理  $8, 10 \in A, 6, 8, 10 \in B$ .

故  $A = \{6, 8, 10, 12, 14\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10, 16, 18\}$ .

**解法 2** 应用文氏图.

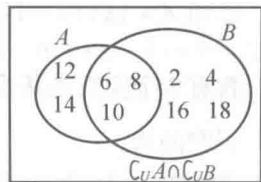


图 1-1

**评注** 正确理解集合交、并、补的意义是熟练地进行集合运算的基础, 运算时应先根据条件, 化简给定集合, 局部入手, 逐步确定  $A, B$  中的元素. 对于离散集合、抽象集合的解决常辅以文氏图, 使问题解决变得简单、直观.

**例 7** 已知  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \left\{ x \mid \left( \frac{1}{2} \right)^{(x+2)(x-3)} > 1 \right\}, B = \{ x \mid \log_3(x-a) < 2 \}$ .

- (1) 当  $A \subseteq B$  时, 求  $a$  的取值范围;
- (2) 当  $A \cap B = \emptyset$  时, 求  $a$  的取值范围.

**例 8** 已知集合  $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}, B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ . 又知集合  $C$  是这样一集合: 若各元素都加 2 就变为  $A$  的一个子集; 若各元素都减 2, 就变为  $B$  的一个子集. 求集合  $C$ .

**例 9** 高三(5)班学生开展研究性学习活动. 参加化学活动小组的有 20 人; 参加生物活动小组的有 22 人; 既参加化学活动小组, 又参加生物活动小组的有 10 人; 既未参加化学小组, 又未参加生物小组的有 15 人. 问高三(5)班共有学生多少人?

**例 10** 设  $m \in \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{(x, y) \mid y = -\sqrt{3}x + m\}, B = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases} (0 < \theta < 2\pi) \right\}$ , 且  $A \cap B = \{(\cos\theta_1, \sin\theta_1), (\cos\theta_2, \sin\theta_2), \theta_1 \neq \theta_2\}$ , 求  $m$  的取值范围.

**解** 集合  $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 (x \neq 1)\}$ . 由题意, 即求直线  $y = -\sqrt{3}x + m$  与曲线  $x^2 + y^2 = 1 (x \neq 1)$  有两个交点的  $m$  的取值范围.

则  $\frac{|m|}{2} < 1$  且  $m \neq \sqrt{3}$ , 所以  $m \in (-2, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$ .

**评注** 本题的实质为直线  $y = -\sqrt{3}x + m$  与圆  $x^2 + y^2 = 1 (x \neq 1)$  有两个交点, 求  $m$  的取值范围. 也可以变成  $\theta \in (0, 2\pi)$ , 且方程  $2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = m$  有两个不同的实数根, 求  $m$  的范围. 因此, 集合符号在本题只起了一种“化妆品”的作用, 这种数学符号与数学语言的互译, 命题的等价转化, 是一种必备的数学素质.

**方法提炼**

Fangfa Tiliian

在进行集合的交、并、补运算时, 应全面认识集合的本质属性, 准确转译集合语言. 为使问题明朗化, 应先化简给定的集合, 使之“具体化、直观化、通俗化”. 要注意数形结合的思想在解集合问题中的应用, 数集之间的运算常借助于数轴, 但要注意区间的开闭情况. 而一般离散的、抽象的集合往往借助于文氏图解决. 当给定的集合为点集时, 要分

析满足条件的点构成什么样的图形,转化为解析几何问题解决.

## 基础过关

14. 设  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $M = \{3, 4, 5\}$ ,  $N = \{1, 3, 6\}$ , 则集合  $\{2, 7, 8\}$  是( )  
 (A)  $M \cup N$ . (B)  $M \cap N$ . (C)  $\complement_U M \cup \complement_U N$ . (D)  $\complement_U M \cap \complement_U N$ .
15. 设  $M = \{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 = 4\}$ ,  $N = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ , 则  $M$  与  $N$  的关系是( )  
 (A)  $N \not\subseteq M$ . (B)  $M \cap N = \emptyset$ . (C)  $N \subseteq M$ . (D)  $M \cap N = \{(0, 0)\}$ .
16. 全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ,  $B = \{x | 1 < x < 3\}$ , 则  $\complement_U(A \cup B) =$ \_\_\_\_\_.
17. 高三(5)班在期末考试中,有 36 人数学成绩不低于 80 分,有 20 人物理成绩不低于 80 分,有 15 人的数学、物理成绩都不低于 80 分,则这两科成绩中至少有一科不低于 80 分的人数为\_\_\_\_\_.
18. 设  $U$  是全集,集合  $A, B, C$  满足关系:  $A \subsetneq B \subsetneq C$ . 试写出用  $A, B, C$  中的两个或三个构成的集合运算,使其运算结果为空集.
19. 已知  $A = \{y | y = x^2 + 2x + 4, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{y | y = ax^2 - 2x + 4a, x \in \mathbf{R}\}$ . 若  $A \subseteq B$ , 求实数  $a$  的取值范围.

## 能力迁移

20. 集合  $P = \{x | x = \sin \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$  的子集的个数为( )  
 (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 8.
21. 若  $M \cap N = \emptyset$ , 且  $M \cup N = \{1, 2\}$ , 则满足条件的集合  $M, N$  的不同组数为( )  
 (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.
22. 已知集合  $A \subsetneq \{2, 3, 7\}$ , 且  $A$  中至多有一个奇数, 这样的集合  $A$  共有\_\_\_\_\_个.
23. 设  $m, n$  为自然数,  $m > n$ . 集合  $A = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2, \dots, m\}$ , 集合  $B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , 满足  $B \cap C \neq \emptyset$  的  $A$  的子集  $C$  共有\_\_\_\_\_个.
24.  $A = \{x | x^2 - 5x + 4 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - ax + (a-1) = 0\}$ ,  $C = \{x | x^2 - mx + 4 = 0\}$ . 已知  $A \cup B = A, A \cap C = C$ , 求  $a, m$  的值.
25. 设全集  $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$ , 集合  $P = \{(x, y) | y = x^2 + 2bx + 1\}$ ,  $Q = \{(x, y) | y = 2a(x-b)\}$ ,  $S = \{(a, b) | P \cap Q = \emptyset\}$ , 求点集  $S$  的面积.
26. 设二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ ), 满足  $f(-1) = 0$ , 对于任意实数  $x$  都有  $f(x) \geq x$ , 且当  $0 < x < 2$  时,  $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ .  
 (1) 求  $f(1)$  的值; (2) 求函数  $f(x)$  的解析式;  
 (3) 设  $A = \{(x, y) | f(x) + f(y) < 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | ax - y + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ , 当  $A \cap B = \emptyset$  时, 试确定实数  $a$  的取值范围.

课时 3

含绝对值不等式及一元二次不等式的解法

例题剖析

例 11 (1) 解不等式  $3 < \left| 2x - \frac{2}{3} \right| \leq 7$ ; (2) 解不等式  $|x+2| + |x| > 4$ ;  
 (3) 不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集是  $\{x | 2 < x < 3\}$ , 解关于  $x$  的不等式  $cx^2 + bx + a > 0$ .

(1) 解法 1 令  $2x - \frac{2}{3} = u$ , 则原不等式等价于  $3 < u \leq 7$  ① 或  $-7 \leq u < -3$  ②.

由①得  $\begin{cases} 2x - \frac{2}{3} > 3, \\ 2x - \frac{2}{3} \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{11}{6} < x \leq \frac{23}{6}. \therefore \text{①的解集为 } A = \left\{ x \mid \frac{11}{6} < x \leq \frac{23}{6} \right\}.$

由②得  $\begin{cases} 2x - \frac{2}{3} \geq -7, \\ 2x - \frac{2}{3} < -3 \end{cases} \Rightarrow -\frac{19}{6} \leq x < -\frac{7}{6}. \therefore \text{②的解集为 } B = \left\{ x \mid -\frac{19}{6} \leq x < -\frac{7}{6} \right\}.$

$\therefore$  原不等式的解集为  $A \cup B = \left\{ x \mid -\frac{19}{6} \leq x < -\frac{7}{6}, \text{ 或 } \frac{11}{6} < x \leq \frac{23}{6} \right\}.$

解法 2 原不等式等价于  $\begin{cases} \left| 2x - \frac{2}{3} \right| > 3, \\ \left| 2x - \frac{2}{3} \right| \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{2}{3} > 3 \text{ 或 } 2x - \frac{2}{3} < -3, \\ -7 \leq 2x - \frac{2}{3} \leq 7 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x > \frac{11}{6} \text{ 或 } x < -\frac{7}{6}, \\ -\frac{19}{6} \leq x \leq \frac{23}{6} \end{cases} \Rightarrow -\frac{19}{6} \leq x < -\frac{7}{6} \text{ 或 } \frac{11}{6} < x \leq \frac{23}{6}.$

(2) 解法 1 设  $f(x) = |x+2| + |x|$ .

i) 当  $x \leq -2$  时,  $f(x) = -2x - 2 > 4 \Rightarrow x < -3$ ;

ii) 当  $-2 < x < 0$  时,  $f(x) = 2 > 4$ , 无解;

iii) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2x + 2 > 4 \Rightarrow x > 1$ .

$\therefore$  原不等式解集为  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$ .

解法 2  $|x+2| + |x| > 4$  表示数轴上与点  $A(-2)$ ,  $O(0)$  的距离之和大于 4 的点, 如图 1-2. 由于  $|AO| = 2$ , 点  $B(1)$  左边的点及点  $C(-3)$  右边的点到点  $A, O$  的距离之和均大于 4,

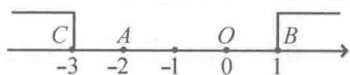


图 1-2

$\therefore$  原不等式解集为  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$ .

(3) 由已知  $a < 0$ , 且 2, 3 是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两个根,

得  $-\frac{b}{a}=2+3=5, \frac{c}{a}=6. \therefore \frac{a}{c}=\frac{1}{6}, -\frac{b}{c}=\frac{5}{6},$

即  $-\frac{b}{c}=\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{a}{c}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}. \therefore \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  是方程  $cx^2+bx+a=0$  的两个实数根.

$\therefore a < 0, \therefore c < 0,$  因而  $cx^2+bx+a > 0$  的解集是  $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right\}.$

**评注** 含有绝对值不等式的解法, 主要是利用  $|ax+b| < c$  或  $|ax+b| > c (c > 0)$  型不等式的意义及“取零点, 分区间, 讨论”, 脱去绝对值. 同时要充分考虑绝对值的几何意义, 准确把握什么时候取并集、交集. 求解一元二次不等式, 注意利用二次函数的图象和一元二次方程的根与不等式的关系.

**例 12**  $A = \{x \mid x^2 - 7x + 10 \leq 0\}, B = \{x \mid x^2 + ax + b < 0\}.$  若  $A \cap B \neq \emptyset, A \cup B = \{x \mid x - 3 < 4 < 2x\},$  求  $S = \{x \mid x = a + b\}.$

**例 13** 已知  $A = \{x \mid |x^2 - 2x| \leq x\}, B = \left\{x \mid \left| \frac{x}{1-x} \right| \leq \frac{x}{1-x}\right\}, C = \{x \mid ax^2 + x + b < 0\}.$  若  $(A \cup B) \cap C = \emptyset, (A \cup B) \cup C = \mathbf{R},$  求实数  $a, b$  的值.

**例 14** 解关于  $x$  的不等式  $x|x-a| \leq \frac{2a^2}{9} (a > 0).$

**例 15** 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的减函数, 且对任意  $x \in [0, 1], f(x^2 - ax) < f(a - 3)$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

**解法 1** (分类讨论) 由题意, 有  $x^2 - ax + 3 - a > 0,$  对  $x \in [0, 1]$  恒成立.

令  $g(x) = x^2 - ax + 3 - a,$  则  $g(x) > 0$  在  $[0, 1]$  上恒成立.

① 由  $\begin{cases} \frac{a}{2} < 0, \\ g(0) > 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} a < 0, \\ a < 3, \end{cases}$  解得  $a < 0;$

② 由  $\begin{cases} 0 \leq \frac{a}{2} \leq 1, \\ \Delta < 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} 0 \leq a \leq 2, \\ a^2 + 4a - 12 < 0, \end{cases}$  解得  $0 \leq a < 2;$

③ 由  $\begin{cases} \frac{a}{2} > 1, \\ g(1) > 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} a > 2, \\ 4 - 2a < 0, \end{cases}$  无解.

综上所述,  $a < 2.$

**解法 2**  $g(x) > 0$  对任意  $x \in [0, 1]$  成立  $\Leftrightarrow a < \frac{x^2+3}{x+1}$  对任意  $x \in [0, 1]$  恒成立  $\Leftrightarrow a < \left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)_{\min}.$  而  $\frac{x^2+3}{x+1} = (x+1) + \frac{4}{x+1} - 2 \geq 2,$  当且仅当  $(x+1) = \frac{4}{x+1}$  时, 取“=”号, 得当  $x=1 \in [0, 1]$  时,  $\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)_{\min} = 2, \therefore a < 2.$

**解法 3**  $g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 > a(x+1)$  对任意  $x \in [0, 1]$  恒成立.

在同一直角坐标系中, 画出函数  $y = x^2 + 3$  和  $y = a(x+1)$  的图象, 把问题转化为  $a$  为何值时,  $y = x^2 + 3$  在  $[0, 1]$  中的图象位于  $y = a(x+1)$  的图象的上方.

当  $x^2 + 3 = a(x+1)$  中的  $\Delta = 0$  时,  $a = 2$  或  $a = -6$  (舍去). 又  $a = 2$  时, 方程的解为

$x = 1 \in [0, 1]$ .  $\therefore a = 2$  时, 直线  $y = a(x + 1)$  与抛物线  $y = x^2 + 3$  相切于点  $(1, 4)$ .

结合  $a$  的几何意义可得  $x^2 + 3 > a(x + 1)$  对任意  $x \in [0, 1]$  恒成立  $\Leftrightarrow a < 2$ .

**评注** 本题含参数不等式, 解集包含区间  $[0, 1]$ . 要灵活地进行等价转换:  $g(x) > 0$  对任意  $x \in [0, 1]$  成立  $\Leftrightarrow$  方程  $g(x) = 0$  中  $\Delta < 0$  或小根  $< 0$  或大根  $> 1$  或转化为  $x \in [0, 1]$  时  $g(x)_{\min} > 0$  等.

### 方法提炼

Fangfa tiliian

简单的含有绝对值的不等式解法, 一般是依据  $|x| < a$  ( $a > 0$ )  $\Leftrightarrow -a < x < a$ ,  $|x| > a$  ( $a > 0$ )  $\Leftrightarrow x > a$  或  $x < -a$  求解. 含有多个绝对值符号的不等式一般可用“零点分段”方法去掉绝对值进行求解, 在解题过程中要注意等价变换.

一元二次不等式的解法, 一般分三个层次思考: ①二次项系数的符号; ②判别式的符号; ③对应方程的根的大小.

研究含参数的一元二次不等式的解集问题, 常可以化归为研究二次方程根的分布及函数的最值问题, 或转化为直线与圆锥曲线的位置关系来处理, 从数形两个方面思考问题. 数形结合是数学中一种基本的思维方法.

### 基础过关

27. 不等式  $|x - 2| > 3$  的解集是( )
- (A)  $\{x | x < 5\}$ . (B)  $\{x | -1 < x < 5\}$ .  
(C)  $\{x | x < -1\}$ . (D)  $\{x | x < -1, \text{ 或 } x > 5\}$ .
28.  $a \in \mathbf{R}$ , 且对一切实数  $x$  都有不等式  $ax^2 + ax + a + 3 > 0$ , 那么  $a$  的取值范围是( )
- (A)  $a > 0$ . (B)  $a \geq 0$ . (C)  $a < -4$ . (D)  $a < -4$  或  $a > 0$ .
29. 不等式  $|x^2 - 3x| > 4$  的解集是\_\_\_\_\_.
30. 已知  $x^2 - mx + n \leq 0$  的解集为  $\{x | -5 \leq x \leq 1\}$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_,  $n =$ \_\_\_\_\_.
31. 设  $a \in \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 2ax + a + 2 < 0\}$ . 当  $B \subseteq A$  时, 求  $a$  的取值范围.
32. 给定  $a > 0, 2a \geq \sqrt{2}$ , 满足不等式  $|x - a| < b$  的一切实数  $x$ , 都满足不等式  $|x^2 - a^2| < \frac{1}{2}$ . 求正数  $b$  的取值范围.

### 能力迁移

Nengli qianyi

33. 不等式  $|x - 1| + |x + 2| < 5$  的解集是( )
- (A)  $\{x | -3 < x < 2\}$ . (B)  $\{x | -1 < x < 2\}$ .  
(C)  $\{x | -2 < x < 1\}$ . (D)  $\left\{x \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{11}{2}\right\}$ .
34. 设集合  $M = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - x < 0\}$ ,  $N = \{x \in \mathbf{R} | |x| < 2\}$ , 则( )
- (A)  $N \subsetneq M$ . (B)  $M \cap N = M$ . (C)  $M \cup N = M$ . (D)  $M \cup N = \mathbf{R}$ .