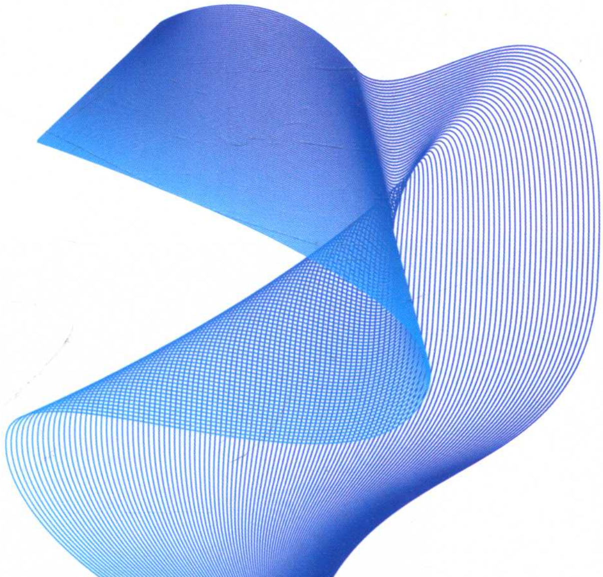
普通高等教育“十三五”规划教材

GAODENG SHUXUE ZONGHE

高等数学综合

主 编 柴惠文 黎 虹 邓 燕



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学综合

主 编 柴惠文 黎 虹 邓 燕

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是为高等院校的学生在较系统地学习了“高等数学”“线性代数”“概率论与数理统计”课程之后，更好地掌握这三门课程而编写的综合学习提高用书. 本书具有结构清晰、概念准确、深入浅出、可读性强、解答详尽、习题配备难易适当等特点.

全书共分三篇，二十四讲. 第一篇包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理及导数应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，共十一讲；第二篇包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性与向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型，共六讲；第三篇包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念和点估计及评选标准、区间估计与假设检验，共七讲. 每一讲均有内容要点、典型例题、习题及习题参考答案或提示.

本书可作为理工科类、经管类各专业高年级学生再学习或复习高等数学相关内容的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学综合/柴惠文，黎虹，邓燕主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2019.1

ISBN 978-7-5635-5624-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①柴… ②黎… ③邓… Ⅲ.①高等数学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 273683 号

书　　名 高等数学综合
主　　编 柴惠文 黎 虹 邓 燕
责任编辑 付小霞
出版发行 北京邮电大学出版社
社　　址 北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真 010-82333010 62282185(发行部) 010-82333009 62283578(传真)
网　　址 www.buptpress3.com
电子信箱 ctrd@buptpress.com
经　　销 各地新华书店
印　　刷 北京泽宇印刷有限公司
开　　本 787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张 21.5
字　　数 536 千字
版　　次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5624-3 定价：54.00 元

前 言

本书是参照全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学二、数学三的考试大纲编写而成的.

本书主要包括:高等数学部分(一元微积分学、常微分方程、级数、空间解析几何、多元微积分学),线性代数部分(行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、特征值和特征向量、二次型、向量空间),概率论与数理统计部分(随机事件与概率,一维、多维随机变量及分布,数字特征,大数定律与中心极限定理,参数估计,假设检验).其内容涵盖了理、工、经、管各专业的考试大纲要求(具体在内容部分有标注),可作为理工科类、经管类各专业高年级学生再学习或复习高等数学相关内容的参考书.

本书由嘉兴学院的柴惠文老师、邓燕老师及黎虹老师编写,融入了编者十多年辅导教学中积累的丰富经验及详尽的辅导素材.编者十分清楚,一般高等院校的学生在一年级、二年级的数学课程的学习要求,达到的水平与考研数学一、数学二、数学三要求的水平之间的差距是什么,这些差距的关键点在哪里,如何弥补等,因而编者精选了各类例题,并进行深入浅出的分析,突出数学的思想、方法及相应的技巧,以便读者能更好地掌握解决问题的方法,并能举一反三.本书还配有精选的习题,以便对所学知识进行巩固提高,从而能快速达到考研数学一、数学二、数学三中对知识点掌握的基本要求.

书中对数学一、数学二、数学三的知识点要求的差异均有标注(按阅读习惯),因而本书适合理、工、经、管各专业的备考者.

书稿虽几经修改及校对,但错误或不足之处在所难免,衷心地希望能得到各位专家、同行和读者的批评、指正,使本书在使用过程中不断完善.

编 者

2018 年 10 月

目　录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇 高 等 数 学

第一讲 函数、极限与连续

内容要点

一、函数

1. 函数的概念

函数的定义　分段函数　反函数　隐函数

2. 基本初等函数的概念、性质和图像

3. 复合函数与初等函数

4. 数学中常出现的非初等函数

(1) 用极限表示的函数：

①$y=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，如 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)-x\right]$.

②$y=\lim\limits_{t\to x}f(t,x)$，如 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$.

(2) 用变上、下限积分表示的函数：

①$y=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 连续，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$.

②$y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\mathrm{d}t$，其中 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 可导，$f(t)$ 连续，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

5. 函数的几种性质

(1) 有界性：设函数 $y=f(x)$ 在 X 内有定义，若存在正常数 M，使任意 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的.

(2) 奇偶性：设区间 X 关于原点对称，若对任一 $x\in X$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$

在 X 上是奇函数；若对任一 $x \in X$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数. 奇函数的图像关于原点对称，偶函数图像关于 y 轴对称. 重要公式如下：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数}, \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数}. \end{cases}$$

(3) 单调性：设 $f(x)$ 在 X 上有定义，若对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X$，且 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) < f(x_2)$（$f(x_1) > f(x_2)$）成立，则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的（单调减少的）；若对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X$，且 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$（$f(x_1) \geqslant f(x_2)$）成立，则称 $f(x)$ 在 X 上是单调不减的（单调不增的）.

注意：有些书上把这里的单调增加称为严格单调增加；把这里的单调不减称为单调增加.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x) > 0$（$f'(x) < 0$），则 $f(x)$ 单调增加（单调减少）.

(4) 周期性：设 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 $T \neq 0$，使得任意 $x \in X$，有 $x+T \in X$，$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 是周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期. 由此可见，周期函数有无穷多个周期，一般我们把其中最小的正周期称为周期.

例如，函数 $f(x)=\sin \lambda x$（$\lambda > 0$ 常数）的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

二、极限

1. 极限的概念

① 数列的极限：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

② 函数的极限：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$；$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$；$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$；$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$；$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$；$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

2. 极限的基本性质

① 极限的唯一性：$\lim f(x)=A$，$\lim f(x)=B$，则 $A=B$.

② 极限的不等式性质：设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，若在某邻域内总有 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $A \geqslant B$；反之，若 $A > B$，则在某邻域内有 $f(x) > g(x)$（注：$g(x) \equiv 0$，$B=0$ 的情形也可称为极限的保号性）.

③ 极限的局部有界性：设 $\lim f(x)=A$，则在某邻域内 $f(x)$ 是有界的.

三、极限的运算与无穷小量

1. 极限的四则运算

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=A+B$；

(2) $\lim[f(x)-g(x)]=A-B$；

(3) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；

(4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$；

(5) $\lim[f(x)]^{g(x)}=A^B$ $(A>0)$.

2. 无穷小量

若 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为无穷小（注：无穷小与 x 的变化过程有关，如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 为无穷小，而 $x\to 2$ 时，$\frac{1}{x}$ 不是无穷小）. 常数 0 是无穷小量.

3. 无穷大量

任给 $M>0$，当 x 变化后，总有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为无穷大，记为 $\lim f(x)=\infty$.

4. 无穷小量与无穷大量的关系

在 x 的同一个变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；若 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

5. 无穷小量与极限的关系

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim \alpha(x)=0$.

6. 两个无穷小量的比较

设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，且 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=l$，则：

(1) $l=0$ 时，称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量，记为 $f(x)=o[g(x)]$，也称 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小量.

(2) $l\neq 0$ 时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量.

(3) $l=1$ 时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量，记为 $f(x)\sim g(x)$.

(4) 如果 $\lim\frac{f(x)}{g(x)^k}=c\neq 0$，$k>0$，称 $f(x)$ 是关于无穷小 $g(x)$ 的 k 阶无穷小.

7. 常见的等价无穷小量

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ 等.

8. 无穷小量的重要性质

有限个无穷小的和、差、积，仍是无穷小；有界变量乘以无穷小量，仍是无穷小量.

四、求极限的方法

1. 利用极限的四则运算和幂指数运算法则

2. 利用两个极限准则

(1) 单调有界准则　单调有界数列一定存在极限，即：

若 $x_{n+1}\leqslant x_n$（n 为正整数），又 $x_n\geqslant m$（n 为正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，且 $A\geqslant m$；

若 $x_{n+1}\geqslant x_n$（n 为正整数），又 $x_n\leqslant M$（n 为正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，且 $A\leqslant M$.

(2) 夹逼准则　设 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，若 $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$.

3. 利用两个重要极限公式

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$;$\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}$.

4. 利用无穷小量重要性质和等价无穷小量代换

5. 利用泰勒公式(比用等价无穷小量更深刻)

例如,当 $x\to 0$ 时,

$$\mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+o(x^{n})\left(\text{如}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1-\dfrac{x^{2}}{2!}}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^{3}}{3!}+o(x^{3})}{x^{3}}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}\right);$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n}}{n}+o(x^{n});$$

$$\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n-1});$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^{n}+o(x^{n}).$$

6. 利用洛必达法则

(1) 直接用洛必达法则.

法则 1 $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$ 设:

①$\lim f(x)=0$,$\lim g(x)=0$;

② 在 x 变化过程中,$f'(x)$,$g'(x)$ 都存在,且 $g'(x)\neq 0$;

③$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞);

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$(或 ∞).

法则 2 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 设:

①$\lim f(x)=\infty$,$\lim g(x)=\infty$;

② 在 x 变化过程中,$f'(x)$,$g'(x)$ 都存在,且 $g'(x)\neq 0$;

③$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞);

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$(或 ∞).

注:在上述两法则中,如果 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不是无穷大量情形,则不能得出 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在,须用其他方法确定之.

(2) 间接用洛必达法则的"$0 \cdot \infty$"型和"$\infty - \infty$"型，如 $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x$ 和 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

(3) 再间接用洛必达法则的"1^∞"型、"0^0"型和"∞^0"型，如

$$\lim[f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}.$$

7. 利用导数定义求极限

基本公式：$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$（如果存在）.

8. 利用定积分定义求极限

基本公式：$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$（如果存在）.

9. 其他综合方法

见后面的例题.

10. 求极限的反问题相关方法

例如，已知 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + ax + b}{\sin(x^2 - 1)} = 3$，求 a 和 b.

五、函数的连续性

1. 函数连续的概念

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

对函数 $y = f(x)$，如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既是左连续，又是右连续.

2. 函数在区间内(上)连续

如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

如果 $y = f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，在区间端点 a 处右连续，在区间端点 b 处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

3. 函数的间断点

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

(1) 第一类间断点：设 x_0 是函数 $y = f(x)$ 的间断点，如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

第一类间断点包括可去间断点（极限存在但 $f(x_0)$ 不存在，或极限、$f(x_0)$ 都存在但不相等）和跳跃间断点（左、右极限都存在但不相等）.

(2) 第二类间断点：第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点.

常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点. 例如，$x = 0$ 是 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间

断点，$x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的跳跃间断点，$x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点，$x=0$ 是 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点.

4. 初等函数的连续性

(1) 在区间 I 连续的函数的和、差、积及商(分母不为零)，在区间 I 仍是连续的.

(2) 由连续函数经有限次复合而成的复合函数在其定义区间内仍是连续函数.

(3) 在区间 I 连续且单调的函数的反函数，在对应区间仍连续且单调.

(4) 基本初等函数在它们的定义域内是连续的.

(5) 初等函数在它们的定义区间内是连续的.

5. 闭区间上连续函数的性质

如函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，

(1) 有界定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 必在$[a,b]$上有界.

(2) 最大值和最小值定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在这个区间上一定存在最大值 M 和最小值 m. 其中最大值 M 和最小值 m 的定义如下.

设 $f(x_0)=M$，是 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上点 x_0 处的函数值，如果对于区间$[a,b]$上的任意一点 x，总有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant m)$，则称 $M(m)$ 为函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大(小)值.

(3) 介值定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且其最大值和最小值分别为 M 和 m，则对于介于 m 和 M 之间的任何实数 c，在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$.

(4) 零点定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在(a,b)内至少存在一个点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

典型例题

例 1.1 设 $f(x)$ 的定义域为$[-a,a](a>0)$，求 $f(x^2-4)$ 的定义域.

解 要求 $-a\leqslant x^2-4\leqslant a$，即求 $4-a\leqslant x^2\leqslant 4+a$.

当 $a\geqslant 4$ 时，$4-a\leqslant 0$，$x^2\leqslant 4+a$，则 $|x|\leqslant\sqrt{4+a}$，定义域为 $-\sqrt{4+a}\leqslant x\leqslant\sqrt{4+a}$；

当 $0<a<4$ 时，$4-a>0$，则 $\sqrt{4-a}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{4+a}$，定义域为 $\sqrt{4-a}\leqslant x\leqslant\sqrt{4+a}$ 或 $-\sqrt{4+a}\leqslant x\leqslant-\sqrt{4-a}$.

例 1.2 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2,\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 1-(x-2)^2, & x>2\end{cases}$ 的值域，并求它的反函数.

解 当 $x<-2$ 时，$y=3-x^3>3+8=11$，$x=\sqrt[3]{3-y}$；

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$3\leqslant y=5-x\leqslant 7$，$x=5-y$；

当 $x>2$ 时，$y=1-(x-2)^2<1$，$x=2+\sqrt{1-y}$；

所以 $y=f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1)\cup[3,7]\cup(11,+\infty)$. 其反函数为

$$x=\begin{cases}2+\sqrt{1-y}, & y<1,\\ 5-y, & 3\leqslant y\leqslant 7,\\ \sqrt[3]{3-y}, & y>11.\end{cases}$$

例 1.3　设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\underbrace{f[f(\cdots f(x))]}_{n\text{重复合}}=f_n(x)$.

解　$f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

……

若 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

根据数学归纳法可知，对正整数 n，有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

例 1.4　选择题.

(1) 设 $F'(x)=f(x)$，则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数

(B) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数

(C) 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $F(x)$ 为周期函数

(D) 若 $f(x)$ 为单调函数，则 $F(x)$ 为单调函数

(2) 设 $f(x)$，$g(x)$ 均是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，下列结论成立的是(　　).

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(3) 设当 $x\to0$ 时，$(1-\cos 3x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小量，而 $x\sin x^n$ 又是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小量，则 n 等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(4) 设 $f(x)$，$g(x)$ 均在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续，且 $f(x)\neq0$，$g(x)$ 有间断点，则下列函数中必有间断点的为(　　).

(A) $g[f(x)]$　　(B) $[g(x)]^2$　　(C) $f[g(x)]$　　(D) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

解　(1) 选 A. 例如，$f(x)=x$ 是单调函数，但 $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+10$ 不是单调函数，D 选项错误；又如，$f(x)=\cos x+4$ 是周期函数，但 $F(x)=\sin x+4x$ 不是周期函数，C 选项错误；再如，$f(x)=x^2-4$ 是偶函数，但 $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+10$ 不是奇函数，B 选项错误；如果 $f(-x)=-f(x)$，则

$$F(x)-F(0)=\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x f(-x)\,d(-x)=F(-x)-F(0),$$

即 $F(x)=F(-x)$，$F(x)$ 是偶函数，A 选项正确.

(2) 选 A. 因 $f(x)$，$g(x)$ 均恒大于零，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$ 即 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'<0$，所

以$\dfrac{f(x)}{g(x)}$单调递减，则当$a<x<b$时，有$\dfrac{f(a)}{g(a)}>\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$成立，可知A选项正确.

(3) 选C. 当$x\to 0$时，$(1-\cos 3x)\ln(1+x^2)$是4阶无穷小，$e^{x^2}-1$是2阶无穷小，故$n=3$，C选项正确.

(4) 选D. 如果$f(x)=1$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$则$g[f(x)]=1$是连续的，故A选项错误；如果$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$则$[g(x)]^2=1$是连续的，故B选项错误；如果$f(x)=1$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$则$f[g(x)]=1$是连续的，故C选项错误；因此D选项正确(也可反证. 例如，若$h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$是连续的，则$g(x)=h(x)f(x)$也是连续的，与已知矛盾).

例 1.5 填空题.

(1) 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，则$a=$________，$b=$________.

(2) 设$a>0$，$b>0$都是常数，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=$________.

解 (1) 填4，−5. 由题设可知$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$，得$1+a+b=0$，再由洛必达法则及已知得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+a}{2x}=\frac{2+a}{2}=3,$$

从而解得$a=4$，$b=-5$.

(2) 填$\sqrt{ab}$. 令$y=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$，$\ln y=x[\ln(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}})-\ln 2]$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}})-\ln 2}{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(a^t+b^t)-\ln 2}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{a^t\ln a+b^t\ln b}{a^t+b^t}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab},$$

因此$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=\sqrt{ab}$；于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}$.

(3) 填1. 因$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1$，及$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

例 1.6 求$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}x[x^{15}+(e^{x^3}-e^{-x^3})\ln(x+\sqrt{x^2+1})]dx$.

解 因$f_1(x)=e^{x^3}-e^{-x^3}$及$f_2(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$都是奇函数，因此，

$$x(e^{x^3}-e^{-x^3})\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

也是奇函数，于是 $I=\int_{-1}^{1}x^{16}dx+0=\frac{1}{17}x^{17}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{17}$.

例 1.7　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=5$，其反函数为 $g(x)$，且 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$.

解　$\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$ 两边对 x 求导，得 $g[f(x)]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，于是 $xf'(x)=x(2+x)e^x$，故

$$f'(x)=(x+2)e^x,\quad f(x)=(x+1)e^x+C,$$

由 $f(0)=5$ 得 $C=4$，则 $f(x)=(x+1)e^x+4$.

例 1.8　设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f\left(\frac{1}{3}x\right)=x$，求 $f(x)$.

解　令 $g(x)=\sin f(x)$，则

$g(x)-\frac{1}{3}g\left(\frac{1}{3}x\right)=x$,

$\frac{1}{3}g\left(\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3^2}g\left(\frac{1}{3^2}x\right)=\frac{1}{3^2}x$,

$\frac{1}{3^2}g\left(\frac{1}{3^2}x\right)-\frac{1}{3^3}g\left(\frac{1}{3^3}x\right)=\frac{1}{3^4}x$,

……

$\frac{1}{3^{n-1}}g\left(\frac{1}{3^{n-1}}x\right)-\frac{1}{3^n}g\left(\frac{1}{3^n}x\right)=\frac{1}{3^{2(n-1)}}x$,

以上各式相加，得 $g(x)-\frac{1}{3^n}g\left(\frac{1}{3^n}x\right)=x\left(1+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{9^{n-1}}\right)$.

因 $|g(x)|\leqslant 1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}g\left(\frac{1}{3^n}x\right)=0$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{9^{n-1}}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}$，因此 $g(x)=\frac{9}{8}x$，于是 $f(x)=\arcsin\frac{9}{8}x+2k\pi\left(\text{或}(2k+1)\pi-\arcsin\frac{9}{8}x\right)$，$k$ 为整数.

例 1.9　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^{33}-5n+18)(3^{n+1}-2^n)}{(2^{n+1}+3^n)(n^{17}-n+1)(4n^{16}-3n-8)}$.

解　分子、分母同除 $3^n\cdot n^{33}$，得

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{n^{32}}+\frac{18}{n^{33}}\right)\left[3-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\left[2\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]\left(1-\frac{1}{n^{16}}+\frac{1}{n^{17}}\right)\left(4-\frac{3}{n^{16}}-\frac{8}{n^{16}}\right)}=\frac{3}{4}.$$

例 1.10　设 l 是正整数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+l)}$.

解　因 $\frac{1}{k(k+l)}=\frac{1}{l}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+l}\right)$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+l)}=\frac{1}{l}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l}-\frac{1}{n+1}-\cdots-\frac{1}{n+l}\right),$$