普通高等学校理工科物理学类规划教材

大学物理（一）

主　编 詹卫伸
副主编 刘立钊 王　硕
王小风 崔　博

大连理工大学出版社

科物理学类规划教材

大学物理(一)

主　编　詹卫伸
副主编　刘立钊　王　硕
　　　　王小风　崔　博

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理. 一 / 詹卫伸主编. -- 大连 : 大连理工大学出版社，2019.1
普通高等学校理工科物理学类规划教材
ISBN 978-7-5685-1905-2

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①詹… Ⅲ. ①物理学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 022300 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84708943　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://dutp.dlut.edu.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:19.75　字数:506 千字
2019 年 1 月第 1 版　　2019 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑:王晓历　　责任校对:王凌翀
封面设计:张　莹

ISBN 978-7-5685-1905-2　　定　价:49.80 元

前　言

大学物理系列教材的适用对象为全国理工类大学生，目的是培养学生的自学能力，该系列教材内容翔实，分析透彻，可读性强。对于刚从高中跨入大学的新生而言，他们并不完全具备学习的主动性，也未适应大学的学习生活，还不具备自己查找资料的能力。大学物理作为一门基础课，应该为学生提供丰富的学习资料，培养学生自主学习和思考问题的能力。因此，编者对物理学基本原理进行全方位的讨论和剖析，开阔学生的视野；对例题进行充分的分析，启发学生的思路；同时，例题后面的“点评”非常详尽，内容丰富，旨在培养学生全面分析问题的能力。

使用本系列教材时应注意：为了使学生能够学在平时，应加强平时学习过程的考核。每周至少组织一次学生例题和作业题的小组讨论。本系列教材内容分为四个部分，大体学时相近，各部分可单独作为考试内容，每学期学习两部分并分两次考察。平时给学生合理“增负”，减小“期末”压力，有利于良好学风的形成，也能够促使学生养成平时学习的良好习惯，为后续课程的学习打好基础。

本系列教材将大学物理分为四篇：粒子、波、电磁场和量子力学，共16章。粒子和波的内容相对简单一些，一般安排在第二学期，学完高等数学一之后；电磁场和量子力学的内容相对难一些，一般安排在第三学期，学完高等数学二之后。

粒子篇从粒子性观点研究物体运动，共6章，包括质点机械运动的描述、质点、质点系、机械振动、相对论基础、理想气体系统。其中把“机械振动”作为质点机械运动的一种特殊形式，之所以将质点与质点系分开，是因为系统不同，研究方法也不同。将“热学”纳入“牛顿力学”体系，由于热力学系统内质点数非常大，所观测到的现象是微观粒子运动的宏观体现，研究方法也由牛顿力学方法过渡到统计平均方法，充分体现了由量变到质变的辩证关系原理。将热力学与气体分子动理论融为一体，体现了理论联系实际的原则，物理学理论是以实验为基础的理论。相对论部分作为质点运动的修正，表明物理学是发展的，是有活力的。

波动篇共4章，包括机械波与电磁波、光的干涉、光的衍射、光的偏振，充分展示了物理学观点之一：能量的传播。

电磁场篇共3章，包括静电场、恒定磁场、电磁场。以电场和磁场为例，阐述物理学的一大观点，物质以场的形式存在。

量子力学篇共3章，包括量子力学基础、量子力学基本原理、量子力学应用。量子力学基础部分从实验出发，逐渐建立“量子”概念：“光波”能量量子化→实物粒子能量量子化→实物粒子波动性。量子力学基本原理部分建立量子力学基本体系，适用于束缚态粒子运动的理论。量子力学应用部分：氢原子量子力学处理，确立量子力学的正确性；谐振子量子力学处理，量子力学成功地应用于束缚态系统；势垒穿透，量子力学成功地应用于非束缚态系统；原子组态，量子力学成功地应用于物质结构研究。

本系列教材理论体系清晰，以物理学的观点重新组织理论结构，充分体现物理学与数学不同，也与实验不同。物理学理论是从实践中抽象出来的理论，是物理学家和全人类集体智慧的结晶。

本系列教材合理地将“质点”与“质点系”分开,使得理论更清晰。将“热力学”与“分子运动学”有机结合在一起,并将之纳入“大质点系”,这是一种大胆的尝试,实践效果很好。传统的大学物理将“磁场能量”放在“电磁感应”之后,由自感电动势推出磁场能量。本教材将“磁场能量”提前至“恒定磁场”之后。由自感线圈的“贮能”推导出“磁场能量”,并绕开了“电磁感应”,而且与“电场能量”相呼应(电场能量由电容器贮能推导而来),实现了“电”和“磁”的完美对应。将“电磁感应”“位移电流”放在一起讲,充分展示“电”“磁”这一对矛盾统一体。变化的磁场产生电场,变化的电场产生磁场,完美地展示了麦克斯韦的电磁场理论。“场”以电磁场理论的建立过程为主线,从四大方程提出,到最后修正完毕,建立起麦克斯韦方程组和电磁场理论。根据教育部“物理学与天文学教学指导委员会”的要求,本系列教材扩充了有关量子物理的内容,比较完整地讲述了量子力学基本原理和基本应用。

本系列教材体现了物理学家的创造性思维。如“场”具有势,可以用标量空间点函数描述场;“位移电流”的假设以及变化的磁场产生电场和变化电场产生磁场;爱因斯坦由相对论动能公式,提出静止能量的概念;波尔由氢原子光谱的里德堡公式,提出原子能级和跃迁的概念。

本系列教材充分展现辩证唯物主义世界观。质点→质点系→理想气体系统,质点数目逐渐增加到“理想气体系统”,不但描述方法更新,而且研究和处理方法也随之改变。这就是“由量变到质变的飞跃”这一普遍原理的具体表现。物理学本来就是从哲学中分离出来的,是定量化的哲学,必须遵守哲学的普遍原理。

本系列教材是主编几十年教学经验的积累,部分内容来自主编读书时的笔记,全书由詹卫伸总执笔。主编阅读了大量的物理学教材和专著,如程守洙的《普通物理学》、吴百诗的《大学物理》、张三慧的《大学物理学》、陆果的《基础物理学》、漆安慎的《力学》、梁灿彬的《电磁学》、姚启钧的《光学教程》、李椿的《热学》、褚圣麟的《原子物理学》、周世勋的《量子力学》等,以及《中国大百科全书(物理卷)》和《大学物理》杂志。本系列教材中吸收了老前辈们的教学心得,对于引用的段落、文字尽可能一一列出,编者借此向老前辈们表示感谢。

《大学物理(一)》是大学物理系列教材的第一册,即“粒子”学说的前5章。本教材由大连理工大学詹卫伸任主编、大连理工大学刘立钊、王硕、王小凤、崔博任副主编。全书由詹卫伸统稿并定稿。刘立钊、王硕、王小凤、崔博负责书中文字部分的核对和素材整理。本书内容主要有质点机械运动的描述、质点、质点系、机械振动、相对论基础。详细讲述了牛顿力学中描述质点运动的物理量,质点运动的动力学,质点系运动的动力学,质点的特殊运动即机械振动的规律,爱因斯坦狭义相对论力学等。

本系列教材的出版得到了大连理工大学盘锦校区教学事务部的大力支持,特别感谢贺明峰教授和李雪春教授对本系列教材出版的关怀。

由于编者水平有限,疏漏之处在所难免,真诚希望阅读此书的老师和同学们多提宝贵意见。

编 者

2019 年 1 月

所有意见和建议请发往:dutpbk@163.com　zhanwsh@dlut.edu.cn
欢迎访问教材服务网站:http://www.dutpbook.com
联系电话:0411-84708445　84708462

目 录

第一章 质点机械运动的描述

自然界中的所有物体都处于运动之中，运动的形式是多种多样的。物体最普遍也是最简单的运动是机械运动，即宏观物体之间或物体内部不同部分之间相对位置随时间改变的过程。物体做机械运动时，其运动状态就会发生变化。定量描述物体运动状态的物理量主要有位置矢量、速度矢量合加速度矢量以及运动轨道。研究物体运动状态和运动状态随时间变化的物理学方法称为运动学。运动学研究物体机械运动的几何性质，不涉及引起运动和运动状态变化的原因。运动学的主要任务就是研究物体运动状态随时间演化的规律。

为了研究物体的运动，不仅需要确定描述物体运动的物理量，还要对复杂的物体运动进行科学合理的抽象，即建立物理模型，以便突出主要矛盾。为此，常把实际物体近似地简化为与实际物体及其运动相近的理想模型。研究这一理想化模型的机械运动规律，近似于研究实际物体的基本机械运动规律。然后，把这些规律与实际情况相比较，并不断修改物理模型，使模型逐渐与实际相符合。这也是物理学不断发展的模式。在物理学中，最简单的理想化模型是质点模型，将宏观物体抽象为一个具有一定质量的空间点。

为了描述质点的运动状态，需要建立物体运动的参考物体，即参考系；为了使用数学工具定量地描述物体机械运动状态和研究机械运动状态随时间的变化，还要在参考系上建立一个坐标系。选作参考的物体是多种多样的，可以分为惯性参考系和非惯性参考系。坐标系也有多种选择，主要有直角坐标系、柱坐标系和球坐标系以及自然坐标系。

第一节 质点位置的描述

一、质点

任何物体都有一定的大小、形状和内部结构。一般说来，当物体做机械运动时，物体内部各点的运动状态是各不相同的，物体的形状和大小也可能发生变化。如果在所研究的问题中，物体上各点运动状态的不同只占很次要的地位，我们就可以忽略物体的大小、形状和内部结构，把它看成一个只有一定质量的物理意义上的几何点，称为**质点**。把物体看作质点来处理的力学称为**质点力学**。研究质点运动状态及其随时间变化的质点力学称为质点运动学；研究质点运动状态变化物理机制的质点力学称为质点动力学。

忽略物体的大小和形状，把物体看作质点，是为了简化问题，在客观物质世界中，质点是不存在的。一个物体可以被看作质点的条件为，在研究这个物体的运动规律时，其体积大小和形状对问题的研究没有影响，但质量却是影响运动的主要因素。质点这一理想化模型，突出了实际物体的质量和空间位置等主要的物理特征。一个做机械运动的物体是否能够被抽象为一个

质点,是有条件的,取决于物体本身的尺寸和那些对于所研究的问题具有最重要意义的运动区域的大小以及物体的运动特性。同一个物体,在不同的问题中有不同的处理方式。

物体在运动过程中不变形、不做转动,物体上各个点的速度和加速度都相同,物体上任何一点都可以代表所有点的机械运动,即物体上所有点的运动规律相同,那么只研究物体上的一小部分(点)的机械运动就可以了。我们可以将做这样的机械运动的物体的全部质量集中在质心处,而把物体看作一个物理上的几何点,研究质心的机械运动,就代表了整个物体的机械运动。例如,沿铅直轨道高速运动的动车(刚体),各个部分没有相对的运动,尽管是个庞然大物,仍可以看作是一个质点;但是,如果我们要研究动车各个车厢之间的相对运动,就不能再将整个动车看作一个质点了。再如,在空中飞行的飞碟,如果只研究飞碟整体的飞行轨迹,就可以将飞碟看作是一个质点;但是,如果要研究飞碟在空中的转动,就不能再将飞碟看作是一个质点了。

物体本身的线度与它的运动范围相比小得多,此时物体的形变及转动显得并不重要,可以将物体看作质点。例如,研究地球绕太阳的公转时,可以把地球看作质点;而讨论地球的自转时,就不能把地球看作质点。

质点是物理学上一个十分有用的理想模型,是从客观实际中抽象出来的理想模型。一些实际的物体,如刚体、流体、弹性体、理想气体,一般说来不能把整个研究对象看作质点,但可以把它们当作是由大量质点组成的,这样,通过研究单个"质点"的机械运动,再把单个质点的机械运动整合起来,就有可能了解整个研究对象的运动规律。因此,研究质点的机械运动规律是研究一般物体运动规律的基础。

在科学研究中,建立理想模型是经常采用的一种科学思维方法。在物理学上,为了能够研究物体的运动规律,根据所研究问题的性质,突出主要因素,忽略次要因素,常把实际物体近似地简化为与实际物体及其运动相近的理想模型。对理想模型研究清楚后,再逐渐将次要因素加进来,使研究逐渐深入,使得研究逐渐接近实际,即"实践—理论—再实践—再理论"这一反复的过程。值得注意的是,任何一个理想模型都有它的适用条件,模型能否正确反映客观实际,还要通过实践来检验。

二、参考系和坐标系

物体的机械运动是指它的位置随时间的改变。位置总是相对的,任何一个物体在空间的位置只能相对地确定,物体在空间的位置随时间的变化,也只具有相对的意义。这就是说任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的。因此,在研究物体间的相对位置的变化时,必须事先选定某一个参考物体,以便确定其他物体相对于这个物体的位置的变化。如果对于某个参考物体而言,物体在空间的位置随时间而变动,则说物体相对于这个参考物体是运动的,否则是静止的。例如,确定交通车辆的位置时,我们用固定在地面上的一些物体,如房子或路牌做参考物。这个为了描述物体的位置以及位置随时间变化而被事先所选定的物体称为参考体。与参考体固连在一起的整个延伸空间称为**参考系**。

一般来说,任何一个物体都可选为参考体。但是,一个物体的运动相对于不同的参考体可表现为不同的运动形式。例如,一个被固定于运动着的车厢内的物体,当把车厢取为参考体时,物体相对于车厢是不动的,但当把地球取为参考体时,物体与车厢以相同的轨迹和速度运动着。因此,只有在选定参考体的情况下,才能明确地说明物体的运动情况。如图 1-1 所示,常见的参考系有地球(地面)参考系、地心参考系和太阳参考系。在日常生活和工程实际中通

常都选地球为参考体。

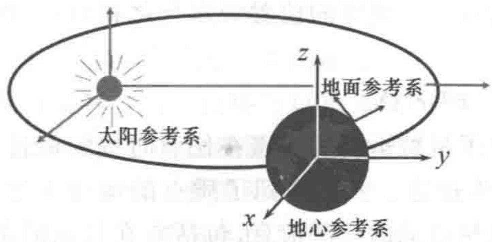

图 1-1　参考系和坐标系

选择合适的参考体,可以简化物体机械运动的描述,便于探索运动的规律。历史上地心说和日心说的争论就证明了这一点。地心说以地球为参考体,地球静止于宇宙中心,用一切天体都围绕地球转动的观点来描述天体的运行。为了使对天体机械运动的描述符合天文观察事实,假设一切行星和恒星等天体除了做每天绕地球一周的圆周运动外,各自还要在一个称为“本轮”的小圆形轨道上做匀速圆周运动,本轮中心又要以一年为周期在称为“均轮”的圆周上做匀速运动,且均轮中心同地球中心不能相合,需相隔一段距离。由于天文观察越来越精确,出现了一些与上述理论相矛盾的问题。为了解释新的观测结果,不得不在本轮之上再加本轮。对如此复杂的运动体系,无法建立一个统一的理论。哥白尼以太阳为参考体,简化了行星运动的描述;开普勒又引入椭圆轨道,发现了开普勒三定律;牛顿在此基础上建立了万有引力理论。因此没有哥白尼提出的以太阳为中心的参考系,就不可能有辉煌的经典力学体系。

为了研究的方便,对同一物体在不同条件下的运动可以选用不同的参考系。例如,从地面上发射火箭到月球上,在发射的初期,地球引力起主要作用,采用地心参考系;发射的中途,地球、月亮引力的影响都不能忽略时,采用地月系统的质心参考系处理;当火箭绕月转动时,可采用月心参考系处理。又如在处理加速器中运转的被加速粒子的机械运动时,一般采用实验室参考系处理;当这高速运动的粒子撞击靶上的原子核时,采用质心参考系处理。

为了定量地描述物体(质点)相对于参考系的位置以及位置随时间的变化,需要在参考系上建立一个固定的**坐标系**,用坐标值来表示质点的位置以及物体的机械运动。坐标系是参考系的数学定量表述,是由实际物体构成的参考系的数学抽象。如图 1-1 所示,常用的坐标系是笛卡尔直角坐标系 $Oxyz$,该坐标系的原点 O 是所选参考体中的任意一个固定点;从 O 点沿任意三个互相垂直的方向画出坐标轴 Ox,Oy,Oz,并使它们组成右手坐标系。于是,物体上任意一点 P 的位置可以用它到坐标平面 yOz,zOx,xOy 的距离(x,y,z)三个数来表示。(x,y,z)的不同数值便表示点 P 的不同位置。如果已知物体中任意一点 P 在坐标系 $Oxyz$ 中的位置(x,y,z)随时间的变化规律,便确定了物体相对于参考系的运动。根据所研究问题的特性,还可以选用其他坐标系,如平面极坐标系、球坐标系或柱坐标系等。

三、质点的位置矢量

描述质点的运动,首先要描述质点在空间的位置。质点的位置可以用矢量的概念清楚地表示出来。为了表示质点在时刻 t 的位置 P,我们从原点向此点引一有向线段 OP,并记作矢量 $\boldsymbol{r}(t)$,如图 1-2 所示。$\boldsymbol{r}(t)$的方向说明了 P 点相对于坐标轴的方位,$\boldsymbol{r}(t)$的大小(即该矢量的模)表明了 P 点到原点的距离。方位和距离都知道了,P 点的位置也就确定了。

空间的每一个质点的位置,都有唯一确定的矢量 $\boldsymbol{r}(t)$与其对应,矢量 $\boldsymbol{r}(t)$与质点的空间位置一一对应。因此,$\boldsymbol{r}(t)$可以唯一地描述质点的空间位置。用来确定质点空间位置的这一矢

量 $\boldsymbol{r}(t)$ 称为质点的**位置矢量**，简称**位矢**，也称为**径矢**。

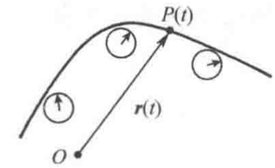

图 1-2 用位矢表示质点的位置

质点运动的每一时刻，均有一个确定的位置矢量与之相对应，即位置矢量是时间的函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1-1}$$

称为质点的运动方程，它给出了机械运动的质点在任意时刻的位置，是对质点机械运动过程的数学描述。一旦得到了质点的运动方程，再加上初始条件，那么质点机械运动的全部信息，包括它在任意时刻的速度、加速度以及运动轨迹等，就被唯一确定了。因此，质点运动方程隐含了质点机械运动几何性质的全部信息。

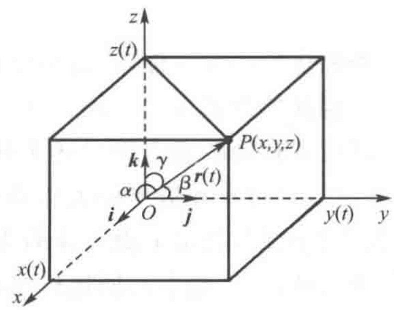

图 1-3 在直角坐标系中表示质点的位置

也可以在坐标系中用坐标值表示质点的位置，常用的坐标系是直角坐标系。如图 1-3 所示，质点的位置用一组坐标值 $P(x,y,z)$ 表示。坐标值与位置矢量的关系为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-1-2}$$

其中，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x,y,z 轴正方向的单位矢量。式(1-1-2)所表示的关系称为质点的运动方程（运动函数）在直角坐标系中的具体表示。

位置矢量的大小，即质点到原点的距离在直角坐标系中表示为

$$r(t)=|\boldsymbol{r}(t)|=\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2+[z(t)]^2} \tag{1-1-3}$$

令 α,β,γ 分别表示位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 x,y,z 三个坐标轴的夹角，则三个方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|} \tag{1-1-4}$$

表示了位置矢量的方向，即质点在直角坐标系中的方位。

质点运动时所经过的路线称为轨迹，质点运动的轨迹所满足的空间坐标曲线方程，称为**轨迹方程**。实际上，在质点的运动函数中消去时间参量 t 所得到的 x,y,z 满足空间曲线方程

$$f(x,y,z)=C \tag{1-1-5}$$

就是质点运动的轨迹方程。实际上，质点机械运动的轨迹就是质点位置矢量的矢端在空间画出的曲线。如果质点的运动轨迹为直线，则称质点做直线运动；如果质点的运动轨迹为圆，则称质点做圆周运动；如果质点的运动轨迹为曲线，则称质点做曲线运动。

第二节 质点运动的一般描述

质点做机械运动，质点在空间的位置就会发生变化，表现为位置矢量随时间的变化，这种位置矢量的变化用位移这一物理量表示；描述质点位置矢量变化的物理量是速度；描述质点运动速度变化的物理量是加速度。质点的位置矢量、位移、速度、加速度等称为描述质点机械运动状态的基本物理量。

一、位移

质点在做机械运动时，空间位置的变化，用连接质点先后两个位置的有向线段表示。如图 1-4所示，t 时刻质点运动到 $A(t)$ 点，其位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t)$；$t+\Delta t$ 时刻质点运动到 $B(t+\Delta t)$

点，其位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，则质点在这一时间间隔 Δt 内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-2-1}$$

质点在某一时间段内的位移等于这段时间内质点位置矢量的增量。

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是矢量，既有大小又有方向。位移与位置矢量不同，位置矢量描述某一时刻质点的位置，而位移则是描述质点机械运动的物理量，描述的是某一时间段始末质点位置变化的总效果，不涉及质点位置变化过程的细节。要说明的是，对于相对静止的坐标系，位置矢量的数学表述与选取的坐标系有关，而位移矢量与坐标系的选取无关。

位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与位置矢量大小的增量一般是不相等的。如图 1-4 所示，时间 $t\rightarrow t+\Delta t$ 内位置矢量大小的增量为

$$\Delta r=|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)|-|\boldsymbol{r}(t)|\neq|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|=|\Delta\boldsymbol{r}| \tag{1-2-2}$$

以 O 为圆心，以位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 的大小为半径作圆弧，与位置矢量 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 相交于 C 点，则在时间间隔 Δt 内，位置矢量大小的增量 Δr 等于线段 CB 的长度；而在该时间间隔 Δt 内，位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小为线段 AB 的长度。一般情况下，两者显然是不同的。

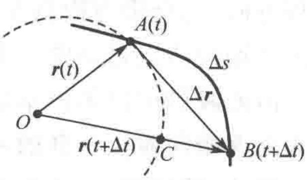

图 1-4　质点运动的位移与路程

要特别注意的是，位移描述的是质点空间位置的变化，不是质点所经历的路程。首先，位移是矢量，而路程是标量；另外，一般来说，位移矢量的大小也不等于路程。如图 1-4 所示，质点在时间间隔 Δt 内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小为线段 AB 的长度 $|\Delta\boldsymbol{r}|$，而质点在该时间间隔 Δt 内所经历的路程则为曲线长度 Δs，两者的大小显然是不同的。一个有趣的例子是，质点做圆周运动，从出发点运动一周回到出发点，质点经历的路程为圆周长，而质点的位移为零。当然，在时间间隔趋于零的极限条件下，质点位移矢量的大小趋于质点所经历的路程。

二、速度

质点在做机械运动时，不仅空间位置要发生变化，而且运动的方向也可能发生变化。速度是描述质点机械运动时，质点位置和运动方向变化快慢的物理量。

如图 1-5 所示，质点沿轨迹 AB 做一般的曲线运动，在 $t\rightarrow t+\Delta t$ 时间间隔内，质点的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，则在 $t\rightarrow t+\Delta t$ 时间间隔内质点运动的平均速度为

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{1-2-3}$$

平均速度是矢量，其大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|=\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\frac{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}{\Delta t} \tag{1-2-4}$$

其方向就是质点在 $t\rightarrow t+\Delta t$ 时间间隔内位移的方向。平均速度描述了质点在时间间隔 Δt 内质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 随时间的变化率。时间间隔 Δt 不同，平均速度的大小和方向也不同，因此，平均速度只能对时间间隔 Δt 内质点位置随时间变化的情况做粗略的描述。

为了精确地描述质点位置变化的快慢和运动方向的变化，可以将时间间隔 Δt 取的逐渐减小，质点的平均速度就会逐渐接近 t 时刻质点的速度。当 Δt 趋于零时，平均速度的极限，即质点位置矢量对时间的变化率，在数学上即为位置矢量对时间的一阶导数，称为质点在时刻 t 的瞬时速度，简称速度。用 $\boldsymbol{v}$ 表示速度，就有

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1-2-5}$$

速度是矢量,其方向就是 Δt 趋于零时 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向。只要知道了用位置矢量表述的质点运动学方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,就可以求出质点的机械运动的速度。

速度矢量的大小称为速率,反映了 t 时刻质点机械运动的快慢。用 v 表示速率,就有

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \tag{1-2-6}$$

速度矢量的方向反映了 t 时刻质点运动的方向。时间间隔 Δt 内质点运动平均速度的方向就是质点在该时间间隔 Δt 内的位移的方向。时间间隔 Δt 逐渐减小,Δt 趋于零时,可以利用平均速度的极限来寻找瞬时速度的方向。如图 1-5 所示,取时间间隔逐渐减小,$\Delta t(AB)>\Delta t(AC)>\Delta t(AD)$,观察平均速度的方向(也就是位移方向)的变化,当时间间隔 Δt 趋于零时,平均速度的方向(也就是位移方向)的极限方向就是质点运动轨迹在 A 点的切线方向并指向质点运动的一方。这一方向就是质点运动到 A 点或 t 时刻质点运动或速度的方向。由此我们可以得出结论,t 时刻质点机械运动速度的方向,沿着该时刻质点运动轨迹的切线方向并指向质点运动的一方。

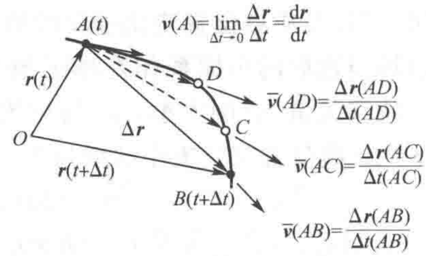

图 1-5　质点运动的速度

当 Δt 趋于零时,质点位移矢量的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与路程 Δs 趋于相同,因此可以得到

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-2-7}$$

这就是说速率又等于质点所走过的路程对时间的变化率。

三、加速度

质点做机械运动时,它的速度的大小和方向都有可能随时间变化。加速度就是描述质点运动速度随时间变化的物理量。

如图 1-6 所示,t 时刻质点运动速度为 $\boldsymbol{v}(t)$;$t+\Delta t$ 时刻质点运动速度为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$。在 $t\to t+\Delta t$ 时间间隔内,质点运动速度的增量为

$$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t) \tag{1-2-8}$$

则在 $t\to t+\Delta t$ 时间间隔内质点运动的平均加速度为

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \tag{1-2-9}$$

平均加速度也是矢量,其大小为

$$\overline{a}=|\overline{\boldsymbol{a}}|=\left|\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}\right| \tag{1-2-10}$$

平均加速度与一定的时间间隔 Δt 相对应,其大小反映了时间间隔 Δt 内速度变化的快慢,只能对质点速度随时间变化的情况进行粗略的描述。

当 Δt 趋于零时,平均加速度的极限,即质点运动速度对时间的变化率,在数学上即为速度矢量对时间的一阶导数,或位置矢量对时间的二阶导数,称为质点在 t 时刻的瞬时加速度,简称加速度。用 $\boldsymbol{a}$ 表示加速度,就有

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-2-11}$$

加速度是矢量,其大小描述了速度矢量变化的快慢。如图 1-7 所示,在速度空间,速度矢

量的矢端描绘的曲线称为速度端图。加速度的方向沿速度曲线的切线方向,并且指向与 t 增加相对应的方向。在后面,我们将看到,加速度的方向包含丰富的质点运动信息。

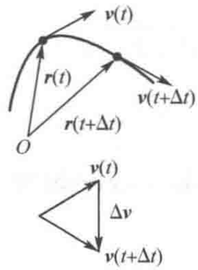

图 1-6　质点运动的加速度

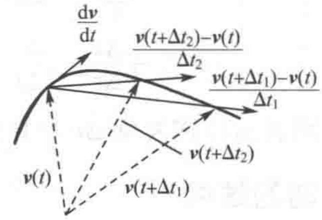

图 1-7　速度端图描述的加速度方向

第三节　质点运动的直角坐标系描述

质点的机械运动状态,也可以在坐标系中表示出来,即用坐标值及其随时间的变化描述质点的机械运动状态。质点的机械运动状态在坐标系中的表示也称为运动状态在坐标系中沿坐标轴的投影或称为在坐标轴方向的分量。最直观的坐标系是笛卡尔直角坐标系。

一、质点的位移矢量

第一节已经述及,在直角坐标系 $Oxyz$ 中,质点的位置矢量端点坐标值(x,y,z)与位置矢量一一对应,因此,可以用坐标值(x,y,z)代替位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示质点的位置。其中的坐标值 $x(t),y(t),z(t)$分别称为位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$在直角坐标系中沿三个坐标轴的分量。

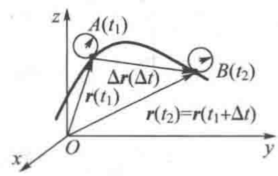

图 1-8　位移矢量在直角坐标系中的表示

质点的位移也可以用直角坐标值表示,如图 1-8 所示,在 $t_1 \to t_2 = t_1 \to t_1 + \Delta t$ 时间间隔内,质点沿曲线轨迹由 $A(t_1)$运动到 $B(t_2)$。t_1 时刻质点的位置矢量$\boldsymbol{r}(t_1)$可以用位置矢量端点的坐标值$(x(t_1),y(t_1),z(t_1))$表示,t_2 时刻质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}(t_2)$可以用位置矢量端点的坐标值$(x(t_2),y(t_2),z(t_2))$表示,则在时间间隔 $t_1 \to t_2 = t_1 \to t_1 + \Delta t$ 内质点的位移可以用三个坐标值之差 $\Delta x(\Delta t) = x(t_2) - x(t_1)$,$\Delta y(\Delta t) = y(t_2) - y(t_1)$,$\Delta z(\Delta t) = z(t_2) - z(t_1)$表示,称为质点的位移矢量在直角坐标系 $Oxyz$ 中三个坐标轴方向的分量或投影。因此,质点在时间间隔 $t_1 \to t_2 = t_1 \to t_1 + \Delta t$ 内的位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}(\Delta t)$在直角坐标系中表示为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}(\Delta t) &= [x(t_2)-x(t_1)]\boldsymbol{i}+[y(t_2)-y(t_1)]\boldsymbol{j}+[z(t_2)-z(t_1)]\boldsymbol{k}\\ &= \Delta x(\Delta t)\boldsymbol{i}+\Delta y(\Delta t)\boldsymbol{j}+\Delta z(\Delta t)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-3-1}$$

质点的位移矢量等于位移矢量在直角坐标系 $Oxyz$ 中三个坐标轴方向的分量的矢量合。位移矢量的大小在直角坐标系中表示为

$$\begin{aligned}\Delta r(\Delta t) &= |\Delta\boldsymbol{r}(\Delta t)| = \sqrt{[x(t_2)-x(t_1)]^2+[y(t_2)-y(t_1)]^2+[z(t_2)-z(t_1)]^2}\\ &= \sqrt{[\Delta x(\Delta t)]^2+[\Delta y(\Delta t)]^2+[\Delta z(\Delta t)]^2}\end{aligned} \tag{1-3-2}$$

位移矢量的方向在直角坐标系中表示为

$$\begin{cases}\cos\alpha_1=\dfrac{\Delta x}{\Delta r}=\dfrac{\Delta x}{|\Delta \boldsymbol{r}|}=\dfrac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\\ \cos\beta_1=\dfrac{\Delta y}{\Delta r}=\dfrac{\Delta y}{|\Delta \boldsymbol{r}|}=\dfrac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\\ \cos\gamma_1=\dfrac{\Delta z}{\Delta r}=\dfrac{\Delta z}{|\Delta \boldsymbol{r}|}=\dfrac{\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\end{cases}\tag{1-3-3}$$

式中，α_1，β_1，γ_1 分别表示位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的夹角。

二、质点运动的速度

在直角坐标系中，质点机械运动的速度$\boldsymbol{v}$ 表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{v}_x+\boldsymbol{v}_y+\boldsymbol{v}_z\tag{1-3-4}$$

式中，$\boldsymbol{v}_x$，$\boldsymbol{v}_y$，$\boldsymbol{v}_z$ 分别表示沿直角坐标系 $Oxyz$ 三个坐标轴 x，y，z 轴方向的分速度。质点的速度$\boldsymbol{v}$ 是各分速度的矢量合。质点运动的速度$\boldsymbol{v}$ 沿某一坐标轴的分速度，等于质点对应于该坐标轴的坐标值对时间的一阶导数。质点速度$\boldsymbol{v}$ 沿直角坐标系三个坐标轴的投影为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\tag{1-3-5}$$

在直角坐标系中，质点运动速度的大小即运动速率表示为

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2+(v_z)^2}\tag{1-3-6}$$

质点运动速度的方向表示为

$$\begin{cases}\cos\alpha_2=\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}=\dfrac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2}}\\ \cos\beta_2=\dfrac{v_y}{v}=\dfrac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2}}\\ \cos\gamma_2=\dfrac{v_z}{v}=\dfrac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}=\dfrac{\mathrm{d}z/\mathrm{d}t}{\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2}}\end{cases}\tag{1-3-7}$$

式中，α_2，β_2，γ_2 分别表示速度$\boldsymbol{v}$ 与直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的夹角。

三、质点运动的加速度

在直角坐标系中，质点机械运动的加速度表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z\end{aligned}\tag{1-3-8}$$

式中，$\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$ 分别表示沿直角坐标系三个坐标轴方向的分加速度。质点运动加速度沿直角坐标系三个坐标轴的投影分别为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\tag{1-3-9}$$

质点运动的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是各分速度的矢量合。

在直角坐标系中，质点运动的加速度大小表示为

$$a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}\tag{1-3-10}$$

质点运动加速度的方向表示为

$$\begin{cases}\cos\alpha_3=\dfrac{a_x}{a}=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}}\\ \cos\beta_3=\dfrac{a_y}{a}=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}}\\ \cos\gamma_3=\dfrac{a_z}{a}=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}}\end{cases}\tag{1-3-11}$$

式中，α_3，β_3，γ_3 分别表示加速度 $\boldsymbol{a}$ 与直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的夹角。

如果我们知道了用直角坐标系表示的质点运动学方程，即位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 在直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的投影

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)\tag{1-3-12}$$

我们就可以知道任意时间间隔内质点运动的位移矢量的大小和方向；位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 在直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的投影对时间求一阶导数，就可以得到质点运动速度在直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的投影 v_x，v_y，v_z，进而得到质点运动速度的大小和方向；位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 在直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的投影对时间求二阶导数，或者，质点运动速度在直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的投影 v_x，v_y，v_z 对时间求一阶导数，就可以得到质点运动加速度在直角坐标系三个坐标轴 x，y，z 轴的投影 a_x，a_y，a_z，进而得到质点机械运动加速度的大小和方向。如果我们知道了用直角坐标系表示的质点运动学方程，就可以获得质点机械运动状态的全部信息，因此，寻找质点运动学方程是质点运动学的核心问题。

要特别指出的是，选用直角坐标系描述质点的机械运动状态之所以如此直观和简洁，是因为直角坐标系是固定坐标系，该坐标系沿三个坐标轴的单位矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的大小和方向都不随时间变化，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=0,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=0,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=0\tag{1-3-13}$$

因此，位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 对时间求导时，不涉及对方向（矢量）的求导，使得求导比较简单。如果选用其他坐标系，如柱坐标系、球坐标系、平面极坐标系和自然坐标系，随着质点位置矢量的不同，沿坐标轴的单位矢量的方向是不同的，对时间求导时，就要包括对方向的求导。

第四节　质点平面运动的自然坐标系描述

直角坐标系描述质点的机械运动状态非常直观，但它掩盖了质点机械运动状态的详细信息。如果质点在一平面内运动并且已知质点运动的轨迹，则自然坐标系对于研究质点的机械运动是一个实用的坐标系。使用自然坐标系描述质点的机械运动状态，可以揭示质点运动状态更详细的信息，特别是对质点做曲线运动时的加速度的描述更为透彻。

一、自然坐标系描述质点的位置

质点在一个平面内做曲线运动需要两个独立的标量函数或坐标来描述其位置。在平面直角坐标系中可以用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 来描述，如果质点平面运动轨迹确定，$y=y(x)$，则 x,y 中只有一个是独立的，仅用一个标量函数或坐标值就能确切地描述质点的位置和质点的运动。在这种情况下，选用自然坐标系来描述质点的运动更方便。

如图 1-9 所示，沿质点运动轨迹建立一个弯曲的“坐标轴”，选择轨迹上一点 O 为“原点”，并用由原点到质点所在位置的曲线长度 s 作为质点位置坐标值。则质点位置随时间的变化即质点运动学方程为

$$s=s(t) \tag{1-4-1}$$

这里的弧长 s 称为自然坐标。值得注意的是，这里的弧长 s 是可正可负的。如图 1-9 所示，一般规定沿质点运动方向为 s 的正方向，以原点 O 为界，如果质点位于运动的前方，s 为正；如果质点位于运动的后方，s 为负。

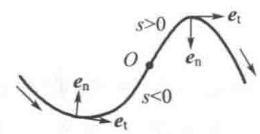

图 1-9　用自然坐标系表示质点的位置

如图 1-9 所示，再建立两个单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$，则原点 O、坐标值 s 和单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$，$\boldsymbol{e}_n$ 就构成了自然坐标系。其中，单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 沿质点运动轨迹曲线的切线方向并指向质点运动方向，称为切向单位矢量；单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 沿质点运动轨迹曲线的法线方向并指向质点运动曲线的凹侧，即指向质点运动曲线的曲率中心，称为法向单位矢量。可见，切向单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 与法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 是正交的，任何矢量，包括质点运动的速度和加速度都可以向 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 的方向做正交分解。注意：直角坐标系中沿坐标轴的单位矢量是恒定矢量，其大小和方向都是不随时间或质点的运动变化的；而自然坐标系中的两个单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 不是恒定矢量，它们的大小尽管不变，但它们的方向将随质点在轨迹上的位置不同而改变。实际上，可以将自然坐标系看作是与质点运动的轨迹固连在一起的坐标系。

二、自然坐标系描述质点运动的速度

如图 1-10 所示，质点沿曲线运动，t 时刻质点位于 A 点，自然坐标值为 $s(t)$，位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t)$；$t+\Delta t$ 时刻质点位于 B 点，自然坐标值为 $s(t+\Delta t)$，位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$。即在 $t\to t+\Delta t$ 时间间隔内质点的自然坐标值（弧长）和位移为

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t),\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

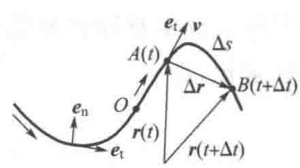

图 1-10　用自然坐标系表示质点的速度

根据质点运动速度的定义，有

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，B 点趋近于 A 点，因此 $|\Delta\boldsymbol{r}|\to\Delta s$；同时，质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 矢量的方向也趋近于 A 点处质点运动轨迹的切线方向 $\boldsymbol{e}_t$。因此得到

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|\boldsymbol{e}_t=\boldsymbol{e}_t$$

另外，在这里，我们已经取 s 增加的方向为质点运动的方向，即 $\Delta s>0$，即 Δs 就是弧长的增量，因此质点运动的速率和速度分别表示为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t=v\boldsymbol{e}_t \tag{1-4-2}$$