

二十一课堂

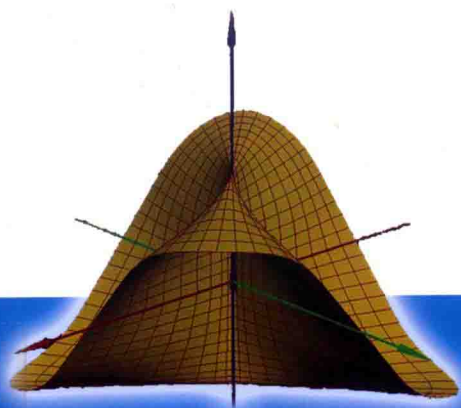
www.21ketang.com

数一、数二、数三通用

考研数学复习全书

(2020版)

小元老师 郭伟 编



形象、趣味、透彻 夯实基础
系统、简洁、精选 快速提高

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

数一、数二、数三通用

考研数学复习全书

(2020 版)

小元老师 郭 伟 编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书内容是围绕考试大纲和历年真题编写的,每个章节都由知识讲解部分和题型总结部分构成,包含考研数学数一、数二、数三所有知识点、题型。本书尽量多用图像、顺口溜、趣味性比喻等方法讲解知识点;书中例题含金量高,解题思路与方法完整,总结细致,实用性强。通过本书学习可以帮助读者建立完善的理论体系和方法体系,缩短学习时间,让数学不再可怕和晦涩难懂。

本书文中附有二维码的地方,可以微信扫描进入视频课程。

本书既适合考生应试备考,也适合数学爱好者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书:数一、数二、数三通用/小元
老师,郭伟编.—北京:中国石化出版社,2019.3
ISBN 978-7-5114-5230-6

I. ①考… II. ①小… ②郭… III. ①高等数学-研
究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 040007 号

未经本社书面授权,本书任何部分不得被复制、抄袭,或者以任何形式或任何方式传播。版权所有,侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址:北京市朝阳区吉市口路9号

邮编:100020 电话:(010)59964500

发行部电话:(010)59964526

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail:press@sinopec.com

北京柏力行彩印有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 35 印张 867 千字
2019年4月第1版 2019年4月第1次印刷
定价:88.00元(共两册)

前 言

一、内容介绍

本书内容是围绕考试大纲和真题题型总结编写的。总结了数一、数二、数三的所有知识点，并有知识点详解。对考研真题题型有完善的归纳。考纲的特点是划定的范围偏大，很多内容并不考。很多大学数学课的内容就是围绕考研数学大纲规划的，就是为了方便学生考研。如果考研大纲范围随意缩小，大学的教学内容和质量就会降低，所以大纲一般都是多年不变的。

那么考研真题就成为大家复习考研最珍贵的考研资料了，因为那里的题型、知识点是重复率最高的。本书内容紧扣近20年真题的同时，所举的例子都避开2004—2019真题原题。这是因为这些真题是留给大家暑假后自己模拟、测试、练习用的。如果在平时将这些比较新的真题讲了，大家学完就很难了解自己学习的真实水平。

考研数学目前出题的特点是：难度中等，计算量大。同学们容易出现的学习误区是：认为自己知识都学会了，但计算能力、熟练程度没达到要求。自我感觉考试能考130⁺，但是一上考场，才不到100分。很多题目看着会，但在规定时间算不出来、算不对。因此真题的原题一定要留着让大家自己测试，按照标准考试时间，看看能做到多少分。

这样也形成一个辅导书使用的原则：如果这个辅导书使用了很多最新真题的例子，那就容易打破大家全盘的复习规划，造成什么都学会了的错觉；真题练习每套都是140⁺，那是因为在这样的辅导书里这些题平时都研究了，浪费掉了。这样去考试很可能成绩大失所望。

用2003之前的真题的好处是：题目的质量高，综合性强，答案是官方公布的肯定准确。那么从中挑取一部分举例解析某知识点最好用了。但是2003之前的真题对大家了解最近的考试并没多大帮助，里面有很多最近不考的题型、考点，这些题就不会选进强化班的例子，大家也不用看了。

本讲义避开2004—2019真题原题，但同时又对这些真题的题型、知识点作了总结，找了很多类似的题目讲解，并且覆盖考纲。这样大家学完后，再结合真题，就能完美地掌握考研数学了。

二、本书特点

本书特点是：尽量多用图像、顺口溜、趣味性的方法讲解知识点；尽量用

更细致的、更全面的总结归纳考点、题型。

本书比较有特点的章节有：泰勒公式、定积分、反常积分、多元函数微分、多元函数积分、曲线曲面积分、无穷级数、线性代数的几何解释、概率中的卷积公式、点估计、假设检验，总结的比较好的有：极限存在准则、极限的题型、微分中值定理、行列式的求解、概率论中的事件之间的关系、函数的分布。

文中附有二维码的地方，可以微信扫描进入视频课程，但仍然是基础班视频，后续更新录播强化视频。视频中的素材皆为彩色，有的是动画，更生动，更形象，供大家参考。

本书如有增补、勘误，可在微信公众号“小元老师”，回复“全书勘误”获取。对本书有任何建议或发现错误，欢迎在勘误文章处提出。

希望大家在学习数学中找到乐趣，真正掌握所有的基本考点！

小元老师

打开微信学数学

形象、趣味、透彻，不信你来看看呀



微信公众号：
小元老师



B站(bilibili.com)
@小元老师

目 录

CONTENTS

高等数学

第一讲 函数、极限、连续	(1)
大纲要求	(1)
知识讲解	(1)
题型一 函数的概念与性质	(2)
题型二 夹逼定理	(5)
题型三 单调有界准则	(6)
题型四 无穷小的比较	(10)
题型五 普通未定式求极限	(12)
题型六 必须考察左、右极限的几种函数	(12)
题型七 已知极限值, 极限中待求常数的求法	(13)
题型八 无限项之积的极限的求法	(13)
题型九 讨论分段函数在分段点处的连续性	(16)
题型十 讨论极限函数的连续性	(16)
题型十一 间断点的判断	(16)
题型十二 闭区间上连续函数性质的应用	(16)
第二讲 导数与微分	(18)
大纲要求	(18)
知识讲解	(18)
题型一 导数的概念与定义	(19)
题型二 求导法则	(21)
题型三 分段函数可导性的判别及其导数得求法	(22)
题型四 绝对值函数的可导性判断及导数求法	(22)
题型五 高阶导数	(24)
第三讲 微分学中值定理及其应用	(25)
大纲要求	(25)
知识讲解	(25)
题型一 出现一个中值的中值等式命题的证法	(29)
题型二 两个或两个以上中值的中值等式证法	(31)

题型三	中值不等式命题的证法	(31)
题型四	区间上成立的函数不等式的证法	(32)
题型五	利用函数的性态讨论方程根的个数	(32)
题型六	利用洛必达法则求极限	(34)
题型七	利用泰勒公式求极限	(37)
题型八	求最值	(41)
题型九	凹凸性与拐点	(41)
题型十	渐近线	(43)
第四讲	不定积分	(44)
大纲要求		(44)
知识讲解		(44)
题型一	原函数问题	(45)
题型二	第一换元法(凑微分法)的常见类型	(48)
题型三	用分部积分法求不定积分的技巧	(52)
题型四	有理函数积分的计算(数一、数二)	(55)
题型五	无理函数的不定积分的求法	(55)
第五讲	定积分及应用	(57)
大纲要求		(57)
知识讲解		(57)
题型一	利用定积分定义求极限	(58)
题型二	奇偶函数的积分性质	(61)
题型三	变限积分的导数	(61)
题型四	变限积分性质的讨论与证明	(61)
题型五	极限变量仅含在被积函数中的定积分极限的 求证法	(61)
题型六	与定积分或变限积分有关的方程,其根存在性 的证法	(61)
题型七	用定积分的换元积分法结论计算	(64)
题型八	分部积分	(64)
题型九	反常积分敛散性的判别	(69)
题型十	反常积分求解	(70)
题型十一	平面图形的面积	(73)
题型十二	体积求解	(77)
题型十三	弧长求解(数一、数二)	(78)
题型十四	定积分的物理应用	(78)
第六讲	常微分方程	(80)
大纲要求		(80)
知识讲解		(80)

题型一	可分离变量与齐次微分方程	(82)
题型二	一阶线性方程的解法	(82)
题型三	可降阶微分方程(数一、二)	(82)
题型四	二阶常系数线性齐次方程的解法	(85)
题型五	二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	(85)
题型六	叠加原理的运用	(86)
题型七	特殊的微分方程	(86)
题型八	已知微分方程的解,反求其微分方程	(86)
题型九	利用微分方程求解几类函数方程	(87)
题型十	微分方程在几何上应用举例	(87)
题型十一	微分方程在物理上应用举例	(87)
第七讲 向量代数与空间解析几何(仅数一)		(89)
大纲要求		(89)
知识讲解		(89)
题型一	向量	(90)
题型二	平面方程与直线方程	(94)
题型三	位置关系	(94)
题型四	距离	(95)
题型五	旋转曲面方程	(99)
题型六	空间曲线的切线与法平面及曲面的切平面与 法线的求法	(100)
题型七	投影	(100)
第八讲 多元函数微分法及其应用		(101)
大纲要求		(101)
知识讲解		(101)
题型一	用一元函数极限方法求解多元函数极限	(102)
题型二	用夹逼准则求解多元函数极限	(103)
题型三	多元显函数的一阶偏导数的求法	(105)
题型四	多元复合函数高阶导数的计算	(105)
题型五	隐函数的偏导数求法	(106)
题型六	由方程组确定的隐函数,其偏导数的求法	(106)
题型七	偏导数结合方程关系的问题	(106)
题型八	验证是否可微	(107)
题型九	多元函数的全微分求法	(107)
题型十	方向导数与梯度(仅数一)	(110)
题型十一	多元函数的无条件极值的求法	(118)
题型十二	多元函数的条件极值的求法	(118)

第九讲 重积分	(119)
大纲要求	(119)
知识讲解	(119)
题型一 在哪些情况下需调换二次积分的次序	(125)
题型二 二重积分需分区域积分的几种情况	(126)
题型三 极坐标与变量替换	(126)
题型四 利用奇偶对称, 轮换对称求解	(127)
题型五 被积函数不是初等函数	(127)
题型六 利用二重积分的几何意义或物理意义简化计算	(128)
题型七 二重积分(或可化为二重积分)的等式和不等式 证法	(128)
题型八 由重积分定义的函数的求法	(129)
题型九 由重积分定义的函数的极限的求法	(129)
题型十 三重积分用先二后一法计算	(137)
题型十一 计算三重积分如何选择坐标系	(138)
题型十二 利用奇偶对称性简化三重积分的计算	(139)
题型十三 利用轮换对称性简化计算	(139)
题型十四 重积分应用: 立体体积的算法	(140)
题型十五 重积分应用: 曲面面积的求法	(140)
题型十六 重积分应用: 求重心(形心)	(140)
题型十七 重积分应用: 求转动惯量	(141)
第十讲 无穷级数(数一、数三)	(142)
大纲要求	(142)
知识讲解	(142)
题型一 正项级数敛散性的判别方法	(146)
题型二 交错级数敛散性的判别方法	(148)
题型三 任意项级数敛散性的判别法	(149)
题型四 常数项级数敛散性的证法	(149)
题型五 幂级数收敛域的求法	(152)
题型六 不是幂级数的函数项级数, 其收敛域的求法	(152)
题型七 幂级数的和函数的求法	(154)
题型八 函数展为幂级数的方法	(154)
题型九 收敛的常数项级数的和的求法	(154)
题型十 与傅里叶级数有关的几类问题的解法	(159)
第十一讲 曲线积分与曲面积分(仅数一)	(160)
大纲要求	(160)
知识讲解	(160)
题型一 计算第一类曲线积分的方法与技巧	(163)

题型二	利用对称性简化积分计算	(164)
题型三	第二类曲线积分的算法	(164)
题型四	计算第一类曲面积分的方法与技巧	(170)
题型五	利用对称性简化计算	(170)
题型六	计算第二类曲面积分的方法与技巧	(171)
题型七	曲线积分的应用	(171)
题型八	积分与路径无关	(180)
题型九	正确应用格林公式	(181)
题型十	全微分方程	(182)
题型十一	如何应用高斯公式计算曲面积分	(182)
题型十二	梯度、散度、旋度的综合计算	(183)
题型十三	第二类(对坐标的)空间曲线积分的算法	(184)
第十二讲	数学的经济应用(仅数学三)	(185)
大纲要求		(185)
知识讲解		(185)
题型一	差分方程	(186)
题型二	边际与弹性	(187)
题型三	价值与利息	(188)

线性代数

第一讲	行列式	(189)
大纲要求		(189)
知识讲解		(189)
题型一	行列式的定义与性质	(195)
题型二	抽象行列式的计算	(196)
题型三	行列式与方程结合的问题	(196)
题型四	行列式的展开计算	(198)
题型五	几种特殊的行列式	(198)
题型六	范德蒙行列式	(200)
题型七	克莱姆法则	(202)
第二讲	矩阵	(203)
大纲要求		(203)
知识讲解		(203)
题型一	矩阵的运算	(210)
题型二	矩阵的行列式	(210)
题型三	逆矩阵直接求解	(212)
题型四	伴随矩阵问题	(212)
题型五	恒等变形求逆矩阵	(212)

题型六	求解矩阵方程	(213)
题型七	初等矩阵的运算	(218)
题型八	分块矩阵的计算	(220)
第三讲	向量	(221)
大纲要求		(221)
知识讲解		(221)
题型一	判断线性相关、线性无关	(227)
题型二	判断能否线性表出	(228)
题型三	向量组的秩, 矩阵的秩	(228)
题型四	已知秩, 求待定常数	(229)
题型五	正交矩阵	(232)
题型六	向量空间	(232)
第四讲	线性方程组	(234)
大纲要求		(234)
知识讲解		(234)
题型一	判断齐次线性方程组解的情况	(237)
题型二	基础解系相关讨论	(237)
题型三	已知解, 反求方程组	(237)
题型四	非齐次线性方程组的解的结构	(240)
题型五	非齐次线性方程组求解	(240)
题型六	方程组与向量结合的问题	(240)
题型七	方程组公共解、同解问题	(241)
第五讲	特征值、特征向量、相似对角化	(243)
大纲要求		(243)
知识讲解		(243)
题型一	特征值与特征向量的概念与性质	(247)
题型二	特征值与特征向量的计算	(247)
题型三	相关矩阵的特征值、特征向量	(247)
题型四	判断是否可对角化	(250)
题型五	判断两个矩阵是否相似	(251)
题型六	对角化的计算	(252)
题型七	用对角阵求高次幂	(253)
题型八	已知特征值、特征向量, 反求矩阵	(253)
第六讲	二次型	(254)
大纲要求		(254)
知识讲解		(254)
题型一	二次型的定义	(255)
题型二	化二次型为标准型、规范型	(258)

题型三	已知标准型, 确定二次型	(258)
题型四	判断两个矩阵是否合同	(258)
题型五	判别或证明具体二次型的正定性	(260)
题型六	判别或证明抽象二次型的正定性	(260)
题型七	确定参数的取值范围使其正定	(260)

概率论与数理统计(数一、数三)

第一讲	随机事件和概率	(261)
大纲要求	(261)
知识讲解	(261)
题型一	古典概型	(265)
题型二	几何概型	(265)
题型三	事件的关系与运算律	(266)
题型四	和、差、积事件的概率	(266)
题型五	条件概率	(270)
题型六	全概率公式与贝叶斯公式	(270)
题型七	事件的独立性	(270)
第二讲	一维随机变量及其分布	(271)
大纲要求	(271)
知识讲解	(271)
题型一	一维随机变量分布函数的概念及性质	(277)
题型二	离散型随机变量分布律	(278)
题型三	连续型随机变量的概念与计算	(278)
题型四	用常见分布计算有关事件的概率	(279)
题型五	二次方程有根、无根的概率	(279)
题型六	一维随机变量函数的分布	(281)
第三讲	二维随机变量及其分布	(282)
大纲要求	(282)
知识讲解	(282)
题型一	二维离散型随机变量的分布律	(285)
题型二	二维连续型随机变量概率密度	(289)
题型三	二维连续型随机变量分布函数	(289)
题型四	条件概率密度	(289)
题型五	两个连续型随机变量函数的分布	(293)
题型六	卷积公式的运用	(293)
题型七	离散型与连续型函数的分布	(294)
第四讲	随机变量的数字特征	(295)
大纲要求	(295)

知识讲解	(295)
题型一 期望与方差的计算	(299)
题型二 随机变量函数的期望与方差	(299)
题型三 随机变量最大、最小值的期望与方差	(300)
题型四 已知期望, 求概率	(300)
题型五 协方差与相关系数	(304)
题型六 不相关与独立	(304)
第五讲 大数定律和中心极限定理	(305)
大纲要求	(305)
知识讲解	(305)
题型一 用切比雪夫不等式估计事件的概率	(309)
题型二 大数定律	(310)
题型三 中心极限定理	(310)
第六讲 数理统计的基本概念	(311)
大纲要求	(311)
知识讲解	(311)
题型一 求统计量分布有关的基本概念问题	(317)
题型二 求统计量的分布及其分布参数	(317)
题型三 求统计量取值的概率	(318)
第七讲 参数估计与假设检验	(319)
大纲要求	(319)
知识讲解	(319)
题型一 矩估计与最大似然估计	(322)
题型二 估计量的评选标准(数一)	(324)
题型三 区间估计(数一)	(326)
题型四 两类错误概率(数一)	(331)
题型五 假设检验(数一)	(331)

高等数学

第一讲 函数、极限、连续



大纲要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则。
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限。
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型。
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质。



知识讲解

一、函数

1. 函数的概念

设 x 与 y 是两个变量， I 是实数集的某个子集，若对于 I 中的每个值 x ，变量 y 按照法则 f 有一个确定的值 y 与之对应，称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$ ，这里的 I 称为函数的定义域，而相应的函数值的全体称为函数的值域。

2. 函数的几何特性

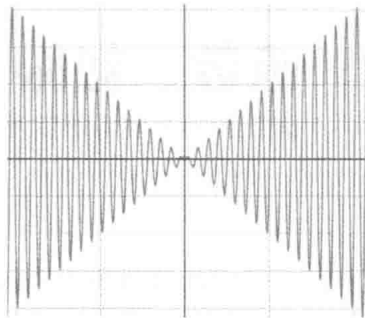
(1) 奇偶性. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-a, a)$ ($a>0$)，若对于任一 $x \in (-a, a)$ ，都有 $f(-x)=f(x)$ ，称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任一 $x \in (-a, a)$ ，都有 $f(-x)=-f(x)$ ，称 $f(x)$ 为奇函数。奇函数和偶函数具有自然界的对称美，就好比水上的风景和水下的倒影一样，相互映照着。

常见的奇函数： $\sin x$ ， $\arcsin x$ ， $\tan x$ ， $\arctan x$ ， $\ln \frac{1-x}{1+x}$ ， $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ，其中最后两个不常见，大家可以演算一下，要多加记忆。

复合函数的奇偶性：若函数 $y=f(t)$ 、 $t=g(x)$ 的奇偶性不同，则其复合函数 $y=f[g(x)]$ 必为偶函数；若奇偶性相同，则其复合函数 $y=f[g(x)]$ 与 $f(x)$ 具有相同的奇偶性。

(2) 周期性. 对函数 $y=f(x)$, 若存在常数 $T>0$, 使得对定义域内的每一个 x , $x+T$ 仍在定义域内, 且有 $f(x+T)=f(x)$ 称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

(3) 有界性. 设函数 $y=f(x)$ 在一个数集 X 上有定义, 若存在正数 M , 使得对于每个 $x \in X$, 都有 $|f(x)| < M$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 X 上有界; 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 比如 $\sin x$ 就是有界函数, $x \sin x$ 就是无界函数.



$y=x \sin x$ 图像

(4) 单调性. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2 且 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$ [或 $f(x_1) > f(x_2)$], 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (或单调减少). 如果把上述定义中的“ $<$ ”换成“ \leq ”称为单调不减, “ $>$ ”换成“ \geq ”称为单调不增.

题型一 函数的概念与性质

【例1】求函数 $f(x) = \arccos \sqrt{x/(2x-1)}$ 的定义域.

【例2】判断下列函数的奇偶性:

(1) $\frac{a^x + a^{-x}}{2}$; (2) $\lg \frac{1-x}{1+x}$.

【例3】设在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 试讨论 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的奇偶性.

3. 函数的构成方法与常见函数类

(1) 基本初等函数

高等数学将基本初等函数归为五类: 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数, 可以简称: 反对幂三指.

(2) 复合函数

$y=f(u)$, $u=\phi(x)$ $\xrightarrow{\text{多合一}}$ $y=f[\phi(x)]$ 在有意义的情况下.

(3) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算构成的, 并且可以用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

(4) 分段函数

①若一个函数在其定义域的不同部分要用不同的式子表示, 如

$$y=f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1 \\ f_2(x), & x \in I_2 \\ \dots \\ f_n(x), & x \in I_n \end{cases}$$

称其为分段函数.

②熟悉隐含的分段函数

a. $y = |f(x)|$.

b. $y = [f(x)]$.

c. $y = \max\{f(x), g(x)\}$.

d. $y = \min\{f(x), g(x)\}$.

(5)反函数

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{若可反解出 } x} x=f^{-1}(y)$$

注意:在我们高等数学中 x 与 y 不能随意改变,中学习习惯把自变量都改写为 x ,但高数中由于后续涉及反函数求导,变量改变后容易混乱,所以不改写.

【必会经典题】

①求 $y = \sin x$, $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ 的反函数

解:由于 $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, 所以 $2\pi - x \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$, 根据诱导公式 $-y = \sin(2\pi - x)$, 取反函数为:
 $2\pi - x = \arcsin(-y)$, 即 $x = 2\pi - \arcsin(-y) = 2\pi + \arcsin(y)$

因此 $x = 2\pi + \arcsin(y)$

注意: $y = \sin(x)$ 的定义域是 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 才能取反函数为 $x = \arcsin(y)$, 因此需要向上面这样折算到能取反函数的区域.

(6)隐函数

设有方程 $F(x, y) = 0$, 若对于 $\forall x \in I$ 都由方程唯一的确定了 y 的值, 由此所确定的一个函数关系式 $y = y(x)$ 称为由方程 $F(x, y) = 0$ 在 I 上确定的隐函数. 函数关系是隐藏的, 就像隐身一样.

(7)由参数方程定义的函数(数一、数二)

若由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定了 y 与 x 间的函数关系, 则称此时的函数关系式为由参数方程确定的函数. 这时候函数关系是以参数 t 为桥梁的.

二、极限

1. 极限的定义

(1)数列极限(ε - N 语言)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\text{自然数}), \text{使得当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - A| < \varepsilon.$$

注:极限存在时称数列是收敛的, 极限不存在时称数列是发散的.

(2)当 $x \rightarrow \infty$ 时的函数极限(ε - X 语言)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{使得当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(3)当 $x \rightarrow x_0$ 时的函数极限(ε - δ 语言)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(4)单侧极限

在 x_0 点的左极限:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

在 x_0 点的右极限:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

需要熟记常用的极限:

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$ ④ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty, |q| > 1$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ⑥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ⑦ $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$ ⑧ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

⑨ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ ⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

(5) 极限存在的充要条件

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

2. 极限的性质

(1) 唯一性

在自变量的一个变化过程中, 若数列(函数)的极限存在, 则此极限唯一.

(2) 有界性(局部有界性)

如果数列收敛, 则数列必有界; 如果函数极限存在, 则函数局部有界.

(3) 保号性(局部保号性)

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

① 如果 $A > 0 (< 0)$, 则存在 δ , 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0 (< 0)$.

函数极限正, 去心邻域正; 函数极限负, 去心邻域负.

② 如果当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq 0 (\leq 0)$, 那么 $A \geq 0 (\leq 0)$.

函数不负, 极限不负, 函数不正, 极限不正.

没有等于号不一定正确, $f(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

【必会经典题】

① 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{|x|} = 1$, 问 $x = 0$ 是否是极值点?

解: 因为 $f(x)$ 连续, 所以由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{|x|} = 1$ 得 $f(0) = 2$.

由极限保号性, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有 $\frac{f(x) - 2}{|x|} > 0$, 从而有 $f(x) > f(0) = 2$,

故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小点, $f(0) = 2$ 为极小值.

如果右图是你的体重变化曲线, 思考一下, 极限的三个性质是如何体现的.

注: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ 不存在.

