中南财经政法大学
青年学术文库

变分方法在薛定谔-泊松系统中的应用

The Application of Variational Methods to the Schrödinger-Poisson System

蒋永生 〇 著



中国社会科学出版社

经政法大学
学术文库

变分方法在薛定谔-泊松系统中的应用

The Application of Variational Methods to the Schrödinger-Poisson System

蒋永生 ○ 著



中国社会科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

变分方法在薛定谔—泊松系统中的应用／蒋永生著．—北京：中国社会科学出版社，2018.9

（中南财经政法大学青年学术文库）

ISBN 978-7-5203-3090-9

Ⅰ.①变… Ⅱ.①蒋… Ⅲ.①变分法—应用—薛定谔方程②变分法—应用—泊松方程 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 200413 号

出 版 人 赵剑英
责任编辑 徐沐熙
特约编辑 张海涛
责任校对 李虹霞
责任印制 戴 宽

出 版 中国社会科学出版社
社 址 北京鼓楼西大街甲 158 号
邮 编 100720
网 址 http://www.csspw.cn
发 行 部 010-84083685
门 市 部 010-84029450
经 销 新华书店及其他书店

印刷装订 北京君升印刷有限公司
版 次 2018 年 9 月第 1 版
印 次 2018 年 9 月第 1 次印刷

开 本 710×1000 1/16
印 张 10.5
插 页 2
字 数 201 千字
定 价 38.00 元

凡购买中国社会科学出版社图书，如有质量问题请与本社营销中心联系调换
电话：010-84083683
版权所有 侵权必究

本书受中南财经政法大学出版基金资助



《中南财经政法大学青年学术文库》
编辑委员会

主　任： 杨灿明

副主任： 吴汉东　姚　莉

委　员：（按姓氏笔画排序）

朱延福　朱新蓉　向书坚　刘可风　刘后振

张志宏　张新国　陈立华　陈景良　庞凤喜

姜　威　赵　曼　胡开忠　胡贤鑫　徐双敏

阎　伟　葛翔宇　董邦俊

主　编： 姚　莉

前　言

在微积分创立和发展过程中，Newton、Leibniz、Bernoulli、Euler、Lagrange 等数学家发现并发展了变分方法，解决了许多数学物理问题。变分方法与计算科学交叉应用产生了有限元算法，在物理、力学及工程技术中得到广泛应用。除此之外，变分方法也是研究偏微分方程的重要方法。它把偏微分方程解的存在性问题转化为变分泛函临界点的存在性问题。这使得人们能够应用非线性泛函分析及拓扑学中的知识来研究偏微分方程。早在 1900 年巴黎国际数学家代表大会上，Hilbert 提出著名的 23 个公开问题，明确指出边值问题及变分方法的重要性，确定了椭圆型偏微分方程研究的基本方向。

近几十年来，变分法中的临界点理论及集中紧性原理在非线性椭圆型偏微分方程边值问题解的存在性等理论中得到广泛应用。为方便读者查阅，本书收集了应用变分方法所需的基本知识，包括 Sobolev 空间、集中紧性原理、临界点理论等。同时，为克服变分方法应用过程中的一些紧性困难，本书需要用到椭圆型方程解的无穷范数估计和正则化估计等经典结论。本书的后半部分整理了笔者近年对含非局部项的半线性椭圆型偏微分方程的研究成果。

本书共分九章。第一章绪论，介绍本书的研究方法和有关薛定谔-泊松系统（Schrödinger-Poisson 系统）的相关结论。

第二章主要介绍应用变分方法所需要的函数空间- - Sobolev 空间。包括 Sobolev 空间内函数的性质、Sobolev 嵌入定理及 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式等。

第三章介绍临界点理论和集中紧性原理，包括形变引理、临界点的极大极小刻画、单调性方法及指标理论等；并收集了集中紧性原理等经典分析结论。

第四章介绍椭圆型方程解的估计，包括线性椭圆型方程弱解的 $W^{k,p}$ 估计及 Hölder 估计，半线性椭圆型方程解的无穷范数估计，以及含非局部项的非线性椭圆型方程解的无穷范数估计。

第五章应用变分方法研究含位势阱的 Schrödinger-Poisson 方程基

态解的存在性及解的性质。本章主要是应用有限球逼近全空间的技巧构造有界区域上一列半线性椭圆型方程去逼近全空间上的 Schrödinger-Poisson 方程。然后应用有界区域上半线性椭圆型方程解的一致估计克服全局紧性困难，进而证明含位势阱的 Schrödinger-Poisson 方程基态解的存在性等。

第六章研究了非线性 Schrödinger-Poisson 方程涡旋在原点处的存在性。本章应用形变引理构造了有界的近似解序列，然后应用平移不变性克服全局集中紧性困难证明非平凡解的存在性。

第七章应用一对上下解构造了含非局部项的 Schrödinger-Poisson 方程解的近似逼近序列，证明含有一般非线性指标（包含超临界情况）的 Schrödinger-Poisson 方程存在非平凡解。

第八章系统研究了库仑位势对 Schrödinger-Poisson-Slater 方程变分泛函结构的影响，然后应用指标理论研究相应对称泛函存在多个临界点。

第九章研究了非齐次项对非线性 Schrödinger-Poisson 方程变分泛函结构的影响，应用变分方法证明了其多解的存在性等。

作者

2018年6月

目　录

第二章　Sobolev 空间 ····· **20**
2.1　弱导数 ····· 20
2.2　分布与 Dirac delta 函数 ····· 22
2.3　Sobolev 空间及 Sobolev 嵌入 ····· 22
2.4　几个经典不等式 ····· 31

第三章　临界点理论及集中紧性原理简介 ····· **35**
3.1　形变引理 ····· 35
3.2　山路引理 ····· 40
3.3　指标理论和对称变分泛函临界点 ····· 42
3.4　实分析中的几个重要结论 ····· 43
3.5　集中紧原理 ····· 49

第四章　椭圆方程解的估计 ····· **54**
4.1　线性椭圆型方程解的几个估计 ····· 54
4.2　Schrödinger 算子的特征值 ····· 57
4.3　Poisson 方程解的估计 ····· 58
4.4　半线性椭圆型方程解的无穷模估计 ····· 63
4.5　含非局部项的椭圆型方程解的无穷模估计 ····· 67

第五章　具有阱位势的 Schrödinger-Poisson-X^α 方程组 ····· **72**
5.1　引言 ····· 72
5.2　有界区域上 Schrödinger-Poisson-X^α 方程组 ····· 76
5.3　Schrödinger-Poisson-X^α 方程解的 L^∞ 模估计 ····· 80
5.4　解的存在性：定理 5.1.1 和 5.1.2 的证明 ····· 82
5.5　解的性质：定理 5.1.3–5.1.5 的证明 ····· 87
5.6　Schrödinger-Poisson-Slater方程组的基态解 ····· 91

第六章 具有柱形位势的 Schrödinger-Poisson-X^α 方程组 …… 93

6.1 引言 …… 93

6.2 非负有界 (P.S.) 序列 …… 95

6.3 构造方程组 (6.1) 解的逼近序列 …… 106

6.4 定理 6.1.1 和 6.1.2 的证明 …… 115

第七章 具有超临界非线性项的 Schrödinger-Poisson-X^α 方程组 119

7.1 引言 …… 119

7.2 上解和下解的构造 …… 122

7.3 定理 7.1.1 和 7.1.3 的证明 …… 126

第八章 齐次稳态 Schrödinger-Poisson-Slater 方程 …… 131

8.1 基本引理 …… 131

8.2 主要定理和证明 …… 135

第九章 非齐次稳态 Schrödinger-Poisson-Slater 方程 …… 143

9.1 负能量解 …… 143

9.2 $p \in (2,5)$ 时的正能量解 …… 144

9.3 $p \in (1,2]$ 时的正能量解 …… 148

参考文献 …… 153

第一章　绪论

变分方法是研究椭圆型方程解的存在性的重要工具之一。变分泛函的临界点对应方程的弱解，一个典型的例子是线性椭圆方程边值问题：

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega. \tag{1.1}$$

这里 Ω 为 N 维欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域。对于 $L^2(\Omega)$ 中的函数 $f(x)$，如果存在 Sobolev 空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的函数 u 满足

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x) - f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

对任意的 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 成立。则称 u 为 (1.1) 的弱解。在 Sobolev 空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中，方程 (1.1) 的变分泛函为

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fudx.$$

如果 I 是 Fréchet 可微的，对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 都有

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - f\varphi dx.$$

所以 I 的临界点对应方程 (1.1) 的弱解。研究椭圆型方程解的存在性问题就转化为在泛函空间中寻找变分泛函临界点的问题。

在科学研究中，许多重要数学模型涉及无界域上的非线性椭圆型方程。例如非线性 Schrödinger 方程起源于非线性光学和粒子物理学研究，典型的数学模型有

$$-\Delta u(x) + u = f(x,u),\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

假设非线性项 $f(x,u)$ 在无穷远处有类似 $f(x,u) = O(|u|^p)(2 < p < \frac{2N}{N-2})$ 的限制，则可在 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中应用变分方法研究变分泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx,$$

其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,s)ds$。在应用变分方法解决这类问题时，关键是研究逼近序列的紧性。在无界区域上 Sobolev 嵌入不再具有紧性，Lions 引入集中紧性原理[51] 成功解决了这类问题。国内外许多学者应用变分方法结合集中紧性原理研究了类似 (1.2) 的半线性椭圆型方程。这些研究中经常用到经典的分析基础结论，如 Sobolev 空间中嵌入定理及其中的典型不等式、临界点理论、指标理论、集中紧性分析原理等。为方便读者查阅，本书将上述经典内容分别整理在第二章和第三章中。

很多物理、化学等学科中的数学模型涉及含非局部项的椭圆型方程，如 Kohn-Sham 系统模型 [46]，Hartree-Fock 系统模型 [49]。在库伦场 N-体系统中，通常研究作用在希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ 上的汉密尔顿量

$$H=-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{x_i}+\sum_{i=1}^{N}V(x_i)+\sum_{i<j}\frac{1}{|x_i-x_j|}, \tag{1.3}$$

其中 $V(x)=-\sum_{k=1}^{m}\frac{z_j}{|x-\bar{x}_j|}$ 表示 $m\geqslant 1$ 个原子核的库伦电位势, 这里的 $z_j>0$ 表示第 j 个原子核的电荷量，$\bar{x}_j$ 表示第 j 个原子核在空间 $\mathbb{R}^3$ 中的确定位置。N 体系统的基态能量可表示为

$$E=\inf\left\{(H\Phi,\Phi):\Phi\in H^1(\mathbb{R}^{3N}),\int_{\mathbb{R}^{3N}}|\Phi|^2dx=1\right\}, \tag{1.4}$$

其中

$$\begin{aligned}(H\Phi,\Phi)=&\int_{\mathbb{R}^{3N}}\left(\sum_{i=1}^{N}V(x_i)+\sum_{i<j}\frac{1}{|x_i-x_j|}\right)|\Phi|^2dx\\&+\int_{\mathbb{R}^{3N}}|\nabla\Phi|^2dx.\end{aligned} \tag{1.5}$$

在保持 Pauli 原理条件下简化计算 E，Fock 和 Slater 引入形如

$$\Phi(x_1,\cdots,x_N)=\sum_{\sigma}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=1}^{N}\phi_{\sigma(i)}(x_i). \tag{1.6}$$

的分布函数，这里的 σ 表示 $\{1,2,\cdots,N\}$ 的轮换，$|\sigma|$ 表示轮换 σ 的符号。把 (1.6) 中的表示式代入 (1.5) 中计算得

$$\begin{aligned}(H\Phi,\Phi)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|}dxdy-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{|\rho(x,y)|^2}{|x-y|}dxdy\\&+\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_i|^2+V(x)|\phi_i|^2dx\\&\triangleq J(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N).\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $\rho(x)=\sum_{i=1}^{N}|\phi_i|^2(x)$，$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)\phi_i^*(y)$，$\phi_i^*$ 表示 ϕ_i 的共轭复数。此时，在条件 (1.6) 下问题 (1.4) 等价于在约束

$$<\phi_i,\phi_j>=\int_{\mathbb{R}^3}\phi_i(x)\phi_j(x)dx=\delta_{i,j} \tag{1.8}$$

下求极小化问题

$$\inf\{J(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N):\phi_i\in H^1(\mathbb{R}^3)\}. \tag{1.9}$$

问题 (1.9) 对应的 Lagrange 方程为：

$$-\Delta\phi_i+V\phi_i+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(y)}{|x-y|}dy\phi_i+\varepsilon_i\phi_i=\sum_{j=1}^{N}\phi_i\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\phi_j^*(y)\phi_i(y)}{|x-y|}dy, \tag{1.10}$$

这里 $1\leqslant i\leqslant N$。由 Slater 近似方法简化 (1.10) 右端项

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\phi_i\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\phi_j^*(y)\phi_i(y)}{|x-y|}dy&=\int_{\mathbb{R}^3}\rho(x,y)\frac{1}{|x-y|}\phi_i(y)dy\\&\sim C\rho^{\frac{1}{3}}(x)\phi_i(x).\end{aligned} \tag{1.11}$$

可得到：

$$-\Delta\phi_i+V\phi_i+\varepsilon_i\phi_i+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(y)}{|x-y|}dy\phi_i=C\rho^{\frac{1}{3}}(x)\phi_i(x), \tag{1.12}$$

其中 $C>0$ 为常数。如果每个分量 ϕ_i 相同，上述方程组等价于

$$-\Delta\phi+V\phi+\varepsilon\phi+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\phi^2(y)}{|x-y|}dy\phi=|\phi|^{\frac{2}{3}}\phi(x). \tag{1.13}$$

许多著名的数学家研究了这类含非局项的非线性椭圆型方程。Lieb 和 Simon 在文献 [49] 中研究了著名的 Hartree-Fock 方程；Lions 也对 Hartree-Fock 方程有过细致的讨论 [52]。Slater 对 Hartree-Fock 方程的简化 (1.11) [66]，通常称为 Hartree-Fock-Slater 近似 [17, 23]。由 Hartree-Fock-Slater 近似得到的方程一般称为 Schrödinger-Poisson-Slater 方程组 [17]，这种形式的方程组称为 Schrödinger-Poisson-X^α 方程组 [16]。在一定约束下，可将这类方程孤立波解的存在性问题转化为研究一类变分泛函的临界点问题。例如，考虑下列 Schrödinger-Poisson-X^α 方程组

$$\begin{cases}-\Delta u+(1+\mu g(x))u+\lambda\phi(x)u=|u|^{p-1}u,\ \ x\in\mathbb{R}^3,\\-\Delta\phi=u^2,\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\phi(x)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^3,\end{cases} \tag{1.14}$$

其中 $\mu,\lambda>0$ 是参数，$p\in(0,+\infty)$。除上述提到的 Hartree-Fock-Slater 近似，还可以由下列非线性 Schrödinger-Poisson 方程组得到 (1.14)。

$$\begin{cases} i\psi_t-\Delta\psi+\lambda\phi(x)\psi=|\psi|^{p-1}\psi, & x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=|\psi|^2-\mu n(x), & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.15}$$

其中 $\psi:\mathbb{R}^3\times[0,T]\to\mathbb{R}$，$n(x):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，非线性指标 $p>0$，参数 $\mu,\lambda\geqslant 0$。我们关注方程组 (1.15) 的静态解 $\psi(x)=e^{-i\omega t}u(x)$，其中 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$ 待定。则 u 满足下列方程组

$$\begin{cases} -\Delta u+(\omega-\mu\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\lambda n(y)}{|x-y|}dy)u+\lambda\phi(x)u=|u|^{p-1}u, & x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\phi(x)=0, & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.16}$$

在 (1.16) 中令 $\omega=1+\mu$，$g(x)=1-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\lambda n(y)}{|x-y|}dy$，即得到 (1.14)。我们称 $g(x)=1-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\lambda n(y)}{|x-y|}dy$ 为阱位势。不失一般性，我们研究具有阱位势 $g(x)$ [满足下列条件 $g(x)$] 的方程组 (1.14)。

(G_1) $g(x)\geqslant 0$, $g(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$;

(G_2) $\Omega_0=\{x\in\mathbb{R}^3:g(x)=0\}$ 有界并且有非空内点;

(G_3) $\liminf\limits_{|x|\to\infty}g(x)=1$。

近年来，问题 (1.14) 受到广泛关注 [2, 3, 5, 6, 22, 26, 27, 30, 44, 45, 61, 63, 72, 74, 76, 77]，其中研究的重点之一是寻找参数 $\mu\geqslant 0,\lambda>0$ 和非线性指标 $p>0$ 的范围与方程组 (1.14) 解的存在性关系。例如，如果 $\mu=0$，即有方程组

$$\begin{cases} -\Delta u+u+\lambda\phi(x)u=|u|^{p-1}u, & x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\phi(x)=0, & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.17}$$

其中 $\lambda>0$，$p>0$。方程组 (1.17) 非平凡解的存在性与非线性指标 $p>0$ 及参数 $\lambda>0$ 的范围有着密切的关系。D'Aprile 和 Mugnai 在文献 [26] 中利用积分恒等式证明：如果 $p\notin(1,5)$，则对任意的 $\lambda>0$ 方程组 (1.17) 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中只有平凡解。所以方程组 (1.17) 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有非平凡解 [2, 3, 6, 27, 44, 45, 61] 的必要条件为 $p\in(1,5)$。其中文献 [61] 讨论得最为全面：如果 $p\in(2,5)$，方程组有非平凡解；如果 $p\in(1,2]$，则只

有当参数 $\lambda > 0$ 非常小时 (1.17) 才有非平凡解；当 $\lambda > \frac{1}{4}$ 时 (1.17) 只有平凡解。由 (1.17) 自身特点易知方程组 (1.17) 有球对称性，并且它在无穷远处的极限方程为 (1.17) 本身。在证明 (1.17) 解的存在性时，文献 [3, 27, 45, 61] 均用到方程组 (1.17) 的球对称性，而[44]用到 (1.17) 在无穷远处的极限方程为它本身。如果 $\mu > 0$，$g(x)$ 非球对称，则上述文献 [3, 27, 44, 45, 61] 中的方法不能够证明 (1.14) 解的存在性。在方程组 (1.14) 中记 $V(x) = 1 + \mu g(x) > 0$，则有方程组

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda\phi(x)u = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2, \ \lim\limits_{|x|\to+\infty} \phi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.18}$$

对于方程组 (1.18) 解的存在性研究，主要方法是非线性泛函分析中的约化方法 [25, 28, 29, 32, 38, 40, 60, 63] 和变分方法 [4, 6, 18, 74, 76, 77]。而变分理论的应用越来越广，在这个过程中，为了便于应用 Sobolev 空间 $H^1(\mathbb{R}^3)$，我们时常限制 $p \leqslant 5$，$V(x)$ 有正的下界，然后在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中寻找下列泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \frac{\lambda}{4}\int \frac{u^2(y)u^2(x)}{4\pi|x-y|}dxdy - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1}dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^3)$$

的临界点。为了寻找 $I(u)$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中的非零临界点，一种经典的思路是 (Palais 和 Smale 的方法)：

(1) 利用 $I(u)$ 的几何结构导出 (P.S.) 序列 $\{u_n\}$: 当 $n \to +\infty$ 时，$I(u) \to c$ 且 $I'(u) \to 0$;

(2) 证明 (P.S.) 序列 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中强收敛。

其中 (2) 是关键一步。通常的做法是先证明 (P.S.) 序列 $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ 有界，然后再证明强收敛性。例如，文献 [6]，在 $p \in (3,5)$ 条件下，容易得到一列有界 (P.S.) 序列 $\{u_n\}$，然后应用假设

(V_1) $V_\infty = \lim\limits_{|y|\to\infty} V(y) \geqslant V(x)$，$x \in \mathbb{R}^3$，并且这个不等式在非零测度集上严格成立。

结合集中紧性原理得到 $\{u_n\}$ 强收敛。文献 [76] 需要假设 $p \in (2,3]$，(V_1)和

(V_2) $(\nabla V(x),x)\in L^{\infty}(\mathbb{R}^3)\cup L^{\frac{3}{2}}$，$2V(x)+(\nabla V(x),x)\geqslant 0$ a.e.$x\in\mathbb{R}^3$。

对具有一般非线性项的 Schrödinger Poisson 方程组，可参考文献 [72, 74] 等，其中文献 [72] 讨论具有渐近线性项的 Schrödinger-Poisson 方程组。如果在文献 [74] 中令 $f(u)=|u|^{p-1}u$，文献 [74] 中对一般非线性项的要求相当于要求 $p\in[3,5)$，并且假设

(V_3) $V\in C(\mathbb{R}^3)$；$V(0)=\min V=0$；存在 $b>0$ 使得 $\Omega^b=\{x\in\mathbb{R}^3:V(x)<b\}$ 为有限 Legesgue 测度集合。

但是，如果 $\mu>0$，$p\in(1,2)$，以前的方法不足以得到相应泛函的有界 (P.S.) 序列。如果 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$，方程组 (1.14) 中第二个方程的解 ϕ 可以表示为 $\phi=\frac{1}{4\pi}\int\frac{u^2(y)}{|x-y|}$，令 $f(u)=|u|^{p-1}u-\frac{\lambda}{4\pi}\int\frac{u^2(y)}{|x-y|}dyu(x)$，从一般半线性椭圆型方程

$$-\Delta u+(1+\mu g(x))u=f(u),\ \ x\in\mathbb{R}^3 \tag{1.19}$$

的观点来看，如果 $p\leqslant 3$，则 $f(u)$ 不满足 (AR) 条件: 存在 $l>2$，$r\geqslant 0$ 使得对任意的 $|\xi|\geqslant r$ 有 $0<l\int_0^{\xi}f(t)dt\leqslant\xi f(\xi)$。因此如果 $p\leqslant 3$，在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中，很难得到泛函 I 的有界 (P.S.) 序列。如果 $p\in(2,3]$，在假设 (V_2) 下，恰好可以利用 Jeanjean 的单调性方法 [41] 结合积分恒等式得到特殊的有界 (P.S.) 序列 (参考 [76])。

如果 $p\in(1,2)$，上述方法不再适用。对于 $\mu>0$ 和满足 $(G_1)-(G_3)$ 的 $g(x)$，本书需要定义加权的 Sobolev 空间

$$\mathscr{D}_V=\{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}(1+\mu g(x))u^2dx<+\infty\},$$

定义它的内积和范数分别为

$$\langle u,v\rangle_{\mathscr{D}_V}=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla v+(1+\mu g(x))uvdx,\ \ \text{其中}u,v\in\mathscr{D}_V,$$

和

$$\|u\|^2_{\mathscr{D}_V}=\langle u,u\rangle_{\mathscr{D}_V}.$$

在 D_μ 上定义泛函

$$I_\mu(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2+(1+\mu g(x))u^2dx+\frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u(x)u^2dx$$
$$-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}(x)dx.$$

本书采用有界球逼近 $\mathbb{R}^3$ 的办法得到泛函 I_μ 的有界 (P.S.) 序列。首先在任意有界球 B_k 上考虑下列问题，

$$\begin{cases} -\Delta u + (1+\mu g(x))u + \lambda\phi(x)u = |u|^{p-1}u, & x \in B_k, \\ -\Delta\phi = u^2, & x \in B_k, \\ u(x) = \phi(x) = 0, & x \in \partial B_k. \end{cases} \tag{1.20}$$

其中 $k \in \mathbb{N}$。关于有界区域上的 Schrödinger-Poisson 方程组，可参考 [31, 55, 62]。本书应用山路引理 [73, 定理1.15](引理 3.2.2) 得到方程组 (1.20) 的一个山路几何解 u_k (参考下文定理5.2.1)。然后应用下列预估计定理对 (1.20) 的解做 L^∞ 模预估计：

定理 1.0.1 (定理4.5.1). *假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界开区域，或者 $\Omega = \mathbb{R}^3$，令 $(u,\phi) \in H_0^1(\Omega) \times D_0^{1,2}(\Omega)$ 是下列方程组*

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda\phi(x)u = |u|^{p-1}u, & x \in \Omega, \\ -\Delta\phi = u^2, & x \in \Omega, \end{cases}$$

的弱解，其中 $\lambda > 0$，$p > 1$，$V(x) : \Omega \to \mathbb{R}$。

(i) 如果 $p \in (1,2)$，$V(x) \in L^\infty(\Omega)$，$V(x) \geqslant 1$。则

$$|u(x)| \leqslant c_p\phi(x), \quad |u(x)| \leqslant C_{p,\lambda}, \quad a.e.\ x \in \Omega, \tag{1.21}$$

其中 $c_p = (p-1)(2-p)^{\frac{2-p}{p-1}}$，$C_{p,\lambda} = \frac{1}{2}(2-p)\left(\frac{pc_p}{2\lambda}\right)^{\frac{p}{2-p}}$.

(ii) 如果 $p > 2$，$V(x) \geqslant 0$，$u \neq 0$ 则

$$|u|_\infty > \lambda^{\frac{1}{2(p-2)}}. \tag{1.22}$$

借助于 (1.21)，通过改进文献 [72] 中的方法，我们得到泛函 I_μ 的一列特殊有界 (P.S.) 序列 $\{u_k\}$，最终证明 $\{u_k\}$ 收敛到方程组 (1.14) 的一个非平凡解 u，即

定理 1.0.2 (定理 5.1.1 和注记 5.1.1). *假设 $p \in (1,2)$，(G_1)-(G_3)。则存在 $c(p) = \frac{1}{4}(p-1)^2(2-p)^{2\frac{2-p}{p-1}}$，$\lambda_* \in (0, c(p))$ 和 $C_{p,\lambda} := 2^{\frac{2}{p-2}}(2-p)^{\frac{2p-1}{p-1}}\left[p(p-1)\lambda^{-1}\right]^{\frac{p}{2-p}}$ 使得，对任意的 $\lambda \in (0,\lambda_*)$和$\mu > \mu_1 = C_{p,\lambda}^{p-1} - 1 > 0$，方程组 (1.14) 有一个非平凡解$(u,\phi) \in \mathscr{D}_V \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$。另外有*

$$I_\mu(u) \in [\alpha, c_\lambda], \ \|u\|_{\mathscr{D}_V} + |\nabla\phi|_2 \leqslant M_\mu := M(p,\lambda,\mu),$$

和

$$|u(x)| \leqslant C_{p,\lambda},\ 0 < \phi(x) \leqslant C_\mu := C(p,\lambda,\mu)\ \ a.e.\ \ x \in \mathbb{R}^3,$$

其中 $\alpha, c_\lambda > 0$ 与 μ 无关，M_μ 关于 μ 单调递减。

因此方程组 (1.14) 在 H^1 中所有非平凡解组成的集合 $\mathscr{N}$ (参考下文引理 5.6.1) 非空。通过第 五 章对集合 $\mathscr{N}$ 的讨论知，当 $\lambda > 0$ 比较小、$\mu > 0$ 比较大时集合 $\mathscr{N} \subset H^1$ 是紧集(下文引理 5.6.1)。借助于此结果可以得到方程组 (1.14) 有非平凡的基态解，即

定理 1.0.3 (定理 5.1.6). 取定理 *1.0.2* 中确定的常数 λ_* 和μ_1，假设 $p \in (1,2)$，(G_1)-(G_3)。则对任意的 $\lambda \in (0,\lambda_*)$ 和 $\mu > \mu_1$，方程组 *(1.14)* 有一基态解 $(u,\phi) \in \mathscr{D}_V \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

对于 $p \in [3,5)$ 情况，借助于第 四 章的 L^∞ 模估计：

定理 1.0.4 (定理 4.4.1). 假设 $N \geqslant 3$，$p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$，如果非负函数 $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (h(u)\varphi) dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u h(u) \varphi dx, \tag{1.23}$$

其中 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 非负，h 在 $[0,+\infty)$ 上为非负分片光滑函数，并且满足 $h(0) = 0$ 和 $h' \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$。则有 $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$，并且存在只依赖于 N 和 p 的常数 $C_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$ 使得

$$|u|_\infty \leqslant C_1 \left(1 + |u|_{2^*}^{C_2}\right) |u|_{2^*}.$$

应用上述(处理 $p \in (1,2)$ 时)有界球逼近 $\mathbb{R}^3$ 的办法，我们得到，对任意的 $\lambda > 0$，当 $\mu > 0$ 充分大时，方程组 (1.14) 在 H^1 中存在非平凡解，即

定理 1.0.5 (定理 5.1.2). 假设 $p \in [3,5)$，(G_1)- (G_3)。则对任意的 $\lambda > 0$，存在与 μ 无关的正常数 $M_0 := M_0(\lambda)$，$M_1 := M_1(\lambda)$ 和 $M := M(\lambda)$(并且它们关于 $\lambda > 0$ 单调递增)，如果 $\mu > \mu_2 = \max\{0, M_0(\lambda)^{p-1} - 1\}$，问题 (1.14) 有非平凡解 $(u,\phi) \in \mathscr{D}_V \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 满足

$$|u(x)| \leqslant M_0,\ 0 < \phi(x) \leqslant M_1\ a.e. x \in \mathbb{R}^3,\ \|u\|_{\mathscr{D}_V} + |\nabla\phi|_2 \leqslant M.$$

并且存在与 μ 无关的常数 $\alpha > 0$ 和 $c_\lambda > 0$，使得 $I_\mu(u) \in [\alpha, c_\lambda]$，$\alpha$ 与 $\lambda > 0$ 也无关。