普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

# 一元分析学(第2版)

■ 刘斌 雷冬霞 编

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

# 一元分析学

（第2版）

刘　斌　雷冬霞　编

华中科技大学出版社
中国·武汉

## 内 容 提 要

本书是大学数学系列创新教材之一，内容主要包括：实数集与函数、极限、连续性、一元微分学、一元积分学、常微分方程与常差分方程. 本书风格独特、特点鲜明、内容丰富、例题典型. 本书主要是基于研究型大学创新人才培养理工科各专业实验班或提高班，加强厚实的数学基础，加强数学思想方法和应用数学能力，强化逻辑思维能力的培养而编写的.

本书可作为研究型大学理工科学生一年级第一学期的数学课程教材或者教学参考书，同时也可作为研究生入学考试中高等数学科目的复习资料.

**图书在版编目(CIP)数据**

一元分析学/刘斌, 雷冬霞编. – 2版. – 武汉: 华中科技大学出版社, 2019.8
ISBN 978-7-5680-5463-8

Ⅰ. ①一··· Ⅱ. ①刘··· ②雷··· Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第 170505 号

一元分析学
Yiyuan Fenxixue

刘 斌 雷冬霞 编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：周芬娜
封面设计：原色设计
责任校对：李 琴
责任监印：徐 露
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编：430223
录 排：武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷：武汉科源印刷设计有限公司
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：12.75
字 数：481千字(含学习平台197千字)
版 次：2019年8月第1版第1次印刷
定 价：39.00元

华中出版

# 第 2 版前言

《一元分析学》自2010年出版第1版到现在，已满八个年头. 在这期间，我国理工科大学对大学生数学素质的要求在不断提高，特别是最近两三年来，随着我国一流大学、一流学科建设任务的提出，新工科各专业人才培养的需要，坚持以人为本的要求，各高校加大了创新人才培养的力度与深度，推动课堂教学革命，打造“金课”，对大学数学课程的内容和形式提出了新的要求. 为此，经过编者的共同努力，结合本书在华中科技大学各类创新人才培养实验班八年的教学实践和教学经验，我们进行了重新修订，在保持第1版风格和特点外，新修订的指导思想主要体现如下：

**1.** 补上了一些数学家的介绍和历史资料. 这些资料以数字化形式存在于教材中，通过扫二维码能再现内容.

**2.** 补齐了部分定理和“注”的证明提示. 这些提示以数字化形式存在于教材中，通过扫二维码能再现内容.

**3.** 补充了部分习题的解答思路，这些思路以数字化形式存在于教材中，通过扫二维码能再现内容.

作 者

2019年4月于华中科技大学

# 第1版前言

随着我国经济的飞速发展, 尽管大学从精英教育到大众化教育进行了转型, 但研究型大学创新人才培养模式一直是大家关注的问题, 为此许多这类高校试办了各种类型的专业实验班或提高班, 华中科技大学自2008年起, 成立了创新人才培养示范区——启明学院, 相继成立了机械类实学创新实验班、信息类数理提高班、电气类实学创新实验班、材料类创新实验班、基础学科物理学实验班、基础学科生物学实验班、计算机科学创新实验班等加强数理基础的各种专业实验班, 加大了创新人才培养课程改革的力度与深度. 微积分学是理工科学生学习的最重要的一门基础课程, 它不仅是学生进校后面临的第一门数学课程, 而且后续许多数学课程是它在本质上的延伸和深化. 为配合这种创新人才培养模式的课程改革, 真正体现特色、符合改革精神, 我们结合自身的教学经验, 对微积分学这门课程教材进行了改革与创新, 形成了本教材的编写指导思想:

**1. 将有限的时间与精力花在最基本的内容、最核心的概念和最关键的方法上, 对微积分学基本理论体系与阐述方式进行了再处理:** 学习这门课的目的, 是为创新型人才培养进行知识储备和打下良好的基础, 使学生将主要精力集中在最基本的内容、核心的概念和关键的方法上, 掌握本课程精髓, 做到学深懂透, 内容尽量精简.

**2. 精选有一定难度的例题与习题, 强调严格思维训练与分析问题能力:** 改革的目的是使学生达到理解与应用, 精选富于启迪的例题并进行简洁和完美的证明, 不仅有助于学生的理解, 而且使学生从中学到分析问题的方法, 一定难度的习题选取, 保证了学生训练的质量与挑战, 做到了少而精.

**3. 采取学术著作的写作风格, 强调学习基本概念和结论后进行思考与补证:** 在本教材的编写中, 几乎所有的定义和定理后面, 有大量的“注”, 这些“注”有相当多的是很好的结论或者命题, 学生为了弄清楚, 必须思考并证明或者查找其他教材, 达到提高学生的数学素养.

囿于学识, 本书错误和不妥之处在所难免, 敬请广大读者批评指正.

作 者

2010年6月于华中科技大学

# 线上作业及资源网的使用说明

建议学员在PC端完成注册、登录、完善个人信息及学习码验证的操作。

**PC端学员学习码验证操作步骤：**

1. 登录

（1）登录网址http://dzdq.hustp.com，完成注册后点击登录。输入账号密码（学员自设）后，提示登录成功。

（2）完善个人信息（姓名、学号、班级、学院、任课老师等信息请如实填写，因线上作业计入平时成绩），将个人信息补充完整后，点击保存即可完成注册登录。

2. 学习码验证

（1）刮开封面上的学习码的防伪涂层，可以看到一串学习码。

（2）在个人中心页点击“学习码验证”，输入封面上刮开的学习码，点击提交，即可验证成功。点击学习码验证已激活学习码，即可查看刚才激活的课程学习码。

3. 查看课程

点击我的资源–我的课程，即可看到新激活的课程，点击课程，进入课程详情页，下拉即可看到该课程的一些课程资源。

4. 做题测试

进入课程详情页后，点开习题，选择具体章节习题，进入习题页，开始做题。做完之后点击我要交卷，该章习题就完成答题。随后学员即可看到本次答题的分数统计。

**手机端学员扫码操作步骤：**

1. 手机扫二维码，提示登录；新用户先注册，然后再登录。
2. 登录之后，按页面要求完善个人信息。
3. 按要求输入封面上刮开的一串学习码。
4. 学习码验证成功后，即可看到该二维码对应的章节习题，开始做题。
5. 答题完毕后提交即可看到本次答题的分数统计。

课程作业分为线上作业和线下作业，线上作业主要是客观题，线下作业主要是主观题。任课老师会根据学员线上作业和线下作业情况给出平时分数。

若在操作上遇到什么问题可咨询：陈老师，QQ，514009164；周老师，QQ，1811682975。

# 目　录

# 第 1 章　实数集与函数

函数是现代数学的基本概念之一, 高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 因此, 本章将介绍实数集和函数的基本概念, 重点介绍一元函数的一些特殊性质.

## 1.1　实 数 集

### 1.1.1　实数集及其性质

众所周知, 实数是由有理数和无理数两部分组成. 有理数可用分数形式$\dfrac{p}{q}$($p,q$为整数, $q \neq 0$), 也可用有限十进制小数或无限十进制循环小数表示; 而无限十进制不循环小数称为无理数. 有理数和无理数统称实数.

通常我们将全体实数构成的集合称为实数集, 用$\mathbf{R}$表示, 即

$$\mathbf{R} = \{x : x\text{为实数}\}.$$

实数集具有下列主要性质:

(1) 实数集对四则运算是封闭的, 即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为零)仍是实数.

(2) 实数集是有序的, 即任何两个实数$a,b$必须满足三个关系之一: $a < b, a = b, a > b$.

(3) 实数的大小关系有传递性, 即如果$a > b, b > c$, 那么$a > c$.

(4) 实数有阿基米德(Archimedes)性, 即对任意$a, b \in \mathbf{R}$, 若$b > a > 0$, 则存在正整数$n$, 使得$na > b$.

(5) 实数集有稠密性, 即任何两个不相等的实数之间仍有实数, 且既有有理数, 也有无理数.

阿基米德

(6) 实数集有完备性(或连续性), 即任何一个实数都对应数轴上唯一的一个点; 反之, 数轴上的任何一个点都有唯一一个实数与之对应. 因此, 今后我们将对实数与数轴上的点不加区别.

### 1.1.2　区间与邻域

设$a, b$是两实数, 且$a < b$, 称数集

$$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$$

为开区间, 记作$(a, b)$.

称数集

$$\{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

为闭区间, 记作$[a, b]$.

称数集

$$\{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x < b\} \quad 和 \quad \{x \in \mathbf{R} : a < x \leqslant b\}$$

为半开半闭区间, 分别记作$[a, b)$和$(a, b]$.

以上这几类区间称为有限区间.类似地, 我们也可以定义如下一些无限区间:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant a\}, \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leqslant a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} : x < a\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}.$$

有限区间和无限区间统称区间.

设$x_0 \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$,称数集

$$\{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

为点$x_0$的$\delta$邻域, 记作$U(x_0, \delta)$, 有时简单记作$U(x_0)$.称数集

$$\{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

为点$x_0$的$\delta$空心邻域, 记作$U^0(x_0, \delta)$, 有时简单记作$U^0(x_0)$.

同时, 我们还经常用到以下几种邻域:

$x_0$的$\delta$右邻域: $U_+(x_0, \delta) = [x_0, x_0 + \delta)$;

$x_0$的$\delta$左邻域: $U_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$;

$x_0$的$\delta$右空心邻域: $U_+^0(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$;

$x_0$的$\delta$左空心邻域: $U_-^0(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$;

$\infty$邻域: $U(\infty) = \{x \in \mathbf{R} : |x| > M, 其中M为充分大的正数\}$;

$+\infty$邻域: $U(+\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > M, 其中M为充分大的正数\}$;

$-\infty$邻域: $U(-\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x < -M, 其中M为充分大的正数\}$.

### 1.1.3 确界原理

**定义1.1.1** 设$E$为一非空实数集, 若存在数$M(L)$, 使得对任意$x \in E$, 都有$x \leqslant M(x \geqslant L)$, 则称$E$为有上界(下界)的数集, 数$M(L)$称为$E$的一个上界(下界). 如果数集$E$既有上界又有下界, 则称$E$为有界集.如果数集$E$不是有界集, 则称$E$为无界集.

**注1.1.1** 由定义1.1.1容易证明下面一些结论:

(1) 实数集$E$有界的必要充分条件是: 若存在数$M > 0$, 使得对任意$x \in E$, 都有$|x| \leqslant M$;

(2) 实数集$E$如果有上(下)界, 那么它有无穷多个上(下)界;

(3) 任何有限区间是有界集, 无限区间都是无界集; 由有限个数组成的实数集是有界集.

**注1.1.2**　由注1.1.1知, 一个实数集如果有上(下)界, 那么它有无穷多个上(下)界, 这样我们自然要问: 这无穷多个上(下)界中是否存在一个最小上界(最大下界)? 如果存在是否唯一?

**定义1.1.2**　设$E$是$\mathbf{R}$中的一个数集, 若数$\eta$ 满足下列条件:

(1) $\eta$ 是$E$ 的上界: $\forall x \in E$, 有$x \leqslant \eta$;

(2) 任何小于$\eta$的数不是$E$ 的上界: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使得$x_0 > \eta - \varepsilon$, 则称数$\eta$为数集$E$的上确界, 记作

$$\eta = \sup E \quad 或 \quad \eta = \sup_{x \in E}\{x\}.$$

**定义1.1.3**　设$E$是$\mathbf{R}$中的一个数集, 若数$\xi$ 满足下列条件:

(1) $\xi$ 是$E$ 的下界: $\forall x \in E$, 有$x \geqslant \xi$;

(2) 任何大于$\xi$的数不是$E$ 的下界: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使得$x_0 < \xi + \varepsilon$, 则称数$\xi$为数集$E$的下确界, 记作

$$\xi = \inf E \quad 或 \quad \xi = \inf_{x \in E}\{x\}.$$

**注1.1.3**　数集$E$的上(下)确界可能属于$E$, 也可能不属于$E$; 数集$E$的上(下)确界属于$E$的必要充分条件是: 它是$E$的最大值(最小值); 若数集$E$存在上(下)确界, 则上(下)确界是唯一的.

关于数集确界的存在性, 我们不加证明地叙述如下, 它的严格证明可参考有关的参考书, 它是本书极限理论的基础.

**定理1.1.1**　(确界原理) 非空有上(下)界的数集必存在上(下)确界.

**例1.1.1**　证明: 所有负数构成的数集$E$的上确界是0, 即$\sup E = 0$.

**证**　(1) 由于对$\forall x \in E$, 有$x < 0$, 于是0 是$E$ 的上界;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使得$0 - \varepsilon < x_0$, 这样任何小于0的数不是$E$ 的上界.

因此, $\sup E = 0$.

**定理1.1.1**

**例1.1.2**　设$E_1, E_2$ 为非空数集, 若对一切$x \in E_1$和$y \in E_2$, 都有$x \leqslant y$. 证明: $\sup E_1 \leqslant \inf E_2$.

**证**　依假设, $E_2$中任一数$y$都是$E_1$的上界, $E_1$中任一数$x$都是$E_2$的下界, 而$E_1, E_2$ 非空, 所以由确界原理知, $\sup E_1$, $\inf E_2$存在. 现证$\sup E_1 \leqslant \inf E_2$. 如果$\sup E_1 > \inf E_2$, 则令

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup E_1 - \inf E_2) > 0,$$

于是由上确界和下确界的定义知, $\exists\, x_0 \in E_1, y_0 \in E_2$ , 使得

$$x_0 > \sup E_1 - \varepsilon = \frac{1}{2}(\sup E_1 + \inf E_2),$$

和

$$y_0 < \inf E_2 + \varepsilon = \frac{1}{2}(\sup E_1 + \inf E_2),$$

所以$x_0 > y_0$, 这与已知假设矛盾. 故$\sup E_1 \leqslant \inf E_2$.

## 习 题 1.1

习题1.1

**1.** 用区间表示下列不等式的解:

(1) $1 < |x-1| < 2$;  (2) $\sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $|\dfrac{x}{1+x}| > \dfrac{x}{1+x}$;  (4) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$ ($a, b, c$为常数, 且 $a < b < c$).

**2.** 求下列数集的上、下确界, 并根据定义加以证明:

(1) $E = \{x:\ x$为$(0,1)$内的无理数$\}$;

(2) $E = \{x : x = 1 - \dfrac{1}{2^n}, n = 1, 2, \cdots, \}$;

(3) $E = \{x : x = \dfrac{n}{n+1}, n = 1, 2, \cdots, \}$.

**3.** 设$E$为非空有下界的数集. 证明: $\inf E = \xi \in E \iff \min E = \xi$.

**4.** 设$E_1, E_2$为非空有界数集, 定义数集$E_1 + E_2 = \{z : z = x + y, x \in E_1, y \in E_2\}$. 证明:

(1) $\sup(E_1 + E_2) = \sup E_1 + \sup E_2$;  (2) $\inf(E_1 + E_2) = \inf E_1 + \inf E_2$.

# 1.2 函 数

## 1.2.1 函数的概念

**定义1.2.1** 设$E_1, E_2$是两个给定的实数集, 若有对应法则$f$,使得对$E_1$内每个数$x$, 都有唯一的一个数$y \in E_2$与它对应, 则称$f$是定义在数集$E_1$上的函数, 记作

$$f : E_1 \to E_2, \quad \text{或} \quad y = f(x).$$

其中$x$称为自变量, $y$称为因变量, 数集$E_1$称为函数$f$的定义域, $y$称为$f$在点$x$的函数值. 全体函数值的集合

$$f(E_1) = \{y : y = f(x),\ x \in E_1\} (\subset E_2)$$

称为函数$f$的值域.

**注1.2.1**　定义1.2.1中的实数集$E_2$常用$\mathbf{R}$代替; 在函数概念中, 对应关系$f$是抽象的, 只有在具体的函数中, 对应关系$f$才是具体的.

**注1.2.2**　根据函数的定义, 给定一个函数一定要指出它的定义域. 但有时为了方便并不指出函数 $y=f(x)$的定义域, 这时认为函数的定义域是自明的, 即定义域是使函数$y=f(x)$有意义的实数$x$的集合$E_1=\{x: f(x)\in\mathbf{R}\}$. 例如: 给定函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$, 没有指出它的定义域, 但我们知道它的定义域是$[-1,1]=\{x:\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}$.

**注1.2.3**　从函数的定义, 我们可以看出: 两个函数相同是指它们有相同的定义域和对应法则. 比如: 函数$f(x)=1, x\in\mathbf{R}$和$g(x)=1, x\in\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$是不同的两个函数; 而函数$f(x)=1, x\in\mathbf{R}$和函数$h(x)=\sin^2 x+\cos^2 x,\ x\in\mathbf{R}$是两个相同的函数.

**注1.2.4**　函数$f$给出了$x$轴上的点集$E_1$到$y$轴上点集$E_2$之间的单值对应, 也称为映射. 对于$a\in E_1, f(a)$称为映射$f$下$a$的象, 点$a$称为$f(a)$的原象. 在函数定义中, 对每一个$x\in E_1$, 有且仅有一个$y$值与它对应, 这样定义的函数称为单值函数. 如果同一个$x$值可以对应多于一个$y$的值, 那么称此函数为多值函数. 在本书中我们只讨论单值函数.

**注1.2.5**　函数$y=f(x)$ 在实数集$D$上的图像是平面点集

$$\{(x,y): x\in D, y=f(x)\}.$$

坐标平面上一个点集$G$是某个函数的图像的必要充分条件是: 平行于$y$轴的任一条直线与点集$G$至多有一个交点.

**注1.2.6**　函数的其他表示方法:

(1) 函数的分段表示: 设$E_1, E_2$是数集, 且$E_1\cap E_2=\varnothing$, $f_1(x), f_2(x)$是分别定义在$E_1$与$E_2$的函数, 则

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x),\ x\in E_1,\\ f_2(x),\ x\in E_2\end{cases}$$

是定义在数集$E=E_1\cup E_2$上的函数. 这种表示方法称为函数的分段表示.

(2) 函数的隐式表示: 是指通过方程$F(x,y)=0$来确定变量$y$与$x$之间的函数关系.

(3) 函数的参数表示: 是指通过建立参数$t$与$x$、参数$t$与$y$之间的函数关系, 间接地确定$x$与$y$之间的函数关系, 即

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\qquad t\in E.$$

**注1.2.7**　某些常用的特殊函数:

符号函数(图1.2.1)

$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

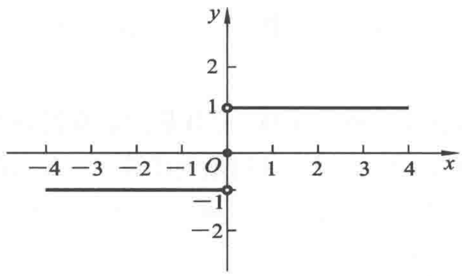


图1.2.1

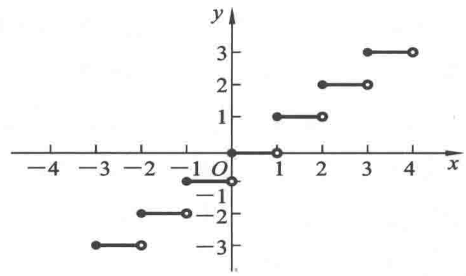


图1.2.2

取整函数(图1.2.2)

$$y=[x]=\{y:\ y\text{是不超过}x\text{的最大整数}\}.$$

狄利克雷(Dirichlet)函数(图1.2.3)

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

狄利克雷

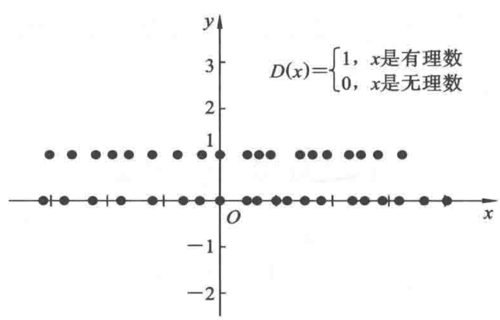


图1.2.3

定义在$[0,1]$上的黎曼(Riemann)函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (p,q\text{正整数},\ \dfrac{p}{q}\ \text{为既约真分数}),\\ 0, & x=0,1\ \text{和}\ (0,1)\ \text{内的无理数}.\end{cases}$$

黎 曼

**注1.2.8** 函数的四则运算: 如果函数$f(x),g(x)$分别定义在数集$E_1,E_2$上, 且$E_1\cap E_2\neq\varnothing$, 则函数$f(x)$与$g(x)$的和、差、积、商分别定义为

$$F(x)=f(x)+g(x),\quad x\in E_1\cap E_2,$$

$$G(x)=f(x)-g(x),\quad x\in E_1\cap E_2,$$

$$H(x)=f(x)\cdot g(x),\quad x\in E_1\cap E_2,$$

$$G(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in(E_1\cap E_2)\setminus\{x\in E_2:g(x)=0\}.$$

**注1.2.9**　复合函数: 设函数

$$y=f(u),\ u\in G,\quad u=g(x),\ x\in E.$$

若$D=\{x\in E:g(x)\in G\}\neq\varnothing$, 我们称函数

$$f(g(x)),\quad x\in D$$

为函数$f$与$g$的复合函数, 记作

$$y=f(g(x)),\quad x\in D,\quad 或\quad y=(f\circ g)(x),\quad x\in D.$$

**注1.2.10**　反函数: 设函数$y=f(x),x\in E$, 如果对于任意$y\in f(E)$, 存在唯一的$x\in E$, 使得

$$f(x)=y,$$

则按此对应法则定义一个在$f(E)$上的函数, 我们称这个函数为$f$的反函数, 记作

$$f^{-1}:f(E)\to E,\quad 或\quad x=f^{-1}(y),\ y\in f(E).$$

从反函数的定义, 我们能看出: $y=f(x),x\in E$ 存在反函数的必要充分条件是$E$与$f(E)$是一一对应, 即

$$\forall x_1,x_2\in E,\quad x_1\neq x_2\Longleftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

同时我们还有$f$与$f^{-1}$互为反函数, 即

$$f^{-1}(f(x))\equiv x,\ x\in E,\quad f(f^{-1}(y))\equiv y,\ y\in f(E).$$

另外习惯上我们将函数$y=f(x)$的反函数记作$y=f^{-1}(x)$, 但应该注意到: $y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图像是同一个, 而$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线$y=x$对称.

**注1.2.11**　初等函数: 将常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数统称为初等函数.

**例1.2.1**　已知$f(2x-1)=x^2,x\in\mathbf{R}$, 求$f(f(x))$的值域.

**解**　令$2x-1=y$, 那么$x=\dfrac{1}{2}(y+1)$. 这样

$$f(y)=\frac{1}{4}(y+1)^2,$$

所以

$$f(f(y))=\frac{1}{4}[\frac{1}{4}(y+1)^2+1]^2=\frac{1}{64}[(y+1)^2+4]^2.$$

因此, $f(f(x))$的值域是$[\dfrac{1}{4},+\infty)$.

**例1.2.2**　证明: 不存在这样的函数$f$与$g$, 对任意$x,y\in\mathbf{R}$, 使得

$$f(x)+f(y)=xy.\tag{1.2.1}$$

**证** 假设存在这样的函数$f$与$g$, 使得(1.2.1)式成立. 现在(1.2.1)式中, 对$\forall x\in\mathbf{R}$, 令$y=0$, 有

$$f(x)+g(0)=0.$$

即

$$f(x)=-g(0),\ \forall x\in\mathbf{R}. \tag{1.2.2}$$

这样, 将上式代入(1.2.1)式有

$$-g(0)+g(y)=xy,\ \forall x,y\in\mathbf{R}.$$

于是, 在上式中, 令$x=0$, 得

$$-g(0)+g(y)=0,\ \forall y\in\mathbf{R}.$$

或者

$$g(y)=g(0),\ \forall y\in\mathbf{R}. \tag{1.2.3}$$

因此, 由(1.2.2), (1.2.3)式, 对$\forall x,y\in\mathbf{R}$, 有

$$f(x)+g(y)=-g(0)+g(0)=0,$$

这与(1.2.1)式矛盾, 故不存在这样的函数$f$与$g$, 使得(1.2.1)式成立.

**例1.2.3** 证明: 若对$\forall x,y\in\mathbf{R}$, 有

$$2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y), \tag{1.2.4}$$

且$f(x)\neq 0$. 则对$\forall x,y\in\mathbf{R}$, 成立

(1) $f^2(x)=\dfrac{f(2x)+1}{2}$;

(2) $f^2(x)+f^2(y)=f(x+y)f(x-y)+1$.

**证** (1) 在(1.2.4)式中令$y=x$, 得

$$2f^2(x)=f(2x)+f(0). \tag{1.2.5}$$

又在(1.2.4)式中对$\forall x\in\mathbf{R}$, 令$y=0$, 有

$$2f(x)f(0)=2f(x).$$

由于$f(x)\neq 0$, 所以

$$f(0)=1.$$

这样由(1.2.5)式知结论(1)成立.

(2) 在(1.2.4)式中, 分别用$x+y$与$x-y$代替$x$与$y$, 并由结论(1)有

$$f(x+y)f(x-y)=\frac{1}{2}(f(2x)+f(2y))=f^2(x)+f^2(y)-1.$$

故结论(2)成立.