高等学校逻辑学专业系列教材

刘　虎/主编

结构证明论

马明辉　编著

科学出版社

高等学校逻辑学专业系列教材

刘虎/主编

结构证明论

马明辉　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

结构证明论研究形式系统中证明的结构. 本书介绍经典逻辑和直觉主义逻辑的自然演绎和矢列演算, 它们是结构证明论的基础理论. 根岑式矢列演算的基本定理是切割消除. 运用证明论研究方法, 通过分析证明的结构可以得到一些逻辑性质, 如子公式性质、可判定性、插值性质等. 本书还介绍了经典模态命题逻辑及一些代数逻辑的结构证明论.

本书可作为高校逻辑学及相关学科专业的教材供师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

结构证明论/马明辉编著. —北京: 科学出版社, 2019. 6

(高等学校逻辑学专业系列教材/刘虎主编)

ISBN 978-7-03-061601-2

Ⅰ. ①结… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①证明-高等学校-教材 Ⅳ. ①B812.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 113301 号

责任编辑: 郭勇斌 邓新平 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2019 年 6 月第一次印刷 印张: 17
字数: 332 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

“高等学校逻辑学专业系列教材”编委会

丛 书 序

孟子说, 人和禽兽的差别几希, 这差别在于人可以明庶物和察人伦. 用现代的话说, 我们既有明辨万事万物的自然科学, 又有体察道德规律、人际关系的社会科学. 前者探讨外物, 后者考察人心, 它们构成我们 “文明” 的基础.

两千年来, 中国传统学者在检视人伦方面用力甚勤, 但在明察庶物的自然科学研究上则落后于传承古希腊思想的西方同行. 中国传统文献中对人伦秩序有着精到的描述, 直至社会秩序和人际关系中隐微的细节. 自然科学研究需要的客观、理性、怀疑精神和试验方法, 则是我们需要补上的一课.

爱因斯坦说, 西方科学的发展源自两个伟大的成就, 即古希腊人发明的形式逻辑, 以及确认因果关系的实验方法. 使用基于逻辑的理性工具总结和分析实验材料, 纷繁复杂的自然科学体系, 不外如是. 中国历史上在自然科学领域较为落后, 也需要在逻辑和实验这两个方面寻找原因.

人们经常在不同的语境和意义下使用 “逻辑” 这个词. 我们说, 思考的逻辑, 代表某种思维规律; 我们说, 讲话的逻辑, 代表上下文间具有的某种联系; 我们甚至说, 生活的逻辑、吃饭的逻辑, 代表一项活动中的某种规律性. 若某人被贴上 “没有逻辑” 的标签, 等同于指控他的愚笨.

虽然难以得到准确的、行之有效的 “逻辑” 的定义, 但我们大体知道, 逻辑是构成人类概念和知识体系的基石. 逻辑由一些形式规律构成. 最简单的例子如称为同一律的 “如果 A 是真的, 那么 A 是真的”. 显然, 缺少了这样的形式规律, 人的心灵只是一团乱麻. 这些形式规律先于知识, 是知识的起点, 它们规范了知识的形态和样式. 它们或多或少地存在于每个人的心灵中, 使得人成为理性的个体. 有时, 我们甚至可以互换使用逻辑和理性这两个词.

逻辑学是一门研究逻辑的学科. 它最早产生于古希腊. 亚里士多德是古希腊逻辑学的创立者和代表人物. 亚里士多德的学说在其后两千多年里得到了延续和发展, 逻辑学的基本理念和研究方法仍与其一脉相承, 直到数学化的符号逻辑在 19 世纪末 20 世纪初被弗雷格和罗素等发现. 我们有时称前者为传统逻辑或非形式逻辑, 称后者为现代逻辑、形式逻辑或符号逻辑. 现代的形式逻辑并不是对传统非形式逻辑的反证. 它们是相辅相成的关系. 它们有着各自适用的领域, 它们探讨的问题有交叉也有较大的差异. 非形式逻辑在当代仍是一门有着强大生命力的学科.

逻辑学还包括其他与逻辑相关的研究和讨论. 逻辑哲学分析和考察在逻辑学研究中产生的哲学问题. 逻辑哲学与语言哲学和分析哲学密切相关. 逻辑学史, 顾名

思义, 探讨逻辑学的发展历史. 历史上, 系统性的逻辑学研究只出现于西方传统. 但是, 中国和印度的古代文献中也有部分零散但精妙的论述. 对这些文本的研究我们归之于中国逻辑 (史) 和佛教逻辑的范畴. 由于逻辑学的基础地位, 它在其他学科中有着广泛的应用. 我们在哲学、数学、计算机、法律甚至经济学中都能发现以逻辑学为主业的教授. 这些逻辑学的应用我们统称为应用逻辑. 一套完整的逻辑学教材, 应该涵盖以上所述的逻辑学各个分支.

逻辑学对一个健全完整的教育体系而言是不可缺少的重要环节. 逻辑学是西方传统古典课程的 "七艺" 之一. 联合国教科文组织也将逻辑学列为二十四大顶层学科之首, 与数学并列为两大精确科学. 逻辑学 20 世纪传入中国, 80 年代以后在中国得到高速发展. 当前, 中国逻辑学在研究人员的数量、研究成果的质量和水平上已经接近或达到了国际先进水平. 而在逻辑学的教育和普及方面, 我们和西方同行相比则有不小的差距. 此次出版的这套高等学校逻辑学专业系列教材, 也是我们为弥补这个差距所做的努力.

本套逻辑学教材由中山大学逻辑学科主持牵头编写. 中山大学于 2007 年开办逻辑学本科专业, 是我国目前唯一连续招生的逻辑学本科专业. 经过十几年的教学实践和建设, 我们的课程体系已经覆盖了逻辑学的各个主要分支领域. 这些课程的任课教师是一批具有国际学术视野、在前沿问题上从事研究工作的中青年学者, 他们也是这套教材的主要作者. 此外, 我们有幸邀请到十余位国内其他高校的逻辑学学者担任教材的编委工作. 他们的帮助和指导将大大提高本套教材的质量和适用性. 我在此一并对他们表示感谢.

刘　虎

2019 年 5 月

前　　言

证明论是以证明为研究对象的数理逻辑分支. 它大致分为结构证明论和解释性证明论. 结构证明论研究形式系统中证明的结构, 以德国数学家和逻辑学家格哈德 • 根岑 (Gerhard Gentzen, 1909~1945) 提出的自然演绎和矢列演算为基本工具. 解释性证明论则探索形式理论之间的句法解释, 比如, 直觉主义算数可实现性的形式化和库尔特 • 哥德尔 (Kurt Gödel, 1906~1978) 对直觉主义算数的泛函解释 (Troelstra, 1973). 本书介绍结构证明论基础.

在逻辑和数学中, 证明是从给定的前提得出结论的演绎推理过程. 戈特洛布 • 弗雷格 (Gottlob Frege, 1848~1925) 在《概念文字》开头就提出: “进行证明的最可靠的方式显然是遵守纯逻辑, 它不考虑对象的特殊性质, 只依赖于全部知识所依据的那些规律.” (Frege, 1879) 并非所有数学规律都能得到证明. 不加证明而被接受的第一原理称为*公理*, 它们的真从所涉及的基本概念来看是自明的. 从公理出发可以证明新的命题. 同样, 一些概念是不加定义的*基本概念*, 通过定义得到的概念称为*导出概念*. 导出概念可以还原为基本概念. 例如, 在集合论中, “属于关系”是不加定义的基本概念, “$x \in y$”是基本表达式; “包含关系”是从基本概念出发定义的概念, “$x \subseteq y$”定义为“对所有集合 z, 如果 $z \in x$, 那么 $z \in y$”. 在选取公理时, 可以要求选择仅使用基本概念的真命题. 从公理出发证明的真命题称为*定理*. 由基本概念、导出概念、公理和定理组成的体系称为*公理系统*.

欧几里得几何是目前已知的历史上第一个公理系统. 每个公理都是由一些基本概念组成的真命题. 从公理出发, 以逻辑的方式证明定理. 例如, 设一个三角形的三个角分别是 A, B, C. 现在证明 $A + B + C = 180°$. 这个命题不是自明的, 需要运用平行线公理及关于角的命题给出它的证明. 几何定理证明是在实践中进行逻辑证明的范例. 但是, 对证明本身进行分析, 出现于亚里士多德的《前分析篇》和《后分析篇》. 亚里士多德认为, 一个推理是一个论证 (证明), 在这个论证中, 有些东西被规定下来, 由此必然地得出一些与此不同的东西. 亚里士多德认为, 一门演绎科学的基础是一些无需定义的基本概念和无需证明的基本原理. 通过定义从基本概念得到导出概念, 通过证明从公理得到定理. 亚里士多德的三段论就是关于推理的形式逻辑理论.

19 世纪数学中出现了适用于多组不同概念的公理系统, 尤其是群论. 一个*群*是数学结构 $(G, \circ, e)$, 其中 G 是非空集, $\circ$ 是 G 上的二元运算, $e \in G$ 是常量, 并且满足以下公理:

(G1) 对任意 $x, y, z \in G$ 都有 $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

(G2) 对任意 $x \in G$ 都有 $x \circ e = e = e \circ x$.

(G3) 对任意 $x \in G$ 存在 $y \in G$ 使得 $x \circ y = e$.

以上公理构成群的公理系统. 在该系统中可以证明定理. 例如, 对任意 $x \in G$ 存在 $y \in G$ 使得 $y \circ x = e$. 在逻辑学发展中出现了对演绎推理的数学分析. 乔治·布尔 (George Boole, 1815~1864) 在 1847 年的著作《逻辑的数学分析》开篇写道: “熟悉当前符号代数理论的人都清楚, 分析过程的有效性不依赖于对其中所运用符号的解释, 只依赖于符号组合的规律. ” (Boole, 1847) 逻辑推理的有效性不依赖于所涉及句子的具体内容, 只与推理的形式有关. 布尔认为, 逻辑不是哲学的一部分, “根据真正的分类原则, 我们不应该把逻辑与形而上学联系在一起, 而是把逻辑与数学联系在一起” (Boole, 1847). 在布尔看来, 亚里士多德三段论的典型形式确实是符号性的, 但是这些符号并不像数学符号那样完善. 布尔对演绎推理进行了数学分析, 重新建立逻辑规则的符号表示. 查尔斯·桑德斯·皮尔士 (Charles Sanders Peirce, 1839~1914) 不断改进布尔的逻辑代数, 于 1880 年提出相对于布尔代数完全的演绎系统. 同时代的朱塞佩·皮亚诺 (Giuseppe Peano, 1858~1932) 也研究了算数中逻辑推理的形式化问题.

弗雷格在 1879 年的著作《概念文字》中建立了数理逻辑的形式化公理系统. 按弗雷格的想法, 公理都是逻辑真句子, 通过有穷多个规则可以从给定的有穷多个公理得到全部逻辑真句子. 从句子形式方面研究公理和定理, 称为公理系统的*句法*. 为了从句法上研究公理系统, 可以引入*形式系统*的概念. 一个形式系统 F 是公理系统的形式部分, 它由形式语言、公理和推理规则三部分组成. 为了确定形式语言, 首先要给出一些基本符号, 有穷多个符号组成的符号串是该语言的表达式. 按照一定的形成规则得到的有意义的表达式称为语言的*公式*. 从所有公式中选择一些不加证明的公式作为形式系统 F 的公理. 一个推理规则是由前提和结论组成的. 在形式系统 F 中, 一个定理是这样的公式, 它要么是公理, 要么是从已知定理通过推理规则得到的公式.

伯特兰·罗素 (Bertrand Russell, 1872~1970) 和艾尔弗雷德·怀特海 (Alfred Whitehead, 1861~1947) 的《数学原理》采用了皮亚诺的记号和形式规则, 表述了数理逻辑的形式系统. 达维德·希尔伯特 (David Hilbert, 1862~1943) 和威廉·阿克曼 (Wilhelm Ackermann, 1896~1962) 在 1928 年发表的《数理逻辑原理》中清晰表述了谓词逻辑的形式系统. 哥德尔于 1929 年证明了谓词逻辑形式系统的完全性. 阿隆佐·丘奇 (Alonzo Church, 1903~1995) 于 1936 年证明了谓词逻辑的不可判定性. 数理逻辑的形式系统的建立和发展, 标志着逻辑学作为一门科学彻底建立起来. 关于数理逻辑的研究对象, 哥德尔曾有一段精妙的表述:

数理逻辑不是别的, 它不过是对形式逻辑的一种精确而完全的表述,

它有两个不同的方面. 一方面, 它是数学中处理类、关系、符号组合等东西的部分, 而不是处理数、函数、几何图形等东西的部分. 另一方面, 它是一门先于所有其他科学的科学, 它包含全部科学共同依赖的观念和原理. (Gödel, 1944)

形式系统提供了研究证明的严格方法. 这一方法的发展与希尔伯特提出的数学基础问题密切相关. 希尔伯特在 1921 年提出形式主义纲领, 其目标是得到全部数学的一个形式化公理系统, 还要证明该系统的一致性. 这种思想起源于他在 1899 年撰写的《几何基础》. 希尔伯特认为, 严格发展任何一门科学的正确方法就是公理化方法, 公理系统的建立要独立于任何直觉; 给出的公理要有助于分析基本概念和公理之间的逻辑联系. 建立公理系统之后, 一个重要问题就是系统的一致性. 在 20 世纪 20 年代后期, 希尔伯特学派对算数系统的元数学问题进行研究, 尝试提出解决数学系统的一致性问题的方法. 但是, 哥德尔在 1930 年证明了初等算数不可能有完全的形式系统, 也不可能通过有穷方法证明算数的一致性. 哥德尔不完全性定理否认了希尔伯特纲领的可行性.

然而, 在数学基础研究中希尔伯特纲领仍然具有重要地位. 根岑在 20 世纪 30 年代对元数学进行研究, 相对化希尔伯特纲领成为证明论发展的核心. 在 1932~1933 年, 哥德尔和根岑分别独立证明: 经典皮亚诺算数可通过翻译嵌入直觉主义算数. 直觉主义算数已经包含超出有穷方法的原理. 在研究算数系统的一致性问题时, 根岑开始研究纯逻辑的演绎, 由此建立起证明论这一数理逻辑分支. 根岑 1909 年 11 月 24 日出生于德国格赖夫斯瓦尔德 (Greifswald), 1932 年开始在哥廷根大学成为保罗・贝奈斯 (Paul Bernays, 1888~1977) 的学生, 1933 年 4 月起由赫尔曼・外尔 (Hermann Weyl, 1885~1955) 继续担任其导师. 1933 年外尔担任哥廷根大学数学系主任. 从 1935 年到 1936 年, 外尔曾付出巨大努力试图将根岑引进到普林斯顿高等研究院, 但是没有成功. 从 1935 年 11 月到 1939 年, 根岑在哥廷根大学担任希尔伯特的助手. 1943 年根岑在布拉格大学任教. 1945 年 5 月 5 日, 根岑在布拉格解放时被捕入狱, 1945 年 8 月 4 日在狱中因营养不良饥饿致死.

1932~1934 年, 根岑在博士论文《逻辑演绎研究》中研究实际使用的数学证明的结构, 论文分两部分发表于德国《数学杂志》(1935 年第 39 卷第 2 期和第 3 期). 根岑认为, "逻辑演绎的形式化, 特别是弗雷格、罗素和希尔伯特所发展的形式化, 与数学证明中实际使用的演绎形式相去甚远. ……相反, 我首先想要建立一个形式系统, 它尽可能接近实际的推理. 所得到的结果就是'自然演绎的演算'"(Gentzen, 1964). 根岑的意思很明确, 数学中实际使用的证明与希尔伯特式公理系统中的证明不同, 公理系统中的证明与数学证明实践相去甚远, 他的目标是建立贴近实际数学证明的演绎系统, 这种系统被称为"自然演绎". 一般来说, 比较自然的推理形式是从一些前提推出一个结论:

$$\frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{\beta}$$

根岑称之为一个推理图. 在根岑看来, 推导过程是推理图的变换过程, 这个过程要按照逻辑规则进行. 例如, 为了证明 $\alpha \wedge \beta$, 只需要分别证明 α 和 β. 这是联结词 $\wedge$ (并且) 的引入规则. 在推导过程中, 如果得到 $\alpha \wedge \beta$, 就可以分别得到 α 和 β, 这是 $\wedge$ 的消去规则. 根岑把这些规则写成以下推理图:

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}(\wedge I) \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}(\wedge E) \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}(\wedge E)$$

在自然演绎系统中, 联结词 $\rightarrow$ (“蕴涵”) 要复杂一些. 为了证明 $\alpha \rightarrow \beta$, 首先要假设 α, 然后推出 β. 这就是联结词 $\rightarrow$ 的引入规则 $(\rightarrow I)$, 其中 $[\alpha]$ 表示临时引入的假设, 它随着 $\rightarrow$ 的引入而被撤销. 从 $\alpha \rightarrow \beta$ 和 α 可得到 β, 这是联结词 $\rightarrow$ 的消去规则 $(\rightarrow E)$.

$$\frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \rightarrow \beta}(\rightarrow I) \qquad \frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}(\rightarrow E)$$

根岑还给出了其他联结词和量词的规则, 严格定义了自然演绎系统中“推导”的概念, 给出了直觉主义逻辑和经典逻辑的自然演绎系统.

为了证明直觉主义命题逻辑的一致性和可判定性, 根岑提出了“正规推导”的概念. 正规化定理是根岑的主要发现, 它的意思是,“任何纯逻辑证明都可以归约为确定的标准形式, 尽管不是唯一的” (Gentzen, 1964). 标准形式的证明是没有“迂回”的证明, 对于所要证明的结果来说, 它只包含了必要的实质性的概念和步骤. 在根岑的自然演绎中, 每个推导都可以转化为一个标准推导. 根据这条正规化定理, 可以得到直觉主义命题逻辑的一致性和可判定性.

根岑最初没能证明经典逻辑的自然演绎的正规化定理, 为解决这个问题, 他发明了矢列演算. 一个矢列的基本形式是 $\Gamma \Rightarrow \Delta$, 其中 Γ 和 Δ 是由有穷多个公式组成的公式序列, 符号 $\Rightarrow$ 表示 Δ 中某个公式是 Γ 的演绎后承. 因此, 如果 Γ 和 Δ 中有相同的公式, 那么二者之间的演绎后承关系显然成立. 在经典逻辑的矢列系统中, 矢列 $\Gamma, \alpha, \Sigma \vdash \Delta, \alpha, \Theta$ 是作为公理出现的. 自然演绎系统中联结词的消去规则和引入规则, 分别转化为矢列系统中联结词的左引入规则和右引入规则. 例如,

$$\frac{\alpha}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\wedge l) \quad \frac{\beta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\wedge l) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}(\wedge r)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \quad \beta, \Delta \Rightarrow \Theta}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma, \Delta \Rightarrow \Sigma, \Theta}(\rightarrow l) \quad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \rightarrow \beta}(\rightarrow r)$$

运用矢列演算可以证明经典命题逻辑的一致性和可判定性. 直觉主义命题逻辑的矢列演算是将经典逻辑的矢列后件限制为单个公式得到的. 自然演绎系统的标准化定理在矢列演算中变化为"切割消除定理". 例如, 直觉主义矢列演算的切割规则是

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \Rightarrow \beta}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \beta}(cut)$$

在直觉主义矢列演算中, 每个推导都可以转化为不使用 (cut) 的推导, 这就是"切割消除". 运用切割消除可以得到子公式性质、一致性、可判定性、插值定理等重要逻辑性质.

希尔伯特学派的目标是通过一致性问题的有穷证明来澄清数学基础问题, 而对于证明概念本身的逻辑分析并不感兴趣. 近年的研究发现, 除了著名的 23 个数学基础问题以外, 希尔伯特在 1900 年还提出了第 24 个问题: 建立关于数学证明方法的理论. 这个问题本质上是一项研究计划, 而不是具体的有待解决的数学问题. 这项计划的提出先于希尔伯特形式主义元数学纲领, 对证明论的发展没有起到明显的促进作用. 根岑的目标是分析证明的结构, 对逻辑理论研究来说, 自然演绎和矢列演算都是非常成功的.

自然演绎和矢列演算的提出标志着证明论作为独立的逻辑学分支建立起来. 它们形成了"结构证明论"的基本理论, 对形式证明的结构进行组合性分析. 在逻辑理论研究方面, 矢列演算不仅被用于研究各种逻辑性质, 还被拓展为各种不同类型的证明系统, 如加标矢列演算、超矢列演算、显示演算、深度推理系统等. 在应用方面, 证明论被广泛应用于计算理论、计算机程序验证、自动定理证明、逻辑编程等. 证明论是数理逻辑中正在迅速发展的新分支. 本书是编者为中山大学哲学系逻辑学本科专业开设"证明论"课程编写的讲义, 其主要目的是介绍结构证明论的基础和研究方法. 本书涉及的逻辑理论包括经典逻辑和一部分非经典逻辑, 如直觉主义逻辑、模态逻辑等. 通过掌握证明论基础知识, 可进一步学习各种类型的证明论系统, 将它们应用于逻辑研究领域.

以下对本书涉及的集合论概念作简要说明. 我们用许多字母表示集合, 如 A, B, C, X, Y, Z 等. 我们用 $\in$ 表示属于关系. 称集合 A 和 B 相等, 记号 $A = B$, 如果 A 和 B 有相同的元素, 即对任意元素 a, $a \in A$ 当且仅当 $a \in B$. 不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$. 称集合 A 是 B 的*子集*, 记号 $A \subseteq B$, 如果对任意 $a \in A$ 都有 $a \in B$. 称集合 A 是 B 的*真子集*, 记号 $A \subsetneq B$, 如果 $A \subseteq B$ 并且 $A \neq B$. 对任意集合 A, 它的幂集定义为 $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. 对集合 $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, 基本集合运算如下:

(1) X 和 Y 的交集 $X \cap Y = \{a \in A \mid a \in X$ 并且 $a \in Y\}$.

(2) X 和 Y 的并集 $X \cup Y = \{a \in A \mid a \in X$ 或者 $a \in Y\}$.

(3) X 和 Y 的差集 $X \setminus Y = \{a \in A \mid a \in X$ 并且 $a \notin Y\}$.

(4) X 的补集 $X^c = A \setminus X$.

对任意集合族 $S = \{A_i \mid i \in I\}$, 其中 I 是指标集, 令 $\bigcup S = \bigcup_{i\in I} A_i$ 是 S 中所有集合的并集. 令 $\bigcap S = \bigcap_{i\in I} A_i$ 是 S 中所有集合的交集.

一个集合 A 的基数记为 $|A|$. 自然数的集合记为 $\mathbb{N}$ 或 ω. 正整数的集合记为 $\mathbb{Z}^+$. 称集合 A 有穷, 如果存在 $n \in \omega$ 使得 $|A| = n$. 称集合 A 可数无穷, 如果 $|A| = \omega$.

集合 A 和 B 的笛卡儿积定义为有序对的集合 $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ 并且 $b \in B\}$. 集合 $A_1, \cdots, A_n$ 的笛卡儿积定义为 n-元组的集合

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

其中 $(a_1, \cdots, a_n)$ 称为一个 n 元组或 n 元序列. 对 $1 \leqslant i \leqslant n$, a_i 称为第 i 个分量. 如果对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 都有 $A_i = A$, 那么 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 记为 A^n. 集合 A 和 B 之间的关系 R 是 $A \times B$ 的一个子集. 对任意关系 $R \subseteq A \times B$, 对任意元素 $a \in A$ 和 $b \in B$, 称 a 和 b 有 R 关系, 如果 $(a,b) \in R$. 我们也写 aRb 或者 Rab 表示 $(a,b) \in R$. 对任意 $X \subseteq A$ 和 $Y \subseteq B$, 定义 $R[X] = \{b \in B \mid$ 存在 $a \in X$ 使得 $aRb\}$ 和 $R^{-1}[Y] = \{a \in A \mid$ 存在 $b \in Y$ 使得 $aRb\}$. 一个集合 A 上的 n 元关系 R 是 A^n 的子集, 即 $R \subseteq A^n$. 特别地, 令 $A^0 = \{\varnothing\}$.

从集合 A 到 B 的一个函数 f 是 $A \times B$ 的一个子集使得对任意 $a \in A$ 存在唯一 $b \in B$ 使得 $(a,b) \in f$. 我们把这个唯一的 b 记为 $f(a)$, 称为 a 在函数 f 下的象. 一般把函数 f 记为 $f : A \to B$. 所有从 A 到 B 的函数的集合记为 B^A. 集合 A 上的一个 n 元函数记为 $f : A^n \to A$. 设 $f : A \to B$ 是从 A 到 B 的一个函数. 对任意 $X \subseteq A$, 定义

$$f[X] = \{f(a) \mid a \in X\}.$$

称为 X 在 f 下的像集. 对任意 $Y \subseteq B$, 定义

$$f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

称为 Y 在 f 下的原像集. 对任意函数 $f : A \to B$, 称 f 为单射, 如果 $a \neq b$ 蕴涵 $f(a) \neq f(b)$. 称 f 为满射, 如果对任意 $b \in B$ 存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$.

下面介绍与非空集上的偏序有关的概念. 对任意非空集 A, 设 $\leqslant \subseteq A^2$. 称 $\leqslant$ 是 A 上的偏序, 如果对任意 $a, b, c \in A$ 以下条件成立:

$(P1)$ $a \leqslant a$ (自返性).

$(P2)$ 如果 $a \leqslant b$ 并且 $b \leqslant c$, 那么 $a \leqslant c$ (传递性).

($P3$) 如果 $a \leqslant b$ 并且 $b \leqslant a$, 那么 $a = b$ (反对称性).
一个偏序集是有序对 $(A, \leqslant)$, 其中 $A \neq \varnothing$ 并且 $\leqslant$ 是 A 上的偏序. 任给偏序集 $(A, \leqslant)$ 和 A 的非空子集 B, 对任意元素 $a \in A$:

(1) 称 a 是 B 的极大元, 如果 $a \in B$, 并且对任意 $b \in B$ 都有 $a \leqslant b$ 蕴涵 $a = b$.

(2) 称 a 是 B 的最大元, 如果 $a \in B$ 并且对任意 $b \in B$ 都有 $b \leqslant a$.

(3) 称 a 是 B 的极小元, 如果 $a \in B$, 并且对任意 $b \in B$ 都有 $b \leqslant a$ 蕴涵 $a = b$.

(4) 称 a 是 B 的最小元, 如果 $a \in B$ 并且对任意 $b \in B$ 都有 $a \leqslant b$.

(5) 称 a 是 B 的上界, 如果对任意 $b \in B$ 都有 $b \leqslant a$.

(6) 称 a 是 B 的上确界, 如果 a 是 B 的上界并且对 B 的任意上界 b 都有 $a \leqslant b$.

(7) 称 a 是 B 的下界, 如果对任意 $b \in B$ 都有 $a \leqslant b$.

(8) 称 a 是 B 的下确界, 如果 a 是 B 的下界并且对 B 的任意下界 b 都有 $b \leqslant a$.

子集 B 的所有上界的集合记为 B^u, 它的所有下界的集合记为 B^l. 如果 B 的上确界存在, 则记为 $\bigvee B$ 或 $sup(B)$. 如果 B 的下确界存在, 则记为 $\bigwedge B$ 或 $inf(B)$.

设 $A \neq \varnothing$ 并且 B 是 A 的非空子集. 二元关系 $R \subseteq A^2B$ 的限制定义为 $R|B = R \cap (B \times B)$. 对任意偏序集 $(A, \leqslant)$, 称 $\leqslant$ 是 A 上的线性序, 如果对任意 $a, b \in A$ 都有 $a \leqslant b$ 或者 $b \leqslant a$. 称非空子集 $B \subseteq A$ 是 A 中的链, 如果 $\leqslant|B$ 是 B 上的线性序. 在证明中常使用佐恩引理 (Zorn lemma): 对任意偏序集 $(A, \leqslant)$, 如果 A 中任意非空链都有上界, 那么 A 有极大元.

下面介绍与非空集上等价关系有关的概念. 一个非空集合 A 上的二元关系 R 称为 A 上的等价关系, 如果对任意 $a, b, c \in A$ 以下条件成立:

($E1$) aRa (自返性).

($E2$) 如果 aRb 并且 bRc, 那么 aRc (传递性).

($E3$) 如果 aRb, 那么 bRa (对称性).
对非空集 A 上任意等价关系 R 和 $a \in A$, 集合 $|a|_R = \{b \in A \mid aRb\}$ 称为 a 的等价类. 所有等价类的集合记为 $A/_R$, 称为 A 在 R 下的商集.

设 F 是 A 上函数的集合. 对每个 $f \in F$, 令 $\Omega(f)$ 表示 f 的元数. 称 A 上等价关系 R 是 F-同余关系, 如果对任意 $f \in F$ 和 $a_1, \cdots, a_{\Omega(f)} \in A$ 及 $b_1, \cdots, b_{\Omega(f)} \in A$, 如果对所有 $1 \leqslant i \leqslant \Omega(f)$ 都有 a_iRb_i, 那么 $f(a_1, \cdots, a_{\Omega(f)})Rf(b_1, \cdots, b_{\Omega(f)})$. 对所有 $f \in F$, 定义 $A/_R$ 上 $\Omega(f)$ 元关系 $f/_R \subseteq (A/_R)^{\Omega(f)}$ 如下:

$$f(|a_1|_R, \cdots, |a_{\Omega(f)}|_R) = |f(a_1, \cdots, a_{\Omega(f)})|_R.$$

如果 R 是 F-同余关系, 那么 $f/_R$ 是 $A/_R$ 上的 $\Omega(f)$ 元函数.

一个可重集是一个函数 $f: A \to \mathbb{Z}^+$, 其中 A 是集合, $\mathbb{Z}^+$ 是正整数集合. 对可重集 $f: A \to \mathbb{Z}^+$ 和 $g: B \to \mathbb{Z}^+$, 定义 f 和 g 的可重并集 $f \uplus g: A \cup B \to \mathbb{Z}^+$ 如下:

$$(f \uplus g)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in A \setminus B. \\ f(x) + g(x), & \text{如果 } x \in A \cap B. \\ g(x), & \text{如果 } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

对可重集 $f: A \to \mathbb{Z}^+$ 和元素 $a \in A$, $f(a)$ 可以看作元素 a 重复出现的次数. 因此, 一个可重集也可以看作允许元素重复出现的集合.

目　录

丛书序
前言
第 1 章　命题逻辑 …… 1
　1.1　经典命题逻辑 …… 1
　1.2　直觉主义命题逻辑 …… 15
　1.3　习题 …… 22
第 2 章　自然演绎 …… 26
　2.1　费奇式自然演绎 …… 26
　2.2　根岑式自然演绎系统 …… 32
　2.3　正规化 …… 39
　2.4　完全性 …… 49
　2.5　习题 …… 51
第 3 章　矢列演算 …… 54
　3.1　G0 型矢列演算 …… 54
　3.2　切割消除 …… 61
　3.3　可判定性 …… 81
　3.4　插值性质 …… 88
　3.5　习题 …… 100
第 4 章　矢列演算的结构规则 …… 104
　4.1　G1 型矢列演算 …… 104
　4.2　G2 型矢列演算 …… 118
　4.3　G3 型矢列演算 …… 120
　4.4　G4 型矢列演算 …… 140
　4.5　嵌入定理 …… 150
　4.6　习题 …… 156
第 5 章　一阶逻辑 …… 158
　5.1　一阶逻辑的公理系统 …… 158
　5.2　一阶逻辑的矢列演算 …… 170
　5.3　直觉主义谓词逻辑的矢列演算 …… 181
　5.4　习题 …… 186

第 6 章　经典模态命题逻辑 ······ 188
　6.1　正规模态逻辑 ······ 188
　6.2　模态矢列演算 ······ 202
　6.3　超矢列演算 ······ 215
　6.4　习题 ······ 225
第 7 章　代数逻辑 ······ 228
　7.1　偏序代数结构 ······ 228
　7.2　格与分配格 ······ 231
　7.3　加算子的分配格 ······ 244
　7.4　习题 ······ 251
参考文献 ······ 253

第1章　命题逻辑

命题逻辑是关于命题联结词的逻辑理论. 经典命题逻辑假定二值原则: 每个命题要么是真的, 要么是假的; 一个命题联结词解释为定义在"真"和"假"两个真值上的函数. 直觉主义命题逻辑是通过改变命题联结词的解释而得到的非经典逻辑. 本章介绍经典命题逻辑和直觉主义命题逻辑的句法、语义、公理系统和一些逻辑性质.

1.1　经典命题逻辑

经典命题逻辑形式语言的初始符号包括: ① 可数命题变元集 $\mathbf{Prop} = \{p_i \mid i < \omega\}$. ② 零元联结词 $\bot$ (恒假); 二元联结词 $\wedge$ (合取)、$\vee$ (析取) 和 $\to$ (蕴涵). ③ 括号) 和 (. 我们用 p, q, r 等字母表示 $\mathbf{Prop}$ 中的任意命题变元.

定义 1.1　经典命题逻辑形式语言的*公式集*$\mathscr{L}$ 归纳定义如下:

$$\mathscr{L} \ni \alpha ::= p \mid \bot \mid (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \mid (\alpha_1 \vee \alpha_2) \mid (\alpha_1 \to \alpha_2), \text{ 其中 } p \in \mathbf{Prop}.$$

我们用 α, β, γ 等字母 (可带下标) 表示*公式模式*, 它们代表公式集 $\mathscr{L}$ 中的任意公式. 定义缩写 $\neg\alpha := \alpha \to \bot$ (否定); $\top := \bot \to \bot$ (恒真); $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ (等值). 一个命题变元或 $\bot$ 称为*原子公式*. 所有原子公式的集合记为 $\mathbf{At} = \mathbf{Prop} \cup \{\bot\}$. 对任意公式 α, 如果 α 是形如 $\alpha_1 \circ \alpha_2$ 的公式, 那么称 $\circ$ 为 α 的*主联结词*.

我们用 $var(\alpha)$ 表示公式 α 中出现的所有命题变元的集合. 用 $\alpha(p_1, \cdots, p_n)$ 表示公式 α 使得 $var(\alpha) \subseteq \{p_1, \cdots, p_n\}$. 若 $var(\alpha) = \varnothing$, 则称 α 为*无变元公式*.

注解 1.1　定义 1.1 称为 BNF 句法 (Backus-Naur 形式的句法). 对公式集更具体的归纳定义如下. 初始符号集合 S 上一个*符号串*是有穷长度的符号序列. 所有符号串的集合是 $Str = \bigcup_{n \in \omega} S^n$. 令 W 是 Str 的满足以下条件的最小子集:

(1) $\mathbf{At} \subseteq W$.

(2) 如果 $\alpha, \beta \in W$, 那么 $(\alpha \circ \beta) \in W$, 其中 $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

那么 $W = \mathscr{L}$. 基于公式定义的*归纳定义原理*如下: 对任意非空集合 A, 设 $N_{\mathbf{at}} : \mathbf{At} \to A$ 是一元函数; 对 $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$, $N_\circ : A \times A \to A$ 是集合 A 上的二元函数. 那么存在唯一函数 $N : \mathscr{L} \to A$. 基于公式定义的*归纳证明原理*如下: 令 $\mathcal{R}$ 是符号串的性质. 设以下条件成立: ① 对 $\alpha \in \mathbf{At}$ 都有 $\mathcal{R}(\alpha)$; ② 对任意 $\alpha, \beta \in \mathscr{L}$ 和