

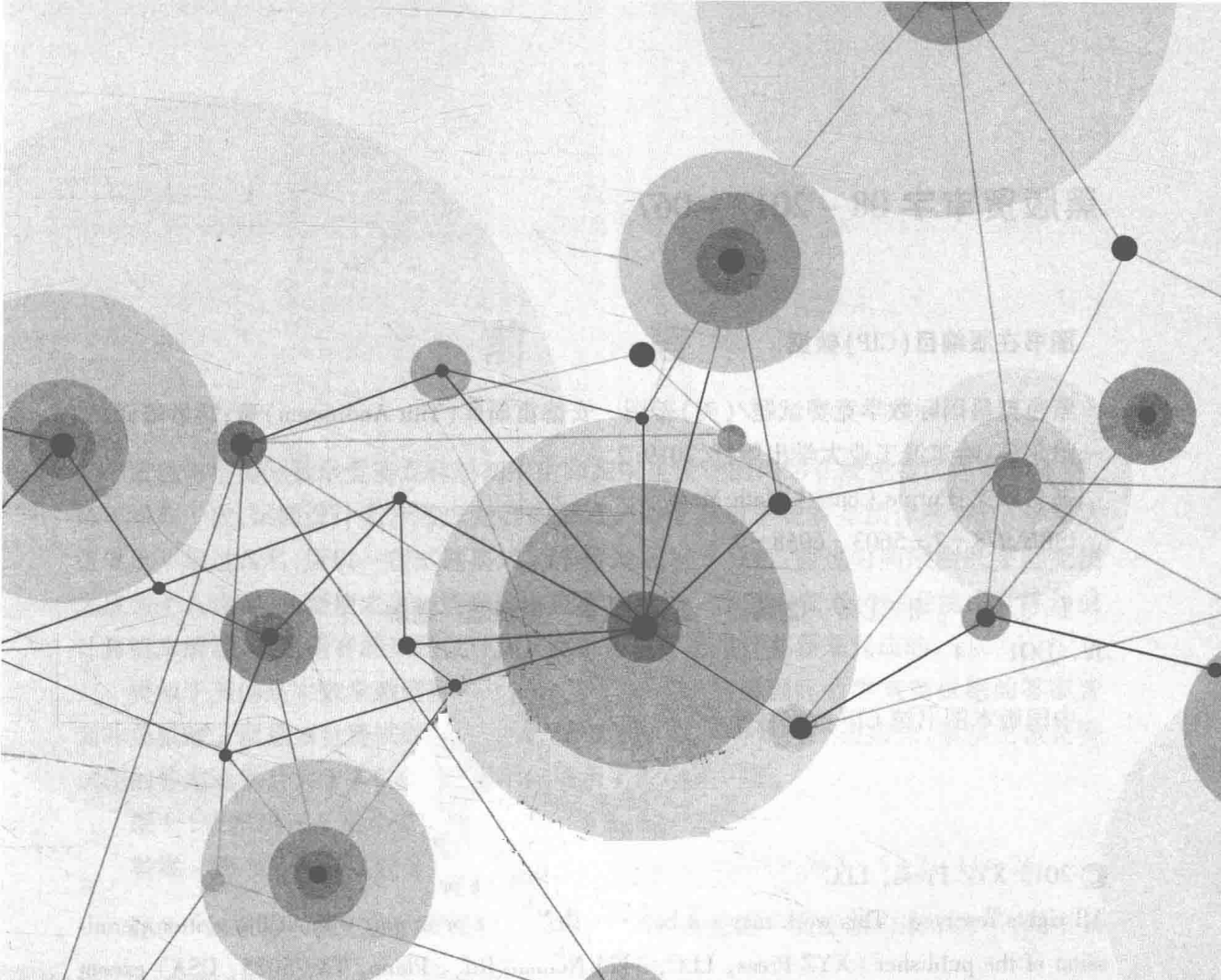


紫色彗星国际数学竞赛试题

Purple Comet! Math Meet

[美]蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu) 著

姚妙峰 译



紫色彗星国际数学竞赛试题

Purple Comet! Math Meet

[美]蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu) 著

姚妙峰 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08 - 2017 - 067

图书在版编目(CIP)数据

紫色彗星国际数学竞赛试题/(美)蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)著;姚妙峰译.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.2

书名原文:Purple Comet! Math Meet

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6958 - 7

I. ①紫… II. ①蒂…②姚… III. ①数学 - 竞赛题 - 题解
IV. ①O1 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 253119 号

© 2013 XYZ Press, LLC

All rights reserved. This work may not be copied in whole or in part without the written permission of the publisher (XYZ Press, LLC, 3425 Neiman Rd., Plano, TX 75025, USA) except for brief excerpts in connection with reviews or scholarly analysis. www.awesomemath.org

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 王勇钢

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 18.25 字数 378 千字

版 次 2019 年 2 月第 1 版 2019 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6958 - 7

定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

紫色彗星国际数学竞赛是针对初中生和高中生设计的网络在线免费团体数学竞赛,每年举办一次,试题设计充分考虑竞赛的形式。由于该数学竞赛是团体赛,每个参赛队伍成员不超过六名,所以一些试题要求对多种情况展开分析:通过时间限制既要避免使之成为个人竞赛,又要使之更加符合团队竞赛的特性。尽管参赛者可随意使用计算器或计算机来解题,但是所有的试题设计都是默认可以不通过计算器来完成的。

类似于美国高中数学邀请赛(AIME)的形式,紫色彗星国际数学竞赛试题的答案皆为非负整数。但是该竞赛试题又不像AIME那样将答案限制为三位整数,事实上该竞赛试题的答案通常会大于1 000。以下示例展示了做题的过程。

题 1 请求出四个最小奇质数的和。

答案 四个最小奇质数分别是3,5,7和11,因此它们的和为 $3+5+7+11=26$ 。

题 2 如果将一枚完好的硬币投掷两次,得到一次正面一次反面的概率为 $\frac{m}{n}$,其中 m 和 n 为互素的正整数。求 $m+n$ 的值。

答案 令H代表正面,T代表反面,那么将一枚完好的硬币投掷两次就会有四种等可能的结果:HH,HT,TH和TT。其中有两种情况是得到一个H,一个T的结果,确切的比率就是 $\frac{2}{4}$ 。但是2和4不互素,也就是说分数 $\frac{2}{4}$ 不是最简形式。约分到最简形式就是 $\frac{1}{2}$,1和2为互素的正整数。因此所求总和就是 $1+2=3$ 。

题 3 图1展示了一个面积为3的正方形和一个边长与正方形边长相等的等边三角形。该图形的总高可以表示为 $\frac{m+\sqrt{n}}{p}$,其中 m 和 p 是互素的正整数。求 $m+n+p$ 的值。



图 1

答案 正方形的面积为3,所以其边长为 $\sqrt{3}$ 。边长为 s 的等边三角形的高为 $\frac{s\sqrt{3}}{2}$,那么该等边三角形的高就是 $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ 。因此,该图形的总高就是 $\sqrt{3} + \frac{3}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{12}}{2}$ 。由于 $m=3$ 和 $p=2$ 是互素的正整数,故所求总和即为 $3+12+2=17$ 。

紫色彗星国际数学竞赛的举办能够取得成功的秘诀是什么呢?事实上,该竞赛所具备的优势很容易罗列出来:

- (1) 参赛免费且便利;
- (2) 家庭学校学习者能够方便组队;
- (3) 团队赛的形式使得竞赛变得有趣;
- (4) 一些试题专门为团队进行实例分析而设计;
- (5) 试题范围涵盖了广泛的数学知识与难度级别;
- (6) 一些教师甚至会将整个班级划分为六个队伍来报名注册;
- (7) 团队成员并非必须在同一个地方学习才能够一起参赛;
- (8) 某些来自特定文化背景而需要回避的女生被这种团队赛的形式所吸引;
- (9) 学生们很少有机会能够参加这样一个比赛:可以在全世界范围内将其做题结果与同类团队进行比较。

紫色彗星国际数学竞赛

我享受数学竞赛的过程,但是,到2003年春天为止,我参与的工作仅限于在我所工作的威斯康星大学白水分校执教于普特南队,或者偶尔协助举办白水地区高中生数学竞赛(参赛的高中生会乘坐公车来到白水校区花一上午时间答题)。然而,在2003年的5月,我接到了来自 Titu Andreescu 的电话。Titu 参与数学竞赛所获得的成绩在当时来说是一个神话。当他还是罗马尼亚的一名学生以及后来执教于罗马尼亚数学奥林匹克团队时,他就已经是数学奥林匹克竞赛的积极参与者了。1990年移民美国后,他在伊利诺伊数学与科学学校教学的数学团队立即吸引了美国数学竞赛(AMC)委员会的注意。此后,他作为美国数学奥林匹克团队首席教官带领队伍以6名成员均获满分的成绩在1994年国际数学奥林匹克竞赛中获胜。随后, Titu 成为 AMC 的理事,继而出版了大量以其名字署名的数学题解和题集等相关出版物。

虽然此前我已经和 Titu Andreescu 见过几次面,而且作为2002年美国数学协会威斯康星片区会议执行主席,我还有幸在当年4月份邀请他以报告人的身份来到威斯康星参加该会议,但是当我在2003年5月接到他的电话时还是感到很意外。那时, Titu 已经完成了他在罗马尼亚时就已经开始的有关数论的博士学位论文研究,并且正在利用该契机从 AMC 理事的位置上退下来转而觅求一份学术教职。因此,他四处给熟人打电话,希望能够在第二年找到这样一个职位。

很不幸,威斯康星大学白水校区开放的唯一一个可竞聘职位是讲师,不能提供一份适当的薪水。我毫不迟疑地致电系主任 Bennette Harris,向他说明了聘请 Andreescu 博士来白水校区对本系的意义有多么巨大,哪怕只是一个小学期的教职也可。Bennette 与我们学校的行政领导们交换了可行性意见,他们建议我们系写一份引进 Andreescu 博士的计划书。在 Titu 的合作下,我们撰写了一份计划书并且得到通过。于是, Titu 便在2003—2004学年以访问学者的身份成了我们全体教职的一员。

这一份计划书使 Andreescu 博士有机会通过完成教学任务来换取我们为他组织一些外延活动,从而充分发挥其在数学解题上的专业优势。Titu 和我一起通过努力为那些对学习更多解题方法感兴趣的高中教师们建立了一个工作室;我们还让 Titu 在学生报纸上开设了一个专栏,每周解答一道算题;同时我们互相协作,一起培训白水校区的普特南队。到了11月该组织一场数学竞赛的时候,却已经来不及规划好调度方案来将本地高

中生召集到校园中进行一场为期一天的竞赛了。所以,我们联系了我们的系主任 Bennette Harris。那时候,Bennette 得到一个机会,可以有一年时间不用教书,转而专门从事网站开发工作并为 IBM 教授网站开发课程。Bennette 答应如果 Titu 和我能够提供试题,他可以在网上组织一场威斯康星大学白水分校数学竞赛,这让我们得以从召集学生前来学校参赛的工作中抽身出来。

威斯康星大学白水分校的第一次网络数学竞赛于美国中部时间 2003 年 11 月 11 日周四下午 3:30 至下午 5:00 如期举行。我们在此前已经向很多地区的初中生和高中生发放了该竞赛的宣传单,也向来自周边国家的一些同僚提及了此次比赛。该赛事采用的模式是要求参赛队伍首先登录我们的网站并注册,然后在比赛时间内会有 25 道试题呈现在其电脑屏幕上。该竞赛的媒介决定了其内容形式。由于我们不可能监测学生是否会与他人合作,所以我们干脆就把竞赛设定为团队赛的形式,允许每队队员不超过 6 名。我们也不能监测学生是否使用计算器或计算机来解题,所以我们允许他们使用任何计算工具。又因为如果提交的答案为非负整数就能便于电脑自动判卷,所以我们在设计试题的时候会将答案设定为一个非负整数。

每支队伍可以使用其想到的任何策略,从而在规定的 90 分钟时限内尽可能多地解答试题。大约有 90 支队伍参加了第一次的竞赛,当时只发生了一个小意外:由于技术问题使得参赛队员在比赛开始后的前几分钟无法看到试题,我们不得不将此次竞赛延长了 10 分钟。

过了 14 周以后,就在 2004 年 3 月 11 日, Titu, Bennette 和我又聚集到一起为我们的第二次在线竞赛做宣传。在我们的第一次竞赛中,初中组和高中组做的是同一套试题。为了使试题对高中组团队来说具有足够的挑战性,我们在这一次编入了一些远远超出初中生能力范围的试题。为了同时提供一场适合初中生的竞赛,我们为初中组和高中组分别准备了一套试题。

2005 年春天的时候, Titu 在得克萨斯大学达拉斯分校找到了一份终身教职工作。在 Titu 访问我们白水分校期间,我们又想出了很多可以编入在线竞赛的趣题,所以我们决定通过举办威斯康星大学白水分校/得克萨斯大学达拉斯分校国际数学竞赛来延续这一传统。该名称显然太过冗长,所以只用了一年。我们又在 2005 年 4 月 14 日周四举行的第三次竞赛中削减了初中组竞赛的试题量和分配的时间量。现在,初中组只需要在 60 分钟内完成 15 道试题,而高中组则仍需在 90 分钟内完成 25 道试题。我们还试图扩大宣传,希望吸引到来自整个北美地区的队伍。这时候,有一支来自欧洲的队伍提出有兴趣参加该竞赛,尽管他们可能需要在当地的午夜进行比赛,于是我们为他们的参加进行了安排。

我们在 2006 年 4 月举行的竞赛中又做了很多改动。首先需要更好的名称,于是我们将威斯康星大学白水分校的紫/白色设计与得克萨斯大学达拉斯分校的彗星吉祥物相结合,得到了“紫色彗星国际数学竞赛”这个名字。Bennette 又加上了以大号斜体书写

的惊叹号,因为这个符号就像一颗彗星^①。其次,鉴于大型学校能够在更大的范围内招收有数学天分的学生,从而通常能够展现更高的水平,因此我们一直在考虑让参赛队伍注册为一类“小型学校”队和一类“大型学校”队。又因为如果将每支队伍与特定学校捆绑在一起的话,数学俱乐部和家庭学校学习者就无法参赛,所以我们又为这些队伍引入了“混合队”的新类别。

但是,我们所做的最大调整可能是在2006年的时候延长了比赛窗口开放时间,从固定的90分钟比赛周期延长到每队可在几天的比赛周期中任选90分钟来进行比赛。我们此前选定的时间有利于来自美国中部时区的参赛队伍,而其他团队却在这一时段不能很便利地进行比赛,所以现在这一灵活性受到了这些团队的欢迎。这样,我们就可以向来自全世界的任何一支队伍开放比赛了。我们最初选择了在4月26日至27日之间的36个小时,但是随后就得到建议增加另外半天,从而达到整整48个小时。由于现在参赛队伍在两天的比赛周期内都能看到我们的竞赛试题,所以我们需要一种方法来确保参赛队伍会严肃对待比赛,保证不在竞赛结束前公布试题。我们做到了,方法就是要求每支队伍配一名成人监督员。监督员会在我们的网站上注册,然后与参赛队伍签约,想签多少就签多少。监督员的职责就是执行我们的竞赛规则,督促参赛学生不要在比赛结束前讨论或发布试题。2007年,我们将竞赛周期延长到了四天。这一年有600多支队伍注册,但是我们对于自己还没有能力吸引更多学生而感到沮丧。我们所使用的软件完全能够容纳更多的参赛队伍,但是由于广告预算的不足,我们只能被束缚在被动吸引到多少参赛者的级别上。所以在我们准备2008年的竞赛过程中,我咨询了威斯康星大学白水分校的研究与资助计划办公室。难以置信,他们非常乐于助人,并指导我发出了一些资助申请书,其中一份申请书得到了来自威斯康星密尔沃基 Lynde 与 Harry Bradley 基金会的慷慨资助。这一资助让我能够向大约6000多名数学老师发出广告。我所在大学的市场与媒体系帮我制作了宣传单和竞赛海报,我将海报放在了我们的网页上,那样数学老师们就可以将其打印,从而有助于在这些学校中引起注意。我们还雇佣了工读生为我们的竞赛热线工作,那样任何参赛者在竞赛期间只要有竞赛相关问题就可以通过电子邮箱或者电话立刻得到解答。在2008年,我们共有来自13个国家的1700支队伍进行注册。

在2009年,我们将竞赛窗口开放时间延长到整整7天。为了吸引更多不同国家的参赛者,我找到了一些数学家来帮助我们将竞赛试题翻译成15种不同语言。Bennette Harris 在2008年秋季休了一学期的假,专门对我们的竞赛网站进行了彻底的重新设计,从而便于监督员和参赛队员使用,同时还为我们管理该竞赛提供了更多的功能板块。其中增加的一项功能是能够让参赛队伍开展训练赛,即让参赛队员们做一些来自我们往届竞赛

① 译者注:该书英文名为 *Purple Comet! Math Meet*。

的试题。这一训练向参赛队员和监督员们展示了真实比赛的样子。这一年我们共有来自 25 个国家的队员参赛。

2009 年的另一改变是向所有参赛学生提供参赛证书和奖励证书。在比赛结果通告以后,监督员就可以登录我们的网站下载这些证书的打印副本。一旦准备就绪,160 支队伍的证书在一小时内就能完成下载。因此,我们觉得这是一项值得增设的内容。

同时,我们还注意到很多队伍在竞赛中得到了零分的成绩,并感觉到这可能会使她们感到挫败。我们不想被冠以“难到不可能完成的竞赛”这样一个头衔。为了解决这一问题,在 2010 年的竞赛中,我们为初中组和高中组都额外增加了 5 道试题。这 5 道专门设计的试题对任何队伍来说都是简单的。但是,最富有挑战性的试题难度并没有改变。这一调整收到了预期效果,现在我们看到只有很少的队伍会得到零分的成绩。

到了 2011 年,该竞赛一直开放了整整 9 天,这样可以让那些有春假的在校生能在竞赛周期间花至少一天来进行比赛。此次竞赛共有来自 39 个国家的 2 200 支队伍注册,打破了以往的所有纪录。而在 2012 年,该竞赛开放了 10 天,共有来自 43 个国家的 2 700 支队伍注册。

目前,该竞赛已经由 Andreescu 博士、Harris 博士和我主持了十年,我们向那些帮助过我们的人致以衷心的感谢。志愿者校对组确保我们的试题表达明晰,解答正确易懂。每年会有很多志愿翻译者将我们的竞赛试题翻译成 15 种以上的语言。每年还会有大约 12 名本科生夜以继日地为我们的竞赛工作向参赛者提供帮助。威斯康星大学白水分校为我们的募捐和宣传提供支持。当然,其中有一些是提供有偿服务的。我们还要特别感谢 Lynde 与 Harry Bradley 基金会,感谢其一直为本项目提供大量的财政支持。

2011 年 5 月,Bennette Harris 从他在威斯康星大学白水分校的教职上退了下来,转而在企业界找了一份工作。我也在 2012 年 5 月选择了退休。尽管我们都对威斯康星大学白水分校多年来一直支持紫色彗星国际数学竞赛而感激不尽,但是将此竞赛作为该机构的一个项目来运作将是毫无意义的。取而代之,该竞赛现在将由 AwesomeMath 有限公司来运作并由其慈善机构美国数学精英基金会来赞助。AwesomeMath 最著名的是它创办于 2006 年的数学夏令营。Titu Andreescu 指导 AwesomeMath 的工作,而我则从该夏令营创办伊始就一直在营中授课。

Jonathan Kane

2012 年 11 月

为什么选择紫色彗星国际数学竞赛？

我是得克萨斯大学达拉斯分校(UTD)科学与数学教育系的一名数学副教授。在2005年1月来到UTD的时候,我就已被国际数学界所熟知。我在美国国际数学奥林匹克(IMO)团队里当了8年首席教官和领队,还在美国数学协会(MAA)、美国数学竞赛委员会中当了5年理事。

我也是一名经验丰富的数学教师,做过30多年的高中教师、数学教练和学术导师。同时,我有幸能与很多美国乃至世界上最出色的数学思想家一同工作,并在全球范围内做过众多个人展示、主题演讲、研讨会、嘉宾讲座和工作展。而且,我因工作得到认可而获得MAA主席颁发的嘉许状:“作为美国奥林匹克数学营教官,其在培训过程中的杰出工作使得美国队于1994年中国香港IMO比赛中表现完美。”此外,我还因“卓越的高中数学教学”获得了Edith May Sliffe奖一等奖——由MAA主席亲自颁奖。

我还是24本书的作者或合作者,以及另外18本书的主编。我的著作采用的是问题解决型模式来理解数学。其中一些书是结构化的,所以可以用作本科生和研究生学习的教科书;其他的则可以用作补充材料来让那些有数学天分的初中生、高中生或者老师进行奥林匹克训练或者纯粹用于拓展数学视野。

我最初的调研工作主要是对参与普通或者高等数学竞赛的学生进行培训。在数学界,大家都知道只有很少一部分资料可以用来提高那些有数学天分的学生的能力水平。于是,我在书中使用了一种基于问题的方法来教育这些学生。我以该方法为手段帮助学生强化其数学兴趣和技巧。我还认为最好将高级别的主题引介给年轻学生,从而激活那些需要花心思调研的试题中所穿插的概念。

我第一次见到Jonathan Kane和他的妻子Janet Mertz是在1999年6月,那时候他们正陪伴着年幼的儿子Dani(即Daniel Kane)来到内布拉斯加州林肯城参加为期3周的数学奥林匹克夏令营项目(MOSP)。正是我举办了这一专门为那些在数学竞赛中表现出众(美国数学奥林匹克竞赛(USAMO)冠亚军获得者)的特长生而设计的著名项目。在这一卓越的30人小组中,前6名将代表国家参加当年在罗马尼亚举行的国际数学奥林匹克竞赛。位居第7名的Daniel Kane没能在1999年进入该小队,但是他在2002年和2003年都成功进入了该小队,并且为美国队摘得两枚金牌。

在 2001 年、2002 年和 2003 年于华盛顿举行的表彰 USAMO 前 12 名获奖者的授奖仪式上,我看到了 Jon(即 Jonathan Kane)和 Janet 夫妇的身影。Daniel Kane 都是这几次获奖者之一,他在 2002 年更是取得了满分的成绩。我们在一起相谈甚欢。而且,我还在 2003 年向 Jon 询问他的学校是否有开放竞聘的教职,因为那时候我正打算结束作为 AMC 理事的职务转而开始在学术圈谋职。当时已经是 6 月中旬了,没想到两个月后我就成为了威斯康星大学白水分校(UWW)的访问学者。我和 Jon 通力合作,一起研究很多有趣的数学问题,同时开始组织 UWW 的数学竞赛也就是顺理成章的事情了。Jon 和我经常会编写出一些有挑战性的试题。他更擅长离散数学和排列组合问题,我则更善于代数和数论问题。我们还都喜欢编写几何和三角学问题。每当秋天来临,Jon 就会敦促我给他发送来年竞赛的试题。我们通常会在 1 月份举行 MAA-AMS 联合竞赛时确定试题的最终版本。

我们编写的高质量试题和 Bennette 的专业技术使得竞赛获得圆满成功。我不再重复 Jon 所阐述的细节和紫色彗星国际数学竞赛促成因素的精确历史诠释。相反,我想要指出的是紫色彗星与 AwesomeMath 的合作使得两个项目相得益彰。2012 年,AwesomeMath 夏令营项目(AMSP)在得克萨斯大学达拉斯分校、康奈尔大学和加利福尼亚大学圣塔克鲁兹分校组织了一次为期 3 周的本地学生夏令营。AwesomeMath 的主要目标是根本性提高有数学天分的初中生、高中生的数学技能和创造力。该项目于 2006 年上马,当时只有 100 多名参加者。之后,参营学生数量逐年递增。到了 2012 年,我们的参营学生达到了 450 多名。该夏令营吸引了来自全国甚至世界范围内的学生并激发了他们对这一主题的热爱,这种热爱可以持续到他们上大学甚至更久。AwesomeMath 让学生超越了传统课堂的束缚,给予了他们独一无二的与世界著名数学教练一起奋斗的机会,与国际化的学生群体互动交流,同时拓展高级解题技巧。AwesomeMath 夏令营项目还为那些基础相异的天才学生进行有效数学学习并提供了一个促进思考的环境。我的信条是让所有有动力和能力冲击数学前沿的学生都获得他们所需的指导,而这正是 AwesomeMath 和紫色彗星国际数学竞赛所提供的。

与此同时,我曾先后与 Jon, Janet, Joe Gallian 以及美国数学协会主席通力合作,于 2008 年 10 月 10 日在《美国数学会通报》上发表了一篇报告文章(Titu Andreescu, Joseph A. Gallian, Jonathan M. Kane, Janet E. Mertz。数学解题过程中关于天才学生的跨文化分析)。该报告通过综合分析那些数学功底深厚的学生几十年来的相关资料,阐述了一个威胁到数理科学及相关领域领袖层的文化瓶颈。文章得到了美国和世界范围内 100 多家顶级报刊的收录和评论。

我希望继续与 Jon 和 Bennette 合作,让紫色彗星得到更多人的青睐。不管课上还是

课下,我都非常享受数学教学过程。在今后的安排中,我会找机会分别对学生进行单独训练,也会以分组的形式帮助他们做好数学竞赛前的准备。对于教育来说,为学生提供一个积极的数学环境和提供高质量的课堂教学一样重要。当然,不管环境和使用的技术如何,如果我们总能坚持以学生为中心,再加上学生们自己实打实的努力,那就一定能够获得理想的学习效果。

Titu Andreescu

2012年11月

目 录

第一部分 试 题

1.1	2003 年初中和高中组	3
1.2	2004 年高中组	5
1.3	2004 年初中组	7
1.4	2005 年高中组	9
1.5	2005 年初中组	12
1.6	2006 年高中组	14
1.7	2006 年初中组	18
1.8	2007 年高中组	20
1.9	2007 年初中组	23
1.10	2008 年高中组	25
1.11	2008 年初中组	28
1.12	2009 年高中组	30
1.13	2009 年初中组	34
1.14	2010 年高中组	36
1.15	2010 年初中组	40
1.16	2011 年高中组	43
1.17	2011 年初中组	47
1.18	2012 年高中组	50
1.19	2012 年初中组	54

第二部分 答 案

2.1	2003 年初中和高中组	59
2.2	2004 年高中组	67
2.3	2004 年初中组	79
2.4	2005 年高中组	85
2.5	2005 年初中组	96

2.6	2006 年高中组	100
2.7	2006 年初中组	115
2.8	2007 年高中组	119
2.9	2007 年初中组	131
2.10	2008 年高中组	136
2.11	2008 年初中组	151
2.12	2009 年高中组	159
2.13	2009 年初中组	173
2.14	2010 年高中组	180
2.15	2010 年初中组	196
2.16	2011 年高中组	203
2.17	2011 年初中组	218
2.18	2012 年高中组	224
2.19	2012 年初中组	237
附录	245

第一部分

试 题

1.1 2003 年初中和高中组

题1 亨利8年后的年龄是莎莉去年年龄的3倍,他们在25年前的年龄总和是83。请问亨利现在多大?

题2 在某月第二个周四之后,又过了两个周一,请问紧随其后的首个周六的日期数值最小是多少?

题3 各质因数之和为14的最大整数是多少?

题4 菱形两条对角线的长度分别是两个连续整数,菱形面积是 210 in^2 ($1 \text{ in}^2 = 6.4516 \text{ cm}^2$)^①,求该菱形周长是多少英寸?

题5 令 a, b, c 为非零实数, $a + \frac{1}{b} = 5, b + \frac{1}{c} = 12, c + \frac{1}{a} = 13$ 。求 $abc + \frac{1}{abc}$ 的值。

题6 求值: $\frac{1}{\log_2 \frac{1}{6}} - \frac{1}{\log_3 \frac{1}{6}} - \frac{1}{\log_4 \frac{1}{6}}$ 。

题7 集合 $\{1, 2, 3, \dots, 2004\}$ 的某一子集中包含 n 个元素且至少有两个元素互素,求 n 的最小值。

题8 令多边形 $ABCDEFGHIJKL$ 为正十二边形。求值: $\frac{AB}{AF} + \frac{AF}{AB}$ 。

题9 令 f 为包含正实数自变量的实值函数,且等式 $f(x) + 3xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2(x+1)$ 对于所有大于0的实数 x 都成立。求 $f(2003)$ 的值。

题10 将质量分数为15%的酒精溶液与质量分数为35%的酒精溶液混合来配制质量分数为21%的酒精溶液 250 UKgal ($1 \text{ UKgal} = 4.54609 \text{ L}$),请问需要质量分数为15%的酒精溶液多少加仑?

题11 若 $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+20} = \frac{m}{n}$, m 和 n 是两个没有公约数的正整数,求 $m+n$ 的值。

题12 请问图1中有几个三角形?

① 编校注:本书因为使用范围等因素,所以仍使用原书的单位。