启蒙数学文化译丛
丛书主编 汪宇

数学の精神・思想・方法

米山國藏

数学的精神、思想和方法

〔日〕米山国藏 著
毛正中 吴素华 译

数学知识与计算只是第二位的，最重要的是培育学生的数学素养。很多研习数学的人，特别是数学教师，深受这部数学启蒙名著的启发，理解了数学的精髓，找到了数学教育的真谛。

华东师范大学出版社

启蒙数学文化译丛 π 丛书主编 汪 宇

数学的精神、思想和方法

〔日〕米山国藏 著

毛正中 吴素华 译 曾祥发 校

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学的精神、思想和方法 /（日）米山国藏著；毛正中，吴素华译. —上海：华东师范大学出版社，2019
ISBN 978-7-5675-8828-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①米… ②毛… ③吴… Ⅲ. ①数学—思想方法 Ⅳ. ① O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 026729 号

数学的精神、思想和方法

著　　者　（日）米山国藏
译　　者　毛正中　吴素华
策划编辑　王　焰
组稿编辑　龚海燕
项目编辑　王国红
特约审读　徐惟简

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真　021-62572105
客服电话　021-62865537　门市（邮购）电话　021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东鸿君杰文化发展有限公司
开　　本　890×1240　32开
印　　张　13.375
字　　数　304千字
版　　次　2019年10月第一版
印　　次　2019年10月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5675-8828-8
定　　价　78.00元

出 版 人　王焰

序

我认为，现在的数学书籍，不论是教科书还是参考书，也不论是大部头的著作还是论文，都仅仅是记述了数学知识，可以说还没有一本论述数学的精神、思想和方法的著作。这也许是因为我孤陋寡闻吧。而数学的精神、思想和方法却是创作数学著作、发现新的东西，使数学得以不断地向前发展的根源。

某著名的科学家在被问到科学工作者必须具备什么素养时，回答说："第一是数学，第二是数学，第三还是数学。"我以为，这里所说的数学，恐怕不仅是指数学知识，而宁可说尤其是指数学的精神、思想、方法。这是因为科学工作者所需要的数学知识，相对地说是不多的，而数学的研究精神、数学的发明发现的思想方法、大脑的数学思维训练，对科学工作者则是绝对必要的。我搞了多年的数学教育，发现：学生们在初中、高中等所接受的数学知识，因毕业进入社会后几乎没有什么机会应用这种作为知识的数学，所以通常是出校门后不到一两年，很快就忘掉了。然而，不管他们从事什么业务工作，唯有深深地铭刻于头脑中的数学的精神，数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等（若培养了这方面的素质的话），却随时随地发生作用，使他们受益终生。这种数学的精神、思想和方法，充满于初等数学、高等数学之中，在各种教材里大量

存在着。如果教师们利用数学教科书，向学生们传授这样的精神、思想和方法，并通过这些精神活动以及数学思想、数学方法的活用，反复地锻炼学生们的思维能力，那么，学生们从小学、初中到高中的12年间，通过不同的教材，会成百上千次地接受同一精神、方法、原则的指教与锻炼，所以，纵然是把数学知识忘记了，但数学的精神、思想、方法也会深深地铭刻在头脑里，长久地活跃于日常的业务中。我想，这大概正合于一位著名的哲学家所谓的"真正教育的旨趣"，即"即使是学生把教给他的所有知识都忘记了，但还能使他获得受用终生的东西的那种教育，才是最高最好的教育"。

因此，无论是对于科学工作者、技术人员，还是数学教育工作者，最重要的就是数学的精神、思想和方法，而数学知识只是第二位的。我深以缺少这方面的著作为憾，于是，不揣冒昧，斗胆地把以自己多年的经验和长期的深思熟虑而写成的此书公诸于世，以为引玉之砖。

我重申，本书是想通过数学上的许多实例达到以下目标：

（一）促进研究精神的勃兴；

（二）说明许多新的研究思想和沿革及其实质；

（三）给出许多研究方法的范例和由此而得到的启示。

本书是我苦心孤诣之作。它是我以研究和教育的新观点，对过去的数学教材悉心地进行了大胆的独创性探索的结晶。

但愿本书能成为数学教育工作者、科技人员的一本有价值的参考读物。

目　录

第二编 由前述思想引起的数学的发展进步情况

第三编　作为纯数学的精神活动产物的数学基础　作为新思想源泉的数学基础　作为从根本上推翻原有数学的本质、思想和意义的数学基础

第 一 编

贯穿在整个数学中的精神、思想和方法

第一章　贯穿在整个数学中的精神

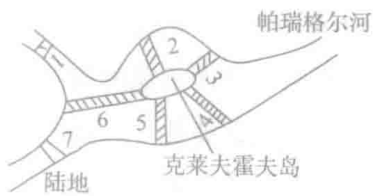
第一节　活动于解决实际问题中的数学精神

在数学中使用、培养并得到锤炼的精神活动，不用说，是一种人类的精神活动，它当然也会渗透到数学以外的事物中去。实际上，对解决数学以外的问题，若巧妙地应用数学，会非常奏效。这种例子是不胜枚举的。这里，仅以有名的“哥尼斯堡七桥问题”及“一笔画问题”（数学以外的问题）为例来进行探讨。

一、哥尼斯堡七桥问题的解决

18 世纪初叶，在东普鲁士首府哥尼斯堡市，有人提出了一个很有趣的问题：

“在市内散步时，是否可以每座桥只经过一次而走完市内所有 7 座桥？”



1，2，3，4，5，6，7表示桥

第 1 图

这个问题极大地刺激了对研究事物怀有强烈兴趣的德意志人的好奇心，许多人都热衷于解决它，但都未成功。在大数学家欧拉出来解决这个问题之前，没有人对这个问题给出完满的

解答。

这里，我想借助"数学精神"的活动，对这个很多人都未能解决的难题，按一定的步骤给出一种解法。这种按步骤给出的解法是中学生都能理解接受的。当然，此法不仅是解决了这一问题，而且对学生还有种种的教育效果。

1. 问题的简化（数学精神的活动）

解决问题的第一步，是尽量把问题简化，使得容易抓住问题的要点。对于这个问题，显然，岛的大小、桥的宽窄长短等都是无关紧要的。故若用点表示陆地和岛，用线表示桥，则问题就变为一个有关几何图形的问题。

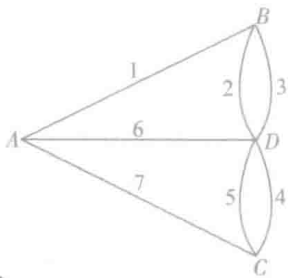
由 A 到 B 的桥记为 1；

由 B 到 D 的桥记为 2，3；

由 D 到 C 的桥记为 4，5；

由 C 到 A 的桥记为 7；

由 A 到 D 的桥记为 6。



第 2 图

于是，问题就归结为：能否从第 2 图中 A，B，C，D 的某一点出发，只通过每条直线一次而走完所有 7 条线段？这样，并未影响问题的实质，但显然把问题简化了。同时，这是把实际问题数学化便能使之简化的一个很适当的例子。

是不是不仅限于数学问题，而是在考虑任何问题时，第一步都是不改变其本质，只改变形式，使之尽可能简化呢？不！就连数学问题中，也只是大多数问题的解法基于这个方针。这个方针常常用于解方程、几何图形的变换，并会收到很好的效果。

例　解方程　$5x-7=3x+1$。

$$5x-7=3x+1 \to 5x-3x=1+7 \to 2x=8 \to x=\frac{8}{2} \to x=4。$$

即不改变其值地逐步变形，使之化为最简形式，从而得方程的解 $x=4$。

像这样处理问题就是所谓数学的精神。在讲授数学问题的解法时，每当有好的范例，教师就应不失时机地将它(指数学的精神)教示给学生，还应反复地指导学生，不限于数学，应将它应用于数学以外的问题。

2. 问题的解决方法(指导学生自己解决)

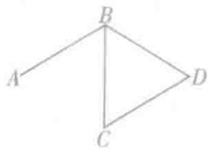
虽然，如前述那样，把问题明显地简化了，但要由学生们来解决它，还嫌过于复杂。这时，应首先考察这个问题中的最简情形，以此作为研究的第一步。像这样的方法、方针，看起来似乎很平常，但在很多情况下都是有效的，故必须要求学生牢牢掌握。即是说，对一个一般的、抽象的问题，要说明它、解决它是很困难的，于是就应首先去尝试一下同类的简单而具体的问题，然后由此推及一般的情形。这是研究问题的最有效的方法。例如，讲授“凸 n 边形有多少条对角线”的问题时，首先让学生试着对五边形或六边形来说明问题的意义和解法，然后启发他们动脑筋设法把结果推广到一般情形。

要想发现一个一般的定理、法则，先对该定理、法则的大致情况作出估计，这时，这个方法、方针常常也是有效的。只要用这个方法，就足以得到解决七桥问题的启示。

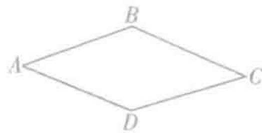
(1) 只有 4 座桥的情形

如第 3 图，若从 A 或 B 出发，让学生想想结果会怎样。可能学生立即就会发现，在这种情形，能够只经过每座桥一次而走完所

有桥。接着，让学生考虑若从 C 或 D 出发，情况又会怎样（这时，是不可能的）。



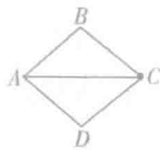
第 3 图



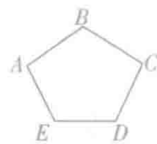
第 4 图

然后，让学生考虑第 4 图所示的情形。这些都是很简单的，学生能立即得出结论。

（2）有 5 座桥的情形



第 5 图



第 6 图

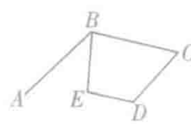
这时，也很简单，估计学生都能立即回答下面的问题。

问　在第 5 图中，从 A 或 C 出发，结论如何？（可能）

问　在第 5 图中，从 B 或 D 出发，结论如何？（不可能）

问　对第 6 图、第 7 图呢？

紧接着，指导学生由（1），（2）这样的简单实例而抓住问题的核心。



第 7 图

首先，让学生考虑区别“可能”与“不可能”的理由在哪里。

（ⅰ）要让学生注意到，各处的桥都是 2 座时，总是可能的；

（ⅱ）要使学生注意到（ⅰ）以外的情形，即第 3 图、第 5 图中“可能”的情形都是出发点处的桥的座数为 3 或 1；

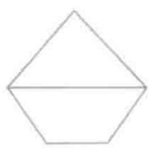
（ⅲ）要让学生发现，在第 3 图和第 5 图中“不可能”的场合，出发点处的桥数都为 2 这个重要的事实。

然后，让学生考察，在第 3 图、第 5 图中，可能的那些情形，在终点处有几座桥（1 座或 3 座），并考察中间点的情况。

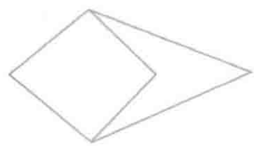
综合上面的讨论，也许学生就会发现如下事实（带有法则特征的事实）。

命题（甲）　在上面两例中，能够只经过每座桥一次的情形是：“各点处的桥均为 2 座”，或者“在出发点处及终点处的桥为 1 座或 3 座，而其余各点处的桥均为 2 座”。

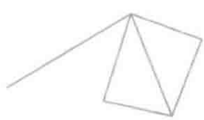
（3）若有 6 座桥时，作出下列图形，考察“能够”和“不能够”的情形



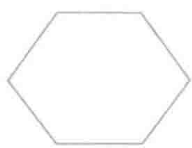
第 8 图



第 9 图



第 10 图

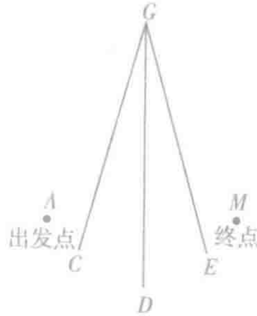


第 11 图

也许学生会发现，上面的命题，对 6 座桥的情形也是成立的。

从以上 3 个实例，也许会想到，命题（甲）并非偶然的结论。因此，最好是让学生们紧接着就研究，这个结果到底是偶然的呢，还是确非偶然。然而，这对学生来说，稍显困难，故在学生无力完成时，当由教师说明理由。这时，作为解决七桥问题的途径，我以为，宜区别出下述事项来考虑。

(A) **定理 1** 对于出发点及终点以外的点，有 1 座或 3 座(一般地，奇数座)桥时，问题的答案总是否定的。



第 12 图

其理由如下：

第一，在中间点 G，从它引出的桥至少有 2 座，故中间点处不可能只有 1 座桥。

第二，设中间点 G 处有 3 座桥 CG，DG，EG，则从 A 出发经过若干桥后到达 G，就一定要通过 CG，DG，EG 中的某一座。

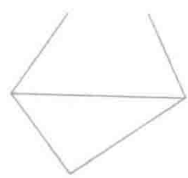
不妨设通过了 CG。由 G 再往前走，必定要通过 GD 或 GE。这时，假设通过了 GD，然后从 D 出发，无论怎么走，早晚总一定要通过剩下的一座桥 EG 而到达 G(否则与问题的要求不符)。既然 G 是中间点，那么，就还必须向终点 M 的方向走，但 CG，GD，EG 都已经过了一次，故这时已不存在尚未走过的向 M 去的桥了，从而，问题的答案是否定的。

第三，一般地，在中间点处有奇数座桥时，问题的答案亦为否定的。其理由与第二的情形相同。

应用 1 应用此定理能圆满解决哥尼斯堡七桥问题。

哥尼斯堡七桥问题的解决 在这个问题中无论把哪一点作为出发点或终点，总会存在有奇数座桥的中间点，故由上述定理知，问题的答案是否定的。

应用 2 如第 13 图，有 5 座桥的情形，结论又如何呢?


第 13 图

虽然哥尼斯堡七桥问题是完全解决了，但是，我们的数学的精神并未到此却步，它观察