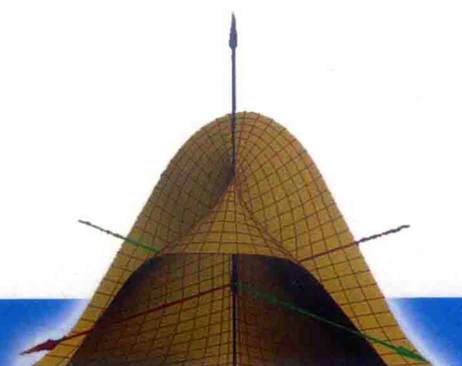
数一、数二、数三通用

考研数学复习全书

（2020版）·答案

小元老师　郭　伟　编



形象、趣味、透彻　夯实基础

系统、简洁、精选　快速提高

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

数一、数二、数三通用

考研数学复习全书

（2020 版）· 答案

小元老师　郭　伟　编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书内容是围绕考试大纲和历年真题编写的，每个章节都由知识讲解部分和题型总结部分构成，包含考研数学数一、数二、数三所有知识点、题型。本书尽量多用图像、顺口溜、趣味性比喻等方法讲解知识点；书中例题含金量高，解题思路与方法完整，总结细致，实用性强。通过本书学习可以帮助读者建立完善的理论体系和方法体系，缩短学习时间，让数学不再可怕和晦涩难懂。

本书文中附有二维码的地方，可以微信扫描进入视频课程。

本书既适合考生应试备考，也适合数学爱好者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书：数一、数二、数三通用/小元老师，郭伟编．—北京：中国石化出版社，2019.3
ISBN 978-7-5114-5230-6

Ⅰ.①考… Ⅱ.①小… ②郭… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第040007号

中国石化出版社出版发行

地址：北京市朝阳区吉市口路9号
邮编：100020 电话：(010)59964500
发行部电话：(010)59964526
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京柏力行彩印有限公司印刷
全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米 16开本 35印张 867千字
2019年4月第1版 2019年4月第1次印刷
定价：88.00元(共两册)

目　录
CONTENTS

高等数学答案

线性代数答案

概率论与数理统计（数一、数三）答案

高等数学答案

第一讲　函数、极限、连续

题型一　函数的概念与性质

【例 1】解：设 $g(x) = \sqrt{x/(2x-1)}$，则 $f = \arccos g(x)$ 为复合函数．

由 $\begin{cases} x/(2x-1) \geqslant 0; \\ x \neq 1/2, \end{cases}$ 得到 $x > \dfrac{1}{2}$ 或 $x \leqslant 0$，故 $D_g = (-\infty, 0] \cup (1/2, +\infty)$．

而 $\{x \mid g(x) = \sqrt{x/(2x-1)} \in D_f\}$

$= \{x \mid -1 \leqslant \sqrt{x/(2x-1)} \leqslant 1\}$

$= \{x \mid 0 \leqslant \sqrt{x/(2x-1)} \leqslant 1\}$．

不等式 $0 \leqslant \sqrt{x/(2x-1)} \leqslant 1$ 的解集易求得为 $(-\infty, 0]$ 或 $[1, +\infty)$，

故 $\{x \mid g(x) \in D_f\} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$．

因 $D_g \cap \{x \mid g(x) \in D_f\} = \{(-\infty, 0) \cup (1/2, +\infty)\} \cap \{(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$．

故 $f(x)$ 的定义域为 $x \geqslant 1$ 或 $x \leqslant 0$.

【例 2】解：(1) 中函数为自变量带有相反符号的两同名函数之和，故为偶函数；

(2) 中函数为 $\lg(1-x) - \lg(1+x)$，它是自变量带有相反符号的两名函数之差，故为奇函数．

【例 3】解：因 $g(-x) = g(x)$，$f(-x) = -f(x)$，故

$f[g(-x)] = f[g(x)]$，$g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)]$，

所以 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 均为偶函数．

题型二　夹逼定理

【例 4】解：因 $\dfrac{n}{n+\pi} \leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi} + \dfrac{1}{n^2+2\pi} + \cdots \dfrac{1}{n^2+n\pi}\right) \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+\pi}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+\pi} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+\pi} = 1$，由夹逼准则，即得证．

【例 5】解：因为 $\dfrac{1}{n^2+n+n} \leqslant \dfrac{1}{n^2+n+i} \leqslant \dfrac{1}{n^2+n+1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，

所以 $\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \leqslant \dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n} \leqslant \dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$，所以由夹逼定理得原式 $= \dfrac{1}{2}$．

【例 6】解：显然 $\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}\leqslant\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{2}{\pi}$$

所以由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}$.

【例 7】解：令 $f(x)=\dfrac{1}{(n^x+1)^{\frac{1}{x}}}$，则 $\ln f(x)=\dfrac{-1}{x}\ln(n^x+1)$，两边对 x 求导，得

$$f'(x)=f(x)\left[\frac{1}{x^2}\ln(n^x+1)-\frac{1}{x}\frac{n^x\ln n}{n^x+1}\right]>f(x)\cdot\left[\frac{1}{x^2}\ln n^x-\frac{1}{x}\ln n\right]=0$$

因此 $f(x)$ 是单调增加函数，从而有

$f(1)=\dfrac{1}{n+1}<f(2)=\dfrac{1}{(n^2+1)^{1/2}}<\cdots<f(n)=\dfrac{1}{(n^n+1)^{1/n}}$，

故 $nf(1)<f(1)+f(2)+\cdots+f(n)<nf(n)$，

即 $\dfrac{n}{n+1}<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{1/2}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{1/n}}<\dfrac{n}{(n^n+1)^{1/n}}$.

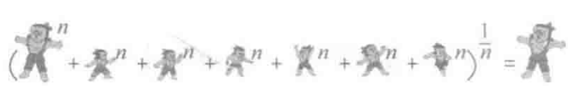
由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+1/n^n)^{\frac{1}{n}}}=1$,

由夹逼准则知原式 $=1$.

【例 8】解：$5=(5^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(1^n+2^n+3^n+4^n+5^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(5\cdot5^n)^{\frac{1}{n}}=5\cdot5^{\frac{1}{n}}$，

且 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}5=5\\ \lim\limits_{n\to\infty}(5\cdot5^{\frac{1}{n}})=5\end{cases}$，利用夹逼定理，所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+2^n+3^n+4^n+5^n)^{\frac{1}{n}}=5$.

可以用下面的图片说明其规律：



【例 9】解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$

$$=\max\left\{1,\ x,\ \frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x<2\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 2\end{cases}.$$

【例 10】解：当 $x\in[0,1]$ 时，$0\leqslant\sin x\leqslant x$，则 $0\leqslant\dfrac{\sin^n x}{1+x}\leqslant x^n$，

积分得 $0\leqslant\int_0^1\dfrac{\sin^n x}{1+x}dx\leqslant\dfrac{1}{n+1}$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{\sin^n x}{1+x}dx=0$.

【例 11】解：当 n 充分大时，$1 < \arctan n < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt[n]{n \cdot 1} < \sqrt[n]{n\arctan} < \sqrt[n]{n \cdot \frac{\pi}{2}}$，

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\arctan n} = 1$

题型三　单调有界准则

【例 12】解：已知 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}(n \in N_+)$，$x_1 = \sqrt{2}$，先证数列 $\{x_n\}$ 有界：

$n = 1$ 时，$x_1 = \sqrt{2} < 2$；假定 $n = k$ 时，$x_k < 2$；当 $n = k + 1$ 时，$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

故 $x_n < 2\ (n \in N_+)$.

再证数列 $\{x_n\}$ 单调增加：

因 $x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \dfrac{2 + x_n - x_n^{\ 2}}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = -\dfrac{(x_n - 2)(x_n + 1)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n}$，

由 $0 < x_n < 2$，得 $x_{n+1} - x_n > 0$，即 $x_{n+1} > x_n\ (n \in N_+)$.

由单调有界准则，即知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，由 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$，得 $x_{n+1}^{\ 2} = 2 + x_n$. 两端同时取极限得

$a^2 = 2 + a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 2$，$a_2 = -1$(舍去). 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

【例 13】解：该数列为单调增加数列，事实上因 $(1 - x_n)^2 \geqslant 0$，故 $1 + x_n^2 \geqslant 2x_n$. 因而有

$$x_{n+1} = (1 + x_n^2)/2 \geqslant x_n(n = 1, 2, \cdots).$$

下用归纳法证其有上界，事实上，$n = 1$ 时，$x_1 = 1/2 < 1$，设 $x_n < 1$，则

$$x_{n+1} = (1 + x_n^2)/2 \leqslant (1 + 1)/2 = 1.$$

可见 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有上界 1，由单调有界收敛准则知此数列必有极限. 设此极限为 A，对等式 $x_n = (1 + x_n^2)/2$ 取极限得到 $A = (1 + A^2)/2$，即 $A^2 - 2A + 1 = (A - 1)^2 = 0$，故 $A = 1$，即所求极限值为 1.

【例 14】解：由 $x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} > 0$，$x_1 = 1$ 得到 $x_2 = 1 + \dfrac{x_1}{1 + x_1}$，又 $x_2 - x_1 = \dfrac{x_1}{1 + x_1} = \dfrac{1}{2} > 0$，故 $x_2 > x_1$.

设 $x_k > x_{k-1}$，下证 $x_{k+1} > x_k$. 事实上

$x_{k+1} - x_k = \left(1 + \dfrac{x_k}{1 + x_k}\right) - \left(1 + \dfrac{x_{k-1}}{1 + x_{k-1}}\right) = \dfrac{x_k}{1 + x_k} - \dfrac{x_{k-1}}{1 + x_{k-1}} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{(1 + x_k)(1 + x_{k-1})} > 0$，

故 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 为单调增加数列.

又 $x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{1 + x_{n-1}} < 2$，

故 $(x)_{n=1}^{\infty}$ 有上界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a \geqslant 0$.

对 $x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ 两边取 $n \to \infty$ 时的极限得到 $a = 1 + \dfrac{a}{1 + a}$.

解得 $a = (1 + \sqrt{5})/2$(已舍去负根)，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (1 + \sqrt{5})/2$.

注意一般项(通项)为和式得形式时，常用考察相邻两项之差的方法证其单调.

【例 15】解：先证单调性. 由 $x_n + (x_n - 4)x_{n-1} = 3$，得 $x_n = \dfrac{3 + 4x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$，又 $x_1 = 2$，

所以，$x_2 = \dfrac{3 + 4x_1}{1 + x_1} = \dfrac{11}{3} > x_1$，

设 $x_k > x_{k-1}$，则 $x_{k+1} - x_k = \left(\dfrac{3 + 4x_k}{1 + x_k}\right) - \left(\dfrac{3 + 4x_{k-1}}{1 + x_{k-1}}\right) = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{(1 + x_k)(1 + x_{k-1})} > 0$

故 $x_{k+1} > x_k$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加；

再证明其有界．又 $x_n = \dfrac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = 3 + \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} < 3 + 1 = 4$，所以 $\{x_n\}$ 有上界；

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在．设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，令 $n\to\infty$，由 $x_n = \dfrac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，得 $A = \dfrac{3+4A}{1+A}$，

解得 $A = \dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$，由题设，$x_n > 0$，根据极限保号性 $A \geqslant 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$．

题型四　无穷小的比较

【例 16】解： 由等价无穷小代换：$\sqrt[3]{1+x+x^2} - 1 \sim (x+x^2)/3$，$\sin 2x \sim 2x\ (x\to 0)$

得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x+x^2}}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+x^2)/3}{2x} = \dfrac{1}{6}$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小．

【例 17】解法 1：（1）因 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1 \sim \sqrt[3]{x}/3$，故 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$ 为 x 的 1/3 阶无穷小 $(x\to 0)$．

（2）$\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x} = \sqrt{1+\tan x} - 1 - (\sqrt{1-\sin x} - 1)$，

而 $\sqrt{1+\tan x} - 1 \sim \tan x/2 \sim x/2$，$\sqrt{1+\tan x} - 1$ 为 x 的 1 阶无穷小 $(x\to 0)$，

$\sqrt{1-\sin x} - 1 \sim -\sin x/2 \sim -x/2$，$\sqrt{1-\sin x} - 1$ 为 x 的 1 阶无穷小 $(x\to 0)$，

又 $t = \min(1, 1) = 1$，故 $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}$ 为 x 的 1 阶无穷小 $(x\to 0)$．

（3）$\arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2) \sim \sqrt{4+x^2} - 2 = 2(\sqrt{1+x^2/4} - 1) \sim 2\cdot x^2/8 = x^2/4$，

即 $\arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2)$ 为 x 的 2 阶无穷小 $(x\to 0)$．

（4）$e^{x^2} - \cos x = (e^{x^2} - 1) + (1 - \cos x)$，

而 $e^{x^2} - 1 \sim x^2$，$1 - \cos x \sim x^2/2$，$t = \min(2, 2) = 2$，

故 $e^{x^2} - \cos x$ 为 x 的 2 阶无穷小 $(x\to 0)$．

解法 2： 也可用定义求之，自行补充．

题型五　普通未定式求极限

【例 18】解： 原式

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x - \sin x} - 1)(\sqrt{4+x^3} + 2)}{(\sqrt{4+x^3} - 2)(\sqrt{4+x^3} + 2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[e^{\sin x}(\sqrt{4+x^3} + 2)\right]\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{x^3}\right)$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = 4\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3} = 2.$$

【例 19】解： 注意到

$$\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3} = \frac{-(6x - \sin 6x)}{x^3} + \frac{6 + f(x)}{x^2},$$

而 $6x - \sin 6x \sim (6x)^3/6\ (x\to 0)$，因而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = -\lim_{x\to 0}\frac{6x - \sin 6x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{6 + f(x)}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(6x)^3}{6x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{6 + f(x)}{x^2},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6 + f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{36x^3}{x^3} = 36.$

仅(C)入选.

【例 20】解：令 $t=x-1$，则 $\cos\pi x=\cos[\pi(1+t)]=-\cos\pi t$ 且 $x\to 1$ 时，$t\to 0$，故

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos\pi t}{t^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\pi^2t^2}{t^2}=\dfrac{\pi^2}{2}$.

【例 21】解：当 $x\to 0$ 时，$1+\cos x\to 2$，$\ln(1+x)\sim x$. 于是

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{\ln(1+x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right].$$

由于有界变量乘无穷小量仍为无穷小量，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\cos(1/x)=0$，因而原式 $=3/2$.

【例 22】解法 1：$x\to 1$ 时，$1-x\to 0$，$\arcsin(1-x)\sim 1-x$，故

原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\ln[1+(x-1)]}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x-1}=-1.$

解法 2：令 $\arcsin(1-x)=t$，则 $x=1-\sin t$，且 $x\to 1$ 时，$t\to 0$，

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1-\sin t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{-\sin t}=-1.$

解法 3：令 $t=1-x$，则 $x=1-t$，$x\to 1$ 时，$t\to 0$.

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{\ln(1-t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{(-t)}=-1.$

【例 23】解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1-[(1+x)^b-1]}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{bx}{x}=a-b.$$

【例 24】解：因 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan(\pi/4+2/n)=\tan(\pi/4)=1$，故所求极限为 1^∞ 型，即得

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan(2/n)}{1-\tan(2/n)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan(2/n)}{1-\tan(2/n)}\right]^n=e^{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\tan(2/n)}{1-\tan(2/n)}\right]\cdot n}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2\tan(2/n)}{1-\tan(2/n)}\right]\cdot n=4\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\tan(2/n)}{2/n}\cdot\dfrac{1}{1-\tan(2/n)}\right]=4(1\cdot 1)=4$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\pi/4+2/n)=e^4$.

【例 25】解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a_1^{1/x}-1}{n}+\dfrac{a_2^{1/x}-1}{n}+\cdots+\dfrac{a_n^{1/x}-1}{n}\right)^{nx}$.

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{a_1^{1/x}-1+a_2^{1/x}-1+\cdots+a_n^{1/x}-1}{n}\right)nx\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{1/x}-1}{1/x}+\frac{a_2^{1/x}-1}{1/x}+\cdots+\frac{a_n^{1/x}-1}{1/x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_1^{1/x}-1}{1/x}+\lim_{x\to\infty}\frac{a_2^{1/x}-1}{1/x}+\cdots+\lim_{x\to\infty}\frac{a_n^{1/x}-1}{1/x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1/x)\ln a_1}{1/x}+\lim_{x\to\infty}\frac{(1/x)\ln a_2}{1/x}+\cdots+\lim_{x\to\infty}\frac{(1/x)\ln a_n}{1/x}$$
$$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1a_2\cdots a_n).$$

故原式 $= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{a_1^{1/x}-1+a_2^{1/x}-1+\cdots+a_n^{1/x}-1}{n}\right)nx\right]} = e^{\ln a_1a_2\cdots a_n} = a_1a_2\cdots a_n$.

【例 26】解：$I = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)\cdot 3x}{\ln^2(1+x)-x^2} = 3\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{x(\sin^2x+\cos x-1)}{\ln^2(1+x)-x^2}$.

其中，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1} = f'(1)$；

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sin^2x+\cos x-1)}{\ln^2(1+x)-x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{\ln^2(1+x)-x^2}$

$= \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)\cdot\frac{x^3}{\ln^2(1+x)-x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{\ln^2(1+x)-x^2}$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)+x}\cdot\frac{x^2}{\ln(1+x)-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2) = -\frac{1}{2}$,

所以 $I = 3f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}f'(1)$.

【注】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sin^2x+\cos x-1)}{\ln^2(1+x)-x^2}$ 也可用下列泰勒公式求得.

$$\lim_{x\to0}\frac{x(\sin^2x+\cos x-1)}{ln^2(1+x)-x^2} = \lim_{x\to0}\frac{x[(x^2+o(x^2))+(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))]}{[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]^2-x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{-x^3+o(x^3)} = -\frac{1}{2}$$

另外，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)+x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}$ 等也可用洛必达法则求得.

题型六　必须考察左、右极限的几种函数

【例 27】解：注意到当 $x\to+0$ 与 $x\to-0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 的极限不一样，应先求出所求极限的左、右极限.

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to+0}\left[\frac{e^{-\frac{4}{x}}(2+e^{\frac{1}{x}})}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+0}e^{-3/x} = \lim\limits_{x\to+0}e^{-4/x} = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$,

$$\lim_{x\to-0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to-0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right).$$

因为 $\lim\limits_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-0}e^{\frac{4}{x}} = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to-0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) = 2-1 = 1$.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) = 1.$$

【例 28】解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1} = \frac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{(-x)\sqrt{1+1/x^2}+x}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+1/x^2}+1}=\infty,$$

故所求极限不存在.

【例 29】解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2(ax/2)}}$.

$a>0$ 时，$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2(ax/2)}}=\lim\limits_{x\to-0}\left[-\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}\right]=-\sqrt{2}/a$，

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2(ax/2)}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{a}$.

$a<0$ 时，$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2(ax/2)}}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=\sqrt{2}/a$，

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2(ax/2)}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{-x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{a}$

因左、右极限不等，故所求极限不存在.

题型七 已知极限值，极限中待求常数的求法

【例 30】解：因 $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)=0$，将此极限等式两端分别与所给极限等式两端相乘得到

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-ax+b\right)=1\cdot0=0$，

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{x^2}{1+x}-a+\dfrac{b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}-a+\dfrac{b}{x}\right)=0$，

故 $a=\lim\limits_{x\to\infty}[x/(1+x)+b/x]=1$. 将 $a=1$ 代入原式，得到

$$b=1-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=2.$$

【例 31】解：将所给极限等式两端与另一个极限等式 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ 的两端分别相乘，消去待求系数 a 前的变量部分 $1/x^2$，先求出 a，事实上，由 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x}+a+bx^2\right)=0$，得到 $a=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}=-3$. 将 $a=-3$ 代入所给极限等式，即可求出 b：

$$-b=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{x^3}-\frac{3}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x-3x}{x^3}.$$

注意到 $\sin3x-3x=-(3x-\sin3x)\sim-(3x)^3/6$，$-b=\lim\limits_{x\to0}[-(3x)^3/(6x^3)]=-9/2$，即 $b=9/2$.

【例 32】解：因分母为 x^2，将 $\ln(1+x)$ 展至 2 阶带佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$\ln(1+x)=x-(1/2)x^2+o(x^2),$$

则原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1/2)x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-a)x-(1/2+b)x^2+o(x^2)}{x^2}=2.$

于是必有 $1-a=0$，$-(1/2+b)=2$，解之得 $a=1$，$b=-5/2$.

【例 33】解法 1：原式 $\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a/\cos^2x+b\sin x}{-2c/(1-2x)-2xde^{-x^2}}=-\dfrac{a}{2c}=2$，即 $a=-4c$. 仅(D)入选.

解法 2：将函数展成带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$\tan x=x+x^3/3+o(x^3),\ \cos x=1-x^2/2!+o(x^2)$$