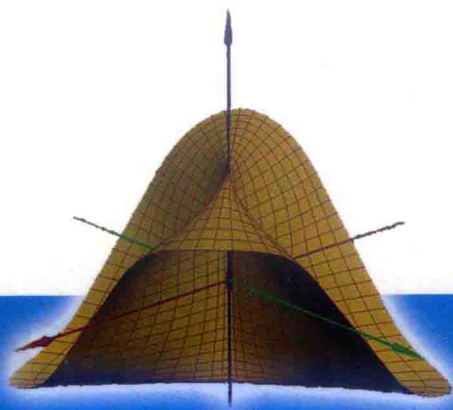


数一、数二、数三通用

考研数学复习全书

(2020版) · 答案

小元老师 郭伟 编



形象、趣味、透彻 夯实基础
系统、简洁、精选 快速提高

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

数一、数二、数三通用

考研数学复习全书

(2020 版) · 答案

小元老师 郭伟 编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书内容是围绕考试大纲和历年真题编写的,每个章节都由知识讲解部分和题型总结部分构成,包含考研数学数一、数二、数三所有知识点、题型。本书尽量多用图像、顺口溜、趣味性比喻等方法讲解知识点;书中例题含金量高,解题思路与方法完整,总结细致,实用性强。通过本书学习可以帮助读者建立完善的理论体系和方法体系,缩短学习时间,让数学不再可怕和晦涩难懂。

本书文中附有二维码的地方,可以微信扫描进入视频课程。

本书既适合考生应试备考,也适合数学爱好者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书:数一、数二、数三通用/小元老师,郭伟编.—北京:中国石化出版社,2019.3
ISBN 978-7-5114-5230-6

I. ①考… II. ①小… ②郭… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第040007号

未经本社书面授权,本书任何部分不得被复制、抄袭,或者以任何形式或任何方式传播。版权所有,侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址:北京市朝阳区吉市口路9号
邮编:100020 电话:(010)59964500
发行部电话:(010)59964526
<http://www.sinopec-press.com>
E-mail:press@sinopec.com
北京柏力行彩印有限公司印刷
全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米 16开本 35印张 867千字
2019年4月第1版 2019年4月第1次印刷
定价:88.00元(共两册)

目 录

CONTENTS

高等数学答案

第一讲 函数、极限、连续	(333)
题型一 函数的概念与性质	(333)
题型二 夹逼定理	(333)
题型三 单调有界准则	(335)
题型四 无穷小的比较	(336)
题型五 普通未定式求极限	(336)
题型六 必须考察左、右极限的几种函数	(338)
题型七 已知极限值, 极限中待求常数的求法	(339)
题型八 无限项之积的极限的求法	(340)
题型九 讨论分段函数在分段点处的连续性	(341)
题型十 讨论极限函数的连续性	(341)
题型十一 间断点的判断	(343)
题型十二 闭区间上连续函数性质的应用	(344)
第二讲 导数与微分	(346)
题型一 导数的概念与定义	(346)
题型二 求导法则	(346)
题型三 分段函数可导性的判别及其导数得求法	(347)
题型四 绝对值函数的可导性判断及导数求法	(348)
题型五 高阶导数	(348)
第三讲 微分学中值定理及其应用	(350)
题型一 出现一个中值的中值等式命题的证法	(350)
题型二 两个或两个以上中值的中值等式证法	(352)
题型三 中值不等式命题的证法	(353)
题型四 区间上成立的函数不等式的证法	(355)
题型五 利用函数的性态讨论方程根的个数	(356)
题型六 利用洛必达法则求极限	(357)
题型七 利用泰勒公式求极限	(359)
题型八 求最值	(359)
题型九 凹凸性与拐点	(359)

题型十 渐近线	(360)
第四讲 不定积分	(363)
题型一 原函数问题	(363)
题型二 第一换元法(凑微分法)的常见类型	(363)
题型三 用分部积分法求不定积分的技巧	(364)
题型四 有理函数积分的计算(数一、数二)	(366)
题型五 无理函数的不定积分的求法	(367)
第五讲 定积分及应用	(369)
题型一 利用定积分定义求极限	(369)
题型二 奇偶函数的积分性质	(369)
题型三 变限积分的导数	(370)
题型四 变限积分性质的讨论与证明	(370)
题型五 极限变量仅含在被积函数中的定积分极限的 求证法	(371)
题型六 与定积分或变限积分有关的方程, 其根存在性 的证法	(372)
题型七 用定积分的换元积分法结论计算	(374)
题型八 分部积分	(374)
题型九 反常积分敛散性的判别	(375)
题型十 反常积分求解	(375)
题型十一 平面图形的面积	(377)
题型十二 体积求解	(378)
题型十三 弧长求解	(379)
题型十四 定积分的物理应用	(380)
第六讲 常微分方程	(381)
题型一 可分离变量与齐次微分方程	(381)
题型二 一阶线性方程的解法	(381)
题型三 可降阶微分方程(数一、二)	(383)
题型四 二阶常系数线性齐次方程的解法	(384)
题型五 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	(384)
题型六 叠加原理的运用	(386)
题型七 特殊的微分方程	(386)
题型八 已知微分方程的解, 反求其微分方程	(386)
题型九 利用微分方程求解几类函数方程	(387)
题型十 微分方程在几何上应用举例	(388)
题型十一 微分方程在物理上应用举例	(389)
第七讲 向量代数与空间解析几何(仅数一)	(391)
题型一 向量	(391)

题型二	平面方程与直线方程	(392)
题型三	位置关系	(393)
题型四	距离	(395)
题型五	旋转曲面方程	(395)
题型六	空间曲线的切线与法平面及曲面的切平面与法线的求法	(395)
题型七	投影	(396)
第八讲 多元函数微分法及其应用		(398)
题型一	用一元函数极限方法求解多元函数极限	(398)
题型二	用夹逼准则求解多元函数极限	(399)
题型三	多元显函数的一阶偏导数的求法	(399)
题型四	多元复合函数高阶导数的计算	(399)
题型五	隐函数的偏导数求法	(401)
题型六	由方程组确定的隐函数, 其偏导数的求法	(401)
题型七	偏导数结合方程关系的问题	(402)
题型八	验证是否可微	(403)
题型九	多元函数的全微分求法	(403)
题型十	方向导数与梯度	(404)
题型十一	多元函数的无条件极值的求法	(405)
题型十二	多元函数的条件极值的求法	(406)
第九讲 重积分		(409)
题型一	在哪些情况下需调换二次积分的次序	(409)
题型二	二重积分需分区域积分的几种情况	(410)
题型三	极坐标与变量替换	(412)
题型四	利用奇偶对称, 轮换对称求解	(413)
题型五	被积函数不是初等函数	(414)
题型六	利用二重积分的几何意义或物理意义简化计算	(415)
题型七	二重积分(或可化为二重积分)的等式和不等式证法	(415)
题型八	由重积分定义的函数的求法	(418)
题型九	由重积分定义的函数的极限的求法	(419)
题型十	三重积分用先二后一法计算	(419)
题型十一	计算三重积分如何选择坐标系	(420)
题型十二	利用奇偶对称性简化三重积分的计算	(421)
题型十三	利用轮换对称性简化计算	(422)
题型十四	重积分应用: 立体体积的算法	(423)
题型十五	重积分应用: 曲面面积的求法	(424)
题型十六	重积分应用: 求重心(形心)	(424)

题型十七 重积分应用: 求转动惯量	(425)
第十讲 无穷级数(数一、数三)	(427)
题型一 正项级数敛散性的判别方法	(427)
题型二 交错级数敛散性的判别方法	(429)
题型三 任意项级数敛散性的判别法	(430)
题型四 常数项级数敛散性的证法	(431)
题型五 幂级数收敛域的求法	(431)
题型六 不是幂级数的函数项级数, 其收敛域的求法	(433)
题型七 幂级数的和函数的求法	(433)
题型八 函数展为幂级数的方法	(436)
题型九 收敛的常数项级数的和的求法	(438)
题型十 与傅里叶级数有关的几类问题的解法	(441)
第十一讲 曲线积分与曲面积分(仅数一)	(445)
题型一 计算第一类曲线积分的方法与技巧	(445)
题型二 利用对称性简化积分计算	(446)
题型三 第二类曲线积分的算法	(447)
题型四 计算第一类曲面积分的方法与技巧	(447)
题型五 利用对称性简化计算	(449)
题型六 计算第二类曲面积分的方法与技巧	(451)
题型七 曲线积分的应用	(452)
题型八 积分与路径无关	(453)
题型九 正确应用格林公式	(454)
题型十 全微分方程	(457)
题型十一 如何应用高斯公式计算曲面积分	(459)
题型十二 梯度、散度、旋度的综合计算	(462)
题型十三 第二类(对坐标的)空间曲线积分的算法	(462)
第十二讲 数学的经济应用(仅数学三)	(465)
题型一 差分方程	(465)
题型二 边际与弹性	(465)
题型三 价值与利息	(466)

线性代数答案

第一讲 行列式	(467)
题型一 行列式的定义与性质	(467)
题型二 抽象行列式的计算	(467)
题型三 行列式与方程结合的问题	(467)
题型四 行列式的展开计算	(468)
题型五 几种特殊的行列式	(468)

题型六	范德蒙行列式	(469)
题型七	克莱姆法则	(469)
第二讲	矩阵	(471)
题型一	矩阵的运算	(471)
题型二	矩阵的行列式	(471)
题型三	逆矩阵直接求解	(471)
题型四	伴随矩阵问题	(472)
题型五	恒等变形求逆矩阵	(472)
题型六	求解矩阵方程	(474)
题型七	初等矩阵的运算	(474)
题型八	分块矩阵的计算	(475)
第三讲	向量	(476)
题型一	判断线性相关、线性无关	(476)
题型二	判断能否线性表出	(476)
题型三	向量组的秩, 矩阵的秩	(478)
题型四	已知秩, 求待定常数	(479)
题型五	正交矩阵	(480)
题型六	向量空间	(480)
第四讲	线性方程组	(483)
题型一	判断齐次线性方程组解的情况	(483)
题型二	基础解系相关讨论	(483)
题型三	已知解, 反求方程组	(483)
题型四	非齐次线性方程组的解的结构	(484)
题型五	非齐次线性方程组求解	(485)
题型六	方程组与向量结合的问题	(486)
题型七	方程组公共解、同解问题	(486)
第五讲	特征值、特征向量、相似对角化	(490)
题型一	特征值与特征向量的概念与性质	(490)
题型二	特征值与特征向量的计算	(490)
题型三	相关矩阵的特征值、特征向量	(491)
题型四	判断是否可对角化	(492)
题型五	判断两个矩阵是否相似	(493)
题型六	对角化的计算	(493)
题型七	用对角阵求高次幂	(495)
题型八	已知特征值、特征向量, 反求矩阵	(496)
第六讲	二次型	(498)
题型一	二次型的定义	(498)
题型二	化二次型为标准型、规范型	(498)

题型三	已知标准型, 确定二次型	(499)
题型四	判断两个矩阵是否合同	(500)
题型五	判别或证明具体二次型的正定性	(500)
题型六	判别或证明抽象二次型的正定性	(500)
题型七	确定参数的取值范围使其正定	(501)

概率论与数理统计(数一、数三)答案

第一讲	随机事件和概率	(502)
题型一	古典概型	(502)
题型二	几何概型	(503)
题型三	事件的关系与运算律	(503)
题型四	和、差、积事件的概率	(504)
题型五	条件概率	(506)
题型六	全概率公式与贝叶斯公式	(506)
题型七	事件的独立性	(506)
第二讲	一维随机变量及其分布	(508)
题型一	一维随机变量分布函数的概念及性质	(508)
题型二	离散型随机变量分布律	(509)
题型三	连续型随机变量的概念与计算	(509)
题型四	用常见分布计算有关事件的概率	(510)
题型五	二次方程有根、无根的概率	(510)
题型六	一维随机变量函数的分布	(511)
第三讲	二维随机变量及其分布	(513)
题型一	二维离散型随机变量的分布律	(513)
题型二	二维连续型随机变量概率密度	(514)
题型三	二维连续型随机变量分布函数	(515)
题型四	条件概率密度	(515)
题型五	两个连续型随机变量函数的分布	(516)
题型六	卷积公式的运用	(518)
题型七	离散型与连续型函数的分布	(519)
第四讲	随机变量的数字特征	(520)
题型一	期望与方差的计算	(520)
题型二	随机变量函数的期望与方差	(521)
题型三	随机变量最大、最小值的期望与方差	(522)
题型四	已知期望, 求概率	(524)
题型五	协方差与相关系数	(524)
题型六	不相关与独立	(525)

第五讲 大数定律和中心极限定理	(526)
题型一 用切比雪夫不等式估计事件的概率	(526)
题型二 大数定律	(527)
题型三 中心极限定理	(527)
第六讲 数理统计的基本概念	(529)
题型一 求统计量分布有关的基本概念问题	(529)
题型二 求统计量的分布及其分布参数	(529)
题型三 求统计量取值的概率	(531)
第七讲 参数估计与假设检验	(532)
题型一 矩估计与最大似然估计	(532)
题型二 估计量的评选标准	(533)
题型三 区间估计	(536)
题型四 两类错误	(537)
题型五 假设检验	(538)

高等数学答案

第一讲 函数、极限、连续

题型一 函数的概念与性质

【例1】解：设 $g(x) = \sqrt{x/(2x-1)}$ ，则 $f = \arccos g(x)$ 为复合函数。

由 $\begin{cases} x/(2x-1) \geq 0; \\ x \neq 1/2, \end{cases}$ 得到 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x \leq 0$ ，故 $D_g = (-\infty, 0] \cup (1/2, +\infty)$ 。

$$\begin{aligned} \text{而 } \{x \mid g(x) = \sqrt{x/(2x-1)} \in D_f\} \\ &= \{x \mid -1 \leq \sqrt{x/(2x-1)} \leq 1\} \\ &= \{x \mid 0 \leq \sqrt{x/(2x-1)} \leq 1\}. \end{aligned}$$

不等式 $0 \leq \sqrt{x/(2x-1)} \leq 1$ 的解集易求得为 $(-\infty, 0]$ 或 $[1, +\infty)$ ，

故 $\{x \mid g(x) \in D_f\} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ 。

因 $D_g \cap \{x \mid g(x) \in D_f\} = \{(-\infty, 0] \cup (1/2, +\infty)\} \cap \{(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ 。

故 $f(x)$ 的定义域为 $x \geq 1$ 或 $x \leq 0$ 。

【例2】解：(1) 中函数为自变量带有相反符号的两同名函数之和，故为偶函数；

(2) 中函数为 $\lg(1-x) - \lg(1+x)$ ，它是自变量带有相反符号的两名函数之差，故为奇函数。

【例3】解：因 $g(-x) = g(x)$ ， $f(-x) = -f(x)$ ，故

$$f[g(-x)] = f[g(x)]，g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)]，$$

所以 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 均为偶函数。

题型二 夹逼定理

【例4】解：因 $\frac{n}{n+\pi} \leq n \left(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi} \right) \leq \frac{n^2}{n^2+\pi}$ ，

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\pi} = 1$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+\pi} = 1$ ，由夹逼准则，即得证。

【例5】解：因为 $\frac{1}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+i} \leq \frac{1}{n^2+n+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，

$$\text{所以 } \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}，$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$ ，所以由夹逼定理得原式 $= \frac{1}{2}$ 。

【例6】解：显然 $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi i}{n} \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi i}{n}$

$$\begin{aligned} \text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi i}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi i}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

所以由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{\pi}$.

【例7】解：令 $f(x) = \frac{1}{(n^x + 1)^{\frac{1}{x}}}$ ，则 $\ln f(x) = -\frac{1}{x} \ln(n^x + 1)$ ，两边对 x 求导，得

$$f'(x) = f(x) \left[\frac{1}{x^2} \ln(n^x + 1) - \frac{1}{x} \frac{n^x \ln n}{n^x + 1} \right] > f(x) \cdot \left[\frac{1}{x^2} \ln n^x - \frac{1}{x} \ln n \right] = 0$$

因此 $f(x)$ 是单调增加函数，从而有

$$f(1) = \frac{1}{n+1} < f(2) = \frac{1}{(n^2+1)^{1/2}} < \cdots < f(n) = \frac{1}{(n^n+1)^{1/n}},$$

故 $nf(1) < f(1) + f(2) + \cdots + f(n) < nf(n)$ ，

$$\text{即 } \frac{n}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{1/2}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{1/n}} < \frac{n}{(n^n+1)^{1/n}}.$$

$$\text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n^n+1)^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n^n)^{1/n}} = 1,$$

由夹逼准则知原式 = 1.

【例8】解： $5 = (5^n)^{\frac{1}{n}} \leq (1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} \leq (5 \cdot 5^n)^{\frac{1}{n}} = 5 \cdot 5^{\frac{1}{n}}$ ，

且 $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 5 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (5 \cdot 5^{\frac{1}{n}}) = 5 \end{cases}$ ，利用夹逼定理，所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} = 5$.

可以用下面的图片说明其规律：

$$(\text{熊}^n + \text{熊}^n + \text{熊}^n + \text{熊}^n + \text{熊}^n + \text{熊}^n + \text{熊}^n)^{\frac{1}{n}} = \text{熊}$$

【例9】解： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$

$$= \max \left\{ 1, x, \frac{x^2}{2} \right\} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 2 \end{cases}$$

【例10】解：当 $x \in [0, 1]$ 时， $0 \leq \sin x \leq x$ ，则 $0 \leq \frac{\sin^n x}{1+x} \leq x^n$ ，

积分得 $0 \leq \int_0^1 \frac{\sin^n x}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$ ，由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin^n x}{1+x} dx = 0$.

【例 11】解：当 n 充分大时， $1 < \arctan n < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt[n]{n \cdot 1} < \sqrt[n]{n \arctan n} < \sqrt[n]{n \cdot \frac{\pi}{2}}$ ，

由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \arctan n} = 1$

题型三 单调有界准则

【例 12】解：已知 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ ($n \in N_+$)， $x_1 = \sqrt{2}$ ，先证数列 $\{x_n\}$ 有界：

$n=1$ 时， $x_1 = \sqrt{2} < 2$ ；假定 $n=k$ 时， $x_k < 2$ ；当 $n=k+1$ 时， $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2$ 。
故 $x_n < 2$ ($n \in N_+$)。

再证数列 $\{x_n\}$ 单调增加：

$$\text{因 } x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+x_n} - x_n = \frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n} = -\frac{(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n},$$

由 $0 < x_n < 2$ ，得 $x_{n+1} - x_n > 0$ ，即 $x_{n+1} > x_n$ ($n \in N_+$)。

由单调有界准则，即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，由 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ ，得 $x_{n+1}^2 = 2+x_n$ 。两端同时取极限得

$$a^2 = 2+a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = -1 \text{ (舍去)}, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

【例 13】解：该数列为单调增加数列，事实上因 $(1-x_n)^2 \geq 0$ ，故 $1+x_n^2 \geq 2x_n$ 。因而有

$$x_{n+1} = (1+x_n^2)/2 \geq x_n \text{ (} n=1, 2, \dots \text{)}.$$

下用归纳法证其有上界，事实上， $n=1$ 时， $x_1 = 1/2 < 1$ ，设 $x_n < 1$ ，则

$$x_{n+1} = (1+x_n^2)/2 \leq (1+1)/2 = 1.$$

可见 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有上界 1，由单调有界收敛准则知此数列必有极限。设此极限为 A ，对等式 $x_n = (1+x_n^2)/2$ 取极限得到 $A = (1+A^2)/2$ ，即 $A^2 - 2A + 1 = (A-1)^2 = 0$ ，故 $A = 1$ ，即所求极限值为 1。

【例 14】解：由 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} > 0$ ， $x_1 = 1$ 得到 $x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}$ ，又 $x_2 - x_1 = \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{1}{2} > 0$ ，故 $x_2 > x_1$ 。

设 $x_k > x_{k-1}$ ，下证 $x_{k+1} > x_k$ 。事实上

$$x_{k+1} - x_k = \left(1 + \frac{x_k}{1+x_k}\right) - \left(1 + \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\right) = \frac{x_k}{1+x_k} - \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}} = \frac{x_k - x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})} > 0,$$

故 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 为单调增加数列。

$$\text{又 } x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2,$$

故 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有上界，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则 $a \geq 0$ 。

$$\text{对 } x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} \text{ 两边取 } n \rightarrow \infty \text{ 时的极限得到 } a = 1 + \frac{a}{1+a}.$$

解得 $a = (1 + \sqrt{5})/2$ (已舍去负根)，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1 + \sqrt{5})/2$ 。

注意一般项(通项)为和式得形式时，常用考察相邻两项之差的方法证其单调。

【例 15】解：先证单调性。由 $x_n + (x_n - 4)x_{n-1} = 3$ ，得 $x_n = \frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ ，又 $x_1 = 2$ ，

$$\text{所以, } x_2 = \frac{3+4x_1}{1+x_1} = \frac{11}{3} > x_1,$$

$$\text{设 } x_k > x_{k-1}, \text{ 则 } x_{k+1} - x_k = \left(\frac{3+4x_k}{1+x_k}\right) - \left(\frac{3+4x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\right) = \frac{x_k - x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})} > 0$$

故 $x_{k+1} > x_k$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增加;

再证明其有界. 又 $x_n = \frac{3 + 4x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = 3 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} < 3 + 1 = 4$, 所以 $\{x_n\}$ 有上界;

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 令 $n \rightarrow \infty$, 由 $x_n = \frac{3 + 4x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$, 得 $A = \frac{3 + 4A}{1 + A}$,

解得 $A = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$, 由题设, $x_n > 0$, 根据极限保号性 $A \geq 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$.

题型四 无穷小的比较

【例 16】解: 由等价无穷小代换: $\sqrt[3]{1+x+x^2} - 1 \sim (x+x^2)/3$, $\sin 2x \sim 2x (x \rightarrow 0)$

得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x^2)/3}{2x} = \frac{1}{6}$, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小.

【例 17】解法 1: (1) 因 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1 \sim \sqrt[3]{x}/3$, 故 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$ 为 x 的 $1/3$ 阶无穷小 ($x \rightarrow 0$).

(2) $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x} = \sqrt{1+\tan x} - 1 - (\sqrt{1-\sin x} - 1)$,

而 $\sqrt{1+\tan x} - 1 \sim \tan x/2 \sim x/2$, $\sqrt{1+\tan x} - 1$ 为 x 的 1 阶无穷小 ($x \rightarrow 0$),

$\sqrt{1-\sin x} - 1 \sim -\sin x/2 \sim -x/2$, $\sqrt{1-\sin x} - 1$ 为 x 的 1 阶无穷小 ($x \rightarrow 0$),

又 $t = \min(1, 1) = 1$, 故 $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}$ 为 x 的 1 阶无穷小 ($x \rightarrow 0$).

(3) $\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2) \sim \sqrt{4+x^2}-2 = 2(\sqrt{1+x^2/4}-1) \sim 2 \cdot x^2/8 = x^2/4$,

即 $\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$ 为 x 的 2 阶无穷小 ($x \rightarrow 0$).

(4) $e^{x^2} - \cos x = (e^{x^2} - 1) + (1 - \cos x)$,

而 $e^{x^2} - 1 \sim x^2$, $1 - \cos x \sim x^2/2$, $t = \min(2, 2) = 2$,

故 $e^{x^2} - \cos x$ 为 x 的 2 阶无穷小 ($x \rightarrow 0$).

解法 2: 也可用定义求之, 自行补充.

题型五 普通未定式求极限

【例 18】解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1) (\sqrt{4+x^3} + 2)}{(\sqrt{4+x^3} - 2) (\sqrt{4+x^3} + 2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} [e^{\sin x} (\sqrt{4+x^3} + 2)] \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{x^3} \right)$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^3} = 2.$$

【例 19】解: 注意到 $\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3}$

$$= \frac{-(6x - \sin 6x)}{x^3} + \frac{6 + f(x)}{x^2},$$

而 $6x - \sin 6x \sim (6x)^3/6 (x \rightarrow 0)$, 因而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x)^3}{6x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2},$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36x^3}{x^3} = 36.$

仅(C)入选.

【例20】解: 令 $t = x - 1$, 则 $\cos \pi x = \cos[\pi(1+t)] = -\cos \pi t$ 且 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 0$, 故

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi t}{t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi^2 t^2}{t^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

【例21】解: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 + \cos x \rightarrow 2$, $\ln(1+x) \sim x$. 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos(1/x)}{\ln(1+x)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos(1/x)}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3\sin x}{x} + x \cos \frac{1}{x} \right]. \end{aligned}$$

由于有界变量乘无穷小量仍为无穷小量, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x) = 0$, 因而原式 $= 3/2$.

【例22】解法1: $x \rightarrow 1$ 时, $1-x \rightarrow 0$, $\arcsin(1-x) \sim 1-x$, 故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln[1+(x-1)]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x-1} = -1.$$

解法2: 令 $\arcsin(1-x) = t$, 则 $x = 1 - \sin t$, 且 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 0$,

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 - \sin t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{- \sin t} = -1.$$

解法3: 令 $t = 1-x$, 则 $x = 1-t$, $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 0$.

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{\ln(1-t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(-t)} = -1.$$

【例23】解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1 - [(1+x)^b - 1]}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = a - b.$$

【例24】解: 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\pi/4 + 2/n) = \tan(\pi/4) = 1$, 故所求极限为 1^∞ 型, 即得

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \tan(2/n)}{1 - \tan(2/n)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2\tan(2/n)}{1 - \tan(2/n)} \right]^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2\tan(2/n)}{1 - \tan(2/n)} \right] \cdot n},$$

$$\text{而} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2\tan(2/n)}{1 - \tan(2/n)} \right] \cdot n = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\tan(2/n)}{2/n} \cdot \frac{1}{1 - \tan(2/n)} \right] = 4(1 \cdot 1) = 4,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n(\pi/4 + 2/n) = e^4$.

【例25】解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_1^{1/x} - 1}{n} + \frac{a_2^{1/x} - 1}{n} + \cdots + \frac{a_n^{1/x} - 1}{n} \right)^{nx}$.

$$\text{而} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{a_1^{1/x} - 1 + a_2^{1/x} - 1 + \cdots + a_n^{1/x} - 1}{n} \right) nx \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^{1/x} - 1}{1/x} + \frac{a_2^{1/x} - 1}{1/x} + \cdots + \frac{a_n^{1/x} - 1}{1/x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1^{1/x} - 1}{1/x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_2^{1/x} - 1}{1/x} + \cdots + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n^{1/x} - 1}{1/x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/x) \ln a_1}{1/x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/x) \ln a_2}{1/x} + \cdots + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/x) \ln a_n}{1/x}$$

$$= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n).$$

$$\text{故原式} = e^{\lim \left[\left(\frac{a_1^{1/x} - 1 + a_2^{1/x} - 1 + \cdots + a_n^{1/x} - 1}{n} \right) nx \right]} = e^{\ln a_1 a_2 \cdots a_n} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

$$\text{【例 26】解: } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \cdot 3x}{\ln^2(1+x) - x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{x(\sin^2 x + \cos x - 1)}{\ln^2(1+x) - x^2}.$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} = f'(1);$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sin^2 x + \cos x - 1)}{\ln^2(1+x) - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{\ln^2(1+x) - x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\cos x - 1}{x^2} \right) \cdot \frac{x^3}{\ln^2(1+x) - x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\ln^2(1+x) - x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x) + x} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x) - x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = 3f'(1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}f'(1).$$

【注】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sin^2 x + \cos x - 1)}{\ln^2(1+x) - x^2}$ 也可用下列泰勒公式求得.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sin^2 x + \cos x - 1)}{\ln^2(1+x) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[(x^2 + o(x^2)) + (-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2))]}{[x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)]^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{2}$$

另外, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x) + x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1+x) - x}$ 等也可用洛必达法则求得.

题型六 必须考察左、右极限的几种函数

【例 27】解: 注意到当 $x \rightarrow +0$ 与 $x \rightarrow -0$ 时, $e^{\frac{1}{x}}$ 的极限不一样, 应先求出所求极限的左、右极限.

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{e^{-\frac{4}{x}}(2 + e^{\frac{1}{x}}) + \sin x}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x}.$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow +0} e^{-3/x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-4/x} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right).$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{4}{x}} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 2 - 1 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$$

$$\text{【例 28】解: 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2} + 1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(-x)\sqrt{1 + 1/x^2} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+1/x^2} + 1} = \infty,$$

故所求极限不存在.

【例 29】解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2(ax/2)}}.$

$$a > 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2(ax/2)}} = \lim_{x \rightarrow -0} \left[-\frac{x}{\sqrt{2} \sin(ax/2)} \right] = -\sqrt{2}/a,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2(ax/2)}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sqrt{2} \sin(ax/2)} = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

$$a < 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2(ax/2)}} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{\sqrt{2} \sin(ax/2)} = \sqrt{2}/a,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2(ax/2)}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x}{\sqrt{2} \sin(ax/2)} = -\frac{\sqrt{2}}{a}$$

因左、右极限不等, 故所求极限不存在.

题型七 已知极限值, 极限中待求常数的求法

【例 30】解: 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$, 将此极限等式两端分别与所给极限等式两端相乘得到

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - ax + b \right) = 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \frac{x^2}{1+x} - a + \frac{b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} - a + \frac{b}{x} \right) = 0,$$

故 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} [x/(1+x) + b/x] = 1$. 将 $a = 1$ 代入原式, 得到

$$b = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x} = 2.$$

【例 31】解: 将所给极限等式两端与另一个极限等式 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 的两端分别相乘, 消去待求系数 a 前的变量部分 $1/x^2$, 先求出 a , 事实上, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} + a + bx^2 \right) = 0$, 得到 $a = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = -3$. 将 $a = -3$ 代入所给极限等式, 即可求出 b :

$$-b = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} - \frac{3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3x}{x^3}.$$

注意到 $\sin 3x - 3x = -(3x - \sin 3x) \sim -(3x)^3/6$, $-b = \lim_{x \rightarrow 0} [-(3x)^3/(6x^3)] = -9/2$, 即 $b = 9/2$.

【例 32】解: 因分母为 x^2 , 将 $\ln(1+x)$ 展至 2 阶带佩亚诺余项的麦克劳林公式:

$$\ln(1+x) = x - (1/2)x^2 + o(x^2),$$

$$\begin{aligned} \text{则原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1/2)x^2 + o(x^2) - (ax + bx^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - (1/2+b)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2. \end{aligned}$$

于是必有 $1-a=0$, $-(1/2+b)=2$, 解之得 $a=1$, $b=-5/2$.

【例 33】解法 1: 原式 $\left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a/\cos^2 x + b \sin x}{-2c/(1-2x) - 2x e^{-x^2}} = -\frac{a}{2c} = 2$, 即 $a = -4c$. 仅(D)入选.

解法 2: 将函数展成带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$\tan x = x + x^3/3 + o(x^3), \quad \cos x = 1 - x^2/2! + o(x^2)$$