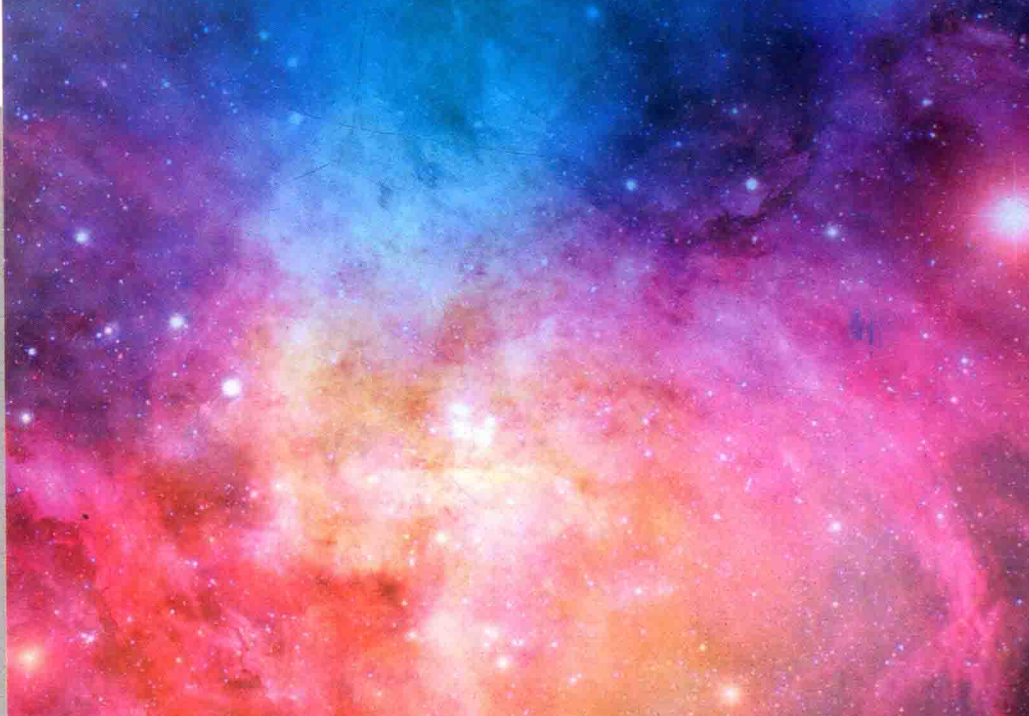
高等工科数学系列课程教材

复变函数论与运算微积

FUNCTION THEORY OF COMPLEX VARIABLES AND OPERATIONS OF THE DEFFERENTIAL PRODUCT

第3版

总主编　孙振绮 / 主　编　孙振绮　丁效华



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工科数学系列课程教材

复变函数论与运算微积

第3版

总主编　孙振绮
主　编　孙振绮　丁效华
副主编　邹巾英　李晓芳　史　磊

机 械 工 业 出 版 社

本书介绍了复变函数论与运算微积的基本理论和方法，取材适当，通俗易懂，便于教学. 本书共4章，内容包括：复变函数论、拉普拉斯变换、离散的拉普拉斯变换和数学物理方程定解问题的运算微积解法，每一章都配有大量习题，书末还附有双向拉普拉斯交换用表、双向离散的拉普拉斯变换用表和部分习题参考答案.

本书可作为高等院校工科各专业复变函数与运算微积课程的教材，也可作为工程技术人员以及其他科技人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数论与运算微积/孙振绮，丁效华主编．—3版．—北京：机械工业出版社，2019.5

高等工科数学系列课程教材

ISBN 978-7-111-62867-5

Ⅰ.①复… Ⅱ.①孙…②丁… Ⅲ.①复变函数论-高等学校-教材②拉普拉斯变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第103505号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫 汤 嘉
责任校对：潘 蕊 封面设计：鞠 杨
责任印制：孙 炜
天津翔远印刷有限公司印刷
2019年8月第3版第1次印刷
184mm×260mm·11.75印张·291千字
标准书号：ISBN 978-7-111-62867-5
定价：29.80元

电话服务
客服电话：010-88361066
010-88379833
010-68326294

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
金 书 网：www.golden-book.com
机工教育服务网：www.cmpedu.com

序

面对当今科学技术的发展和社会需求，从我国实际情况出发，吸收不同国家、不同学派的优点，更好地为我国培养高质量人才是广大数学教师的责任与愿望．虽然我国大多数工科数学教材的内容和体系是在20世纪50年代苏联相应教材的基础上演变发展而来的．当今不少教材在进行内容革新时非常注重北美发达国家的先进理念和经验，而对俄罗斯教材近年来的变化却注意不够．高等数学课程的教学要求、内容选取和体系编排等方面，俄罗斯教材与北美教材有很大的差异．孙振绮教授对俄罗斯的高等数学教学进行了长期深入的研究，发表了相关论文与研究报告十余篇．这对吸收不同学派所长，推动我国工科数学教学改革、建设具有中国特色的系列教材具有重要的参考价值．

长期以来，孙振绮教授与其他教授合作，以培养高素质创新型人才为目标，力图探讨一条提高本门课程教学质量的新途径．他们结合我国的实际情况，吸收俄罗斯高等数学课程教学的先进理念和经验，对教学过程进行了整体的优化设计，编写了一套工科数学系列教材共9部．该系列教材的取材考虑了现代科技发展的需要，提高了知识的起点，适当运用了现代数学的观点，增加了一些现代工程需要的应用数学方法，扩大了信息．同时，整合优化了教学体系，体现了数学有关分支间的相互交叉和渗透，加强了数学思想方法的阐述和运用数学知识解决问题能力的培养．

与当今出版的众多工科数学教材相比，该系列教材特色鲜明，颇有新意，其最突出的特点是：内容丰富，起点较高，体系优化，基础理论比较深厚，吸收了俄罗斯学派和教材的观点和特色，在国内独树一帜．对数学要求较高的专业和读者，该系列教材不失为一套颇有特色的教材和参考书．

该系列教材曾在作者所在学校和有关院校使用，反映良好，并于2005年获机械工业出版社科技进步一等奖．其中《工科数学分析教程》（上、下册）被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材．该校使用该教材的工科数学分析系列课程被评为2005年山东省精品课程，相关的改革成果和经验多次获校与省教学成果奖，在国内同行中有广泛良好的影响．笔者相信，该系列教材的出版，不仅有益于我国高质量人才的培养，也将会使广大师生集思广益，有助于本门课程教学改革的深入发展．

西安交通大学　马知恩

第 3 版前言

本书根据国内现行教学大纲对第 2 版教材进行修订. 在保持原教材的基本风貌的基础上增加了第 4 章数学物理方程定解问题的运算微积解法等, 并对全书内容进行了核对, 提高了本书的质量, 扩大了本书的适用范围.

本书可作为本科学生的公共课教材, 也可供报考硕士研究生的人员与科技人员参考。

孙振绮任全套系列教材的总主编, 孙振绮、丁效华任本书的主编, 负责策划、统编, 邹巾英、李晓芳、史磊任副主编, 参加本书修订的教师有: 邹巾英 (第 4 章)、王卫卫 (第 1 章)、李晓芳 (第 2 章)、史磊 (第 3 章).

金承日教授、伊晓东教授审阅了本书的各部分内容, 并提出了修订的意见, 在此深表谢意!

由于编者水平有限, 不妥之处在所难免, 恳请读者批评指正!

编　者

第 2 版前言

高等工科数学系列课程教材（第 1 版）曾获 2005 年机械工业出版社科技进步一等奖. 近年来，我们坚持以培养高素质创新型人才为目标，优化教学质量体系，全面深化教学改革，先后获省高等教育教学成果一、二等奖各一项，进一步推动了系列课程教材建设. 自 2007 年起，已陆续出版本系列教材（第 2 版）的部分教材.

本次修订出版的第 2 版在基本保持第 1 版风貌的基础上补充了部分内容，适当增加了数学建模内容比例与现代工程应用数学方法，精选了例题与习题，调整了某些内容顺序. 特别是增加了第 3 章：离散的拉普拉斯变换，其中介绍了离散拉普拉斯变换在解线性差分方程中的应用.

全套教材（第 2 版）仍由孙振绮任总主编，本书由孙振绮、丁效华任主编，参加本书修订的有邹巾英（第 3 章）、李晓芳、史磊（第 1 章）、王卫卫（第 2 章），此外还有曲荣宁参加了编写. 金承日、文松龙教授审阅了教材的各部分内容，并提出了有益的建议.

由于编者水平有限，缺点、疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

第 1 版前言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法. 为此，我们进行了十多年的教学改革实践，先后在哈尔滨工业大学、黑龙江省教委立项，长期从事“高等工科数学教学过程的优化设计”课题的研究，该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学研究成果奖. 本套系列课程教材正是这一研究成果的最新总结，包括:《工科数学分析教程》(上、下册)《空间解析几何与线性代数》《概率论与数理统计》《复变函数论与运算微积》《数学物理方程》《最优化方法》《计算技术与程序设计》等.

本套教材在编写上广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学 (原基辅工业大学) 等的教学改革经验，提高了知识起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养. 具体体现在: ①加强了对传统内容的理论叙述; ②适当运用近代数学观点来叙述古典工科数学内容，加强了对重要的数学思想方法的阐述; ③加强了系列课程内容之间的相互渗透与交叉，注重培养学生综合运用数学知识解决实际问题的能力; ④把精选教材内容与编写典型计算题有机结合起来，从而加强了知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具备较高的系统性和逻辑性; ⑤强化对学生的科学工程计算能力的培养; ⑥加强对学生数学建模能力的培养; ⑦突出工科特点，增加了许多现代工程应用数学方法; ⑧注意到课程内容与工科研究生数学的衔接与区别.

本套教材由孙振绮任总主编.

本书在内容叙述上尽可能体现工科数学的特点，坚持理论联系实际的原则，书中有许多实用性很强的例子，同时对每一章的内容在工程技术的应用范围都做了概述.

本书可供工科大学自动控制、计算机、机电一体化、工程物理等对数学具有较高要求的专业的本科二年级学生使用，需用 48 学时.

本书的编写得到了哈尔滨工业大学 (威海) 教务处的大力支持，在此深表谢意.

本书由哈尔滨工业大学 (威海) 数学系孙振绮、丁效华任主编，金承日、邹巾英任副主编. 参加本书编写的还有范德军、杨毅、孙建邵、伊晓东、李福梅、李宝家. 文松龙教授仔细审阅了全书，并提出了许多宝贵意见和建议.

在此，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意!

由于编者水平有限，缺点、疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正!

编　者

目　录

第1章
复变函数论

复变函数论是逻辑上和谐的数学学科，它允许在复数范围内进行数学运算. 它不仅对纯数学(代数、微分方程、解析数论等)和各种应用数学学科(空气动力学和流体动力学、天体力学、弹性理论等)具有重大的意义，而且还被广泛用来解决许多工程问题.

复变函数论广泛地应用在电子技术和无线电技术中，特别是在有关交流电的分析与电磁场理论方面有重要应用.

1.1 复数 区域和边界

1.1.1 复数的基本定义

初等代数里，我们已经知道在实数范围内，方程 $x^2=-1$ 是无解的. 由于解方程的需要，人们引进一个新数 i，规定 $\mathrm{i}^2=-1$，并称 i 为**虚数单位**，从而扩充了实数域.

对于任意实数 a 与 b，称 $a+b\,\mathrm{i}$ 或 $a+\mathrm{i}\,b$ 为复数，即复数 z 可记为 $z=a+b\,\mathrm{i}$(或 $z=a+\mathrm{i}\,b$)形式，称 a 为复数 z 的**实部**，b 为复数 z 的**虚部**，分别记为 $a=\mathrm{Re}\,z$，$b=\mathrm{Im}\,z$. 这些符号来自于法文 reel(实的)和 imaginaire(虚的).

两个复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$ 相等，当且仅当 $a_1=a_2$ 和 $b_1=b_2$ 同时成立. 对于两个复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$ 的代数运算定义如下：

加法按公式

$$z_1+z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1+a_2)+\mathrm{i}(b_1+b_2) \tag{1-1}$$

乘法按公式

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}(a_1b_2+b_1a_2) \tag{1-2}$$

减法和除法则定义为加法和乘法的逆运算，即

$$z_1-z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})-(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1-a_2)+\mathrm{i}(b_1-b_2) \tag{1-3}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1\mathrm{i}}{a_2+b_2\mathrm{i}}=\frac{(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})}{(a_2+b_2\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \tag{1-4}$$

不难证明，复数的运算和实数情形一样，也满足交换律、结合律、分配律等.

复数 $a+b\,\mathrm{i}$ 与 $a-b\,\mathrm{i}$ 称互为共轭复数，复数 $z=a+b\,\mathrm{i}$ 的共轭复数常记为 $\bar{z}$，于是

$$\bar{z}=a-b\,\mathrm{i}=\overline{a+b\,\mathrm{i}},$$

容易证明共轭复数有如下性质：

(1) $\bar{\bar{z}}=z$，$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(2) $z\cdot\bar{z}=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2$

(3) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\, z$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, z$

1.1.2　复数的几何表示与各种标记

在给定的笛卡儿直角坐标系的坐标平面上可以给出复数的几何表示. 横轴上的点代表实部，而纵轴上的点代表虚部. 这时的坐标平面称为复平面，而坐标轴相应地称为实轴和虚轴.

复数 $z=x+\mathrm{i}\,y$ 在复平面上或者用点 (x,y) 表示，或者用向量 $\overrightarrow{Oz}=(x,y)$ 表示. 这时向量的长度 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$，即 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 把从实轴正向开始旋转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的转角 φ（图 1-1），称为复数 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}\, z$，即 $\varphi=\mathrm{Arg}\, z$. 其中按逆时针方向转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的转角是正的，按顺时针方向转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的转角是负的. 把 $\mathrm{Arg}\, z$ 中满足 $-\pi<\mathrm{Arg}\, z\leqslant\pi$ 的辐角 φ 称为**辐角的主值**，记为 $\arg z$. 显然有 $\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 当 $z=0$ 时，辐角没有意义.

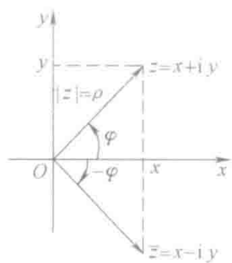


图　1-1

不难确定，$|z|=R(R=\mathrm{const})$ 表示一个以坐标原点为圆心，R 为半径的圆周（图 1-2a）；$|z|<R(R=\mathrm{const})$ 表示一个以坐标原点为圆心，R 为半径的开圆面（不包括圆周）（图 1-2b）；$|z-z_0|<R$ 表示一个以 z_0 为圆心，R 为半径的开圆面（图 1-2c）；$\arg z=\varphi(\varphi=\mathrm{const})$ 表示一条从坐标原点引出的极角为 φ 的射线（图 1-2d）.

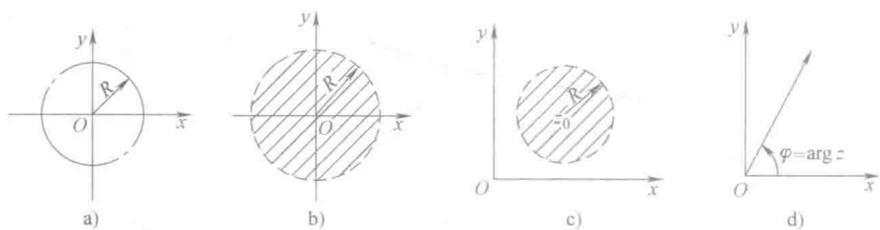


图　1-2

如果 x，y 是变量，那么 $z=x+\mathrm{i}\,y$ 也是变量，这时可以说 z 是复变量. 对于复变量仍然有模 $|z|$ 和辐角 $\mathrm{Arg}\, z$ 的概念，然而这些量也都是变量.

按照图 1-1 采用的标记，下面的关系成立

$$x=\rho\cos\varphi \quad 和 \quad y=\rho\sin\varphi \tag{1-5}$$

由此得出

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{1-6}$$

这样的表示称为复数的三角式.

欧拉证明了恒等式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$. 利用这个恒等式，公式(1-6)可记作 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，这是复数的指数式. 于是两个复数 $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)$ 和 $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$ 相等的充分必要条件是 $\rho_1=\rho_2$，$\varphi_1=\varphi_2+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$（由三角函数的周期性得出）. 易见，$|z|=|\bar{z}|$，$\arg\bar{z}=-\arg z(\arg z\neq\pi)$.

如同复数代数式加、减法一样，三角式的复数也能进行加法和减法的运算. 它们的几何运算与向量的加、减法运算是相对应的.

复数 $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)$ 和 $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$ 的乘法与通常一样. 然而已知的

复数的三角式可化简乘法法则：

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= \rho_1\cdot\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \\ &= \rho_1\cdot\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}$$

即两个复数乘积的模等于它们的模的乘积：$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$，而乘积的辐角等于它们的辐角之和：$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$.

复数 z_1 乘以复数 z_2 在几何上归结为把向量 z_1 伸长 $|z_2|$ 倍并按逆时针方向旋转一个角度 $\varphi_2 = \arg z_2$（在图 1-3 中，$\triangle O1z_1 \backsim \triangle Oz_2z$）.

复数乘法的直接推论如下：

复数的乘方法则

$$z^n = \rho^n(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = \rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$$

棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi$$

复数 $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ 和 $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$ 的除法可作为乘法的逆运算

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

即两个复数的商的模等于它们的模的商：$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$，而商的辐角等于被除数与除数的辐角之差：$\mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2$.

复数 z_1 除以复数 z_2 在几何上归结为把向量 z_1 压缩 $|z_2|$ 倍并按顺时针方向旋转一个角度 $\varphi_2 = \arg z_2$，$\varphi_2 > 0$（图 1-4）.

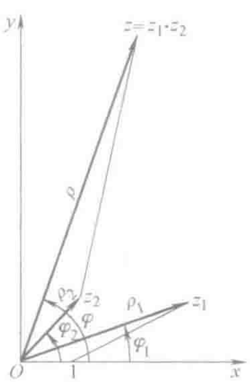


图 1-3

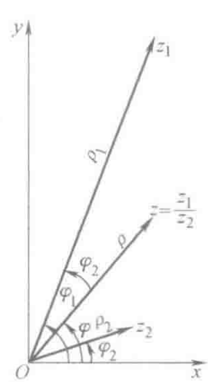


图 1-4

复数 z 开 n 次方可作为乘方的逆运算进行，考虑到三角函数的周期性，有

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}}$$

其中，$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$ 因此

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right)$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{\rho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_0}{n}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k=0,1,2,\cdots,n-1$$

如果 $k=n$，那么$\dfrac{\varphi}{n}=\dfrac{\varphi_0}{n}+2\pi$，从而得到一个与 $k=0$ 时相同的方根值. 这样也证明了复数的 n 次方根恰好有 n 个不同的值. 这些方根的模与辐角分别为$\sqrt[n]{|z|}$ 和 $\dfrac{\varphi_0+2k\pi}{n}$，即这 n 个值就是以原点为中心，$\sqrt[n]{\rho}$为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

在电子技术中，复数 $a+b\,\mathrm{i}$ 的三角式和指数式为 $a+b\,\mathrm{i}=A(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，其中，$A=\sqrt{a^2+b^2}$，$\alpha=\arctan\dfrac{b}{a}\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 它们被广泛地用来计算交流电路问题.

如果把 a 和 b 看作变量 t 的函数，那么几何上表达式 $a(t)+\mathrm{i}\,b(t)$将代表变化的向量，当模是常量时，则表示具有定长的旋转着的向量. 现在考虑复向量函数

$$a(t)+\mathrm{i}\,b(t)=U_m[\cos(\omega t+\psi_u)+\sin(\omega t+\psi_u)]=U_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_u}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

它是随正弦规律变化的.

当 $t=0$ 时，这个向量函数的初始位置为 U_m，辐角为 ψ_u(图 1-5).

实部 $U_m\cos(\omega t+\psi_u)$和虚部 $U_m\sin(\omega t+\psi_u)$分别是长为 U_m 的按定角速度 ω 旋转的向量在横轴和纵轴上的投影. 因为要研究正弦函数，所以只限制研究 $u=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$，使它与整个的向量函数相对应，记作

$$u=U_m\sin(\omega t+\psi_u)\doteq^{㊀}U_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_u}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

这里没必要考虑 $U_m\cos(\omega t+\psi_u)$，这是因为

$$\cos(\omega t+\psi_u)=\sin\left[(\omega t+\psi_u)+\frac{\pi}{2}\right]$$

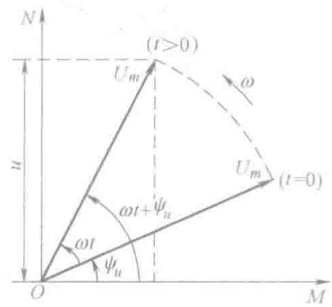


图 1-5

由于 $U_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_u}$不依赖于时间 t，令$\dot{U}_m=U_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_u}$称作振幅(具有初相 ψ_u 的正弦电压 u 是已知的). 因此 $u\doteq\dot{U}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

其次，在交流电路计算中只规定$\dot{U}_m$ 是复常量，而不是时间的正弦函数. 所以，电路计算最终归结为一般的正弦函数的计算.

上述方法称为符号法. 这种方法的实质是把按正弦规律变化的复向量函数计算转化为与其相应的复常量的代数运算，且最终转化为一般的正弦函数计算.

1.1.3 球极投影

上面考虑的是复平面上的复数. 其实还存在着另一种复数的几何表示法，借助于它可引出无穷远点的概念，下面来介绍它.

取一个任意半径的球面使它与复平面在坐标原点相切(图 1-6)，切点称为球面的南极，而过南极的直径的另一端点称为北极. 复平面的坐标原点对应于球面的南极并记为 $z=0$. 从球面北极 P 引向复平面上任意一点 z 的射线与球面

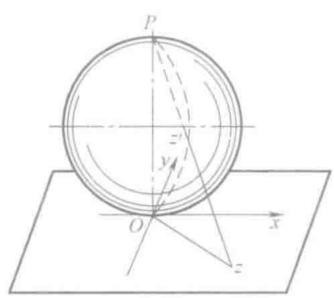


图 1-6

㊀ ≑表示“对应于”，下同.

必交于一点 z'. 这样可建立复数平面与不含北极在内的球面之间的一一对应.

用球面表示复平面称为复平面的球极投影，而球面称为复数球面.

为了实现复平面与全球面之间的一一对应关系，把假定的无穷远点($z=\infty$)引入复平面，让它与球面的北极相对应. 这个点不能参加任何算术的或代数的运算，然而对复数序列可以，并且常常收敛于它. 复平面上每一条直线都通过∞，同时没有一个半平面包含点∞. ∞的实部、虚部及辐角均无意义，$|\infty|=+\infty$.

引入了无穷远点的复平面称为全复平面，而没有这个点的复平面称为开复平面.

1.1.4 区域和边界

考虑几个集合概念.

定义 1-1 复平面上的点集 D 称为**区域**，如果 D 满足如下条件：

(1) 以 D 中的任意给定点为中心的足够小的圆周内的点全部属于这个集合(开集的性质)；

(2) 集合 D 中任意两点都能用折线把它们连接起来，使得折线上所有点都属于这个集合(连通的性质).

定义 1-2 满足定义 1-1 中的条件(1)的所有点称为区域的**内点**.

区域 D 的**外点**是指复平面上这样的点，即以它为中心的一个足够小的圆周内的点全部不属于区域 D.

定义 1-3 含有某点 z_0 的任意区域称为这点的邻域. 通常取圆域作为点的邻域，如果圆的半径为 r($|z-z_0|<r$)，那么称这个邻域为点 z_0 的 r **邻域**.

无穷远点的邻域应理解为以坐标原点为中心的任意圆域的外部，即区域$|z|>R$.

定义 1-4 点 M 称为区域的**边界点**，如果以它为中心的任意足够小的邻域总有区域 D 中的点，也有区域 D 外的点. 区域 D 的边界点的全体称为区域的**边界**. 譬如，圆域$|z|<1$的边界是圆周$|z|=1$.

定义 1-5 由区域 D 及边界所组成的集合称为**闭区域**，记作$\overline{D}$.

后面要用到如下的数学分析的概念：

在$[\alpha,\beta]$上连续的实变量 t 的函数 $z(t)$ 确定一条连续的曲线，函数 $z(t)$ 的值称为曲线上的点的坐标，称方程 $z=z(t)$ 是曲线方程或者称为参变量方程.

在每条曲线上都可确定两种方向中的一种，即或为参变量增加的方向，或为参变量减少的方向. 在第一种情况下，$z(\alpha)$是曲线的起点，而 $z(\beta)$是它的终点. 在第二种情况下相反. 如果曲线的起点和终点重合，则称它是闭的.

只与一个参变量值相对应的点，称为简单点；与两个或更多个参变量的值相对应的点称为重点. 仅由简单点组成的曲线(不含重点)称为**简单曲线**(或若尔当(Jordan)曲线).

定义 1-6 区域 D 称为**单连通**的，如果属于 D 的任意一条简单闭曲线，在 D 内可以经过连续的变形而缩成一点.

从这个定义得出，如果区域是**多连通**的，那么它的边界不可能由一条简单闭曲线组成. 图 1-7 是单连通区域的例子，而图 1-8 则表示多连通区域.

在今后将考虑区域边界是由一条或几条分段光滑的曲线所组成的情形，特别地，还可能退化成一点.

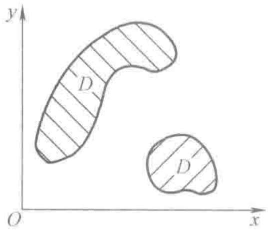


图 1-7

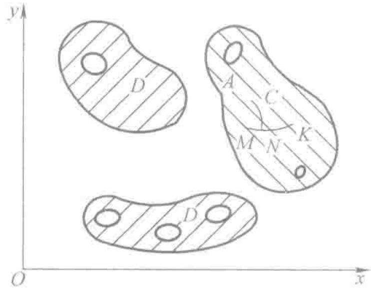


图 1-8

例 1-1 把 $-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 用三角式和指数式表示出来.

解 原式为代数式，其模 $\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，由于此点在第二象限，所以辐角主值 $\varphi=\pi+\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)=\frac{2\pi}{3}$，所以指数式为 $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}$，三角式为 $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

例 1-2 把 $\frac{2\,\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$ 用代数式、三角式和指数式表示出来.

解 化简原式 $\frac{2\,\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\frac{2\,\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=\frac{-2\,\mathrm{i}+2}{2}=1-\mathrm{i}$，此即代数式，其模 $\rho=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，因此点在第四象限，所以辐角主值 $\varphi=\arctan\left(\frac{-1}{1}\right)=-\frac{\pi}{4}$，所以，指数式为 $z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，三角式为 $z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

例 1-3 把 $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$（$\alpha$ 是实常数）用代数式、三角式和指数式表示出来.

解 原式已经为代数式，其模 $\rho=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2-2\cos\alpha}=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$，易见此点在右半平面，故辐角 $\varphi=\arctan\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\arctan\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)$，所以 $\tan\varphi=\cot\frac{\alpha}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$，所以辐角 $\varphi=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}(n\in\mathbf{Z})$，所以其指数式为 $z=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}$，三角式为 $z=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\left[\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$. 特别地，当 $0<\alpha\leqslant\pi$ 时辐角主值为 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$，三角式为

$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

例 1-4 把 $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}}$ 用代数式、三角式和指数式表示出来.

解 由 $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$，后者即为指数式. 显然模为 e，辐角主值 $\varphi=1$，三角式为 $z=\mathrm{e}(\cos 1+\mathrm{i}\sin 1)$，代数式为 $z=\mathrm{e}\cos 1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}\sin 1$.

例 1-5 计算 $(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{10}$.

解 注意到 $-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 为第二象限点，辐角主值为 $\frac{2\pi}{3}$. 由例 1-1 及乘方定义，可得

$$(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^{10}=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$
$$=1024\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-512+512\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

例 1-6　计算$[2(\cos 25°+\mathrm{i}\sin 25°)][5(\cos 110°+\mathrm{i}\sin 110°)]$.

解　原式$=10(\cos 135°+\mathrm{i}\sin 135°)=10\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

例 1-7　$0\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant 1$ 在复平面上具有怎样的意义?

解　设 $z=x+\mathrm{i}\,y$, $\mathrm{Re}\,z=x$, 所以 $0\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant 1$ 即 $0\leqslant x\leqslant 1$, 这在复平面上表示为, 直线 $x=0$与 $x=1$ 所构成的带形区域, 并包括两条直线在内.

例 1-8　$2\leqslant |z|\leqslant 3$ 在复平面上具有怎样的意义?

解　因为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, 所以 $2\leqslant |z|\leqslant 3$, 即为 $2\leqslant \sqrt{x^2+y^2}\leqslant 3$, 亦即 $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$. 这在复平面上表示由圆周 $x^2+y^2=4$ 和圆周 $x^2+y^2=9$ 所围成的环形区域, 并包括圆周(图 1-9).

例 1-9　$0<\arg\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\frac{\pi}{4}$在复平面上具有怎样的意义?

解　因为

$$\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}=\frac{x+\mathrm{i}(y-1)}{x+\mathrm{i}(y+1)}=\frac{[x+\mathrm{i}(y-1)][x-\mathrm{i}(y+1)]}{[x+\mathrm{i}(y+1)][x-\mathrm{i}(y+1)]}$$
$$=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\mathrm{i}\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$
$$=X+\mathrm{i}\,Y=Z$$

所以原式等价于 $0<\arg Z<\frac{\pi}{4}$. 如果以 X 轴为实轴, Y 轴为虚轴, 上式在复平面 Z 上表示为 $X>0$ 和 $Y>0$, 即要求 $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>0$ 和 $\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$. 亦即

$$\begin{cases}x<0\\x^2+y^2-1>0\end{cases} \tag{①}$$

上式①表示复平面 z 上的左半平面除去单位圆周及其内部.

又由 $0<\arg Z<\frac{\pi}{4}$ 得 $0<\arg\frac{Y}{X}<\frac{\pi}{4}$, 即 $0<\arctan\left(\frac{-2x}{x^2+y^2-1}\right)<\frac{\pi}{4}$, 亦即 $0<\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$, 考虑到式①, 则

$$\begin{cases}-2x>0\\-2x<x^2+y^2-1\end{cases}, \text{即} \begin{cases}x<0\\x^2+y^2+2x-1>0\end{cases} \tag{②}$$

在 $x<0$ 的条件下, 凡满足 $x^2+y^2+2x-1>0$ 的点必定也满足 $x^2+y^2-1>0$. 所以, 无需单独提出, 而式②表示复平面 z 上的左半平面 $x<0$, 但除去圆周$(x+1)^2+y^2=2$ 及其内部(图 1-10).

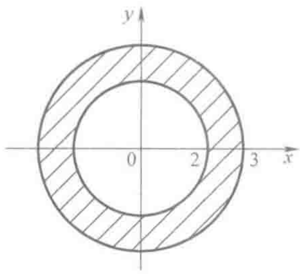


图　1-9

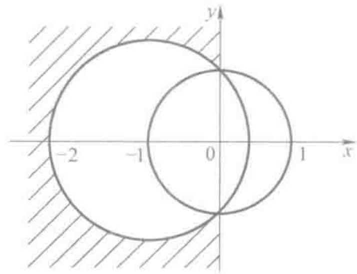


图　1-10

例 1-10　$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ 在复数平面上具有怎样的意义？

解　设 $z_1=x_1+\mathrm{i}\,y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}\,y_2$，x_1，x_2，y_1，y_2 均为实数，则

$$
\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\
&=2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2\\
&=2|z_1|^2+2|z_2|^2
\end{aligned}
$$

这是一个恒等式，对于复平面中任意的 z_1 和 z_2 都成立，它表示平行四边形对角线的平方和等于两邻边平方和的两倍. 如果把 z_1 和 z_2 表示成复平面上的向量，那么 z_1 和 z_2 的加减运算与相应的向量的加减运算(平行四边形法则)是相同的，这可由图 1-11 清楚地看出.

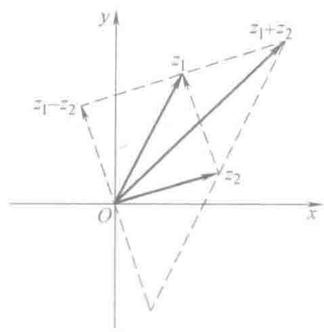


图　1-11

例 1-11　求下列根式的值：

(1) $\sqrt[2]{-\dfrac{1}{8}}$　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{i}}{8}}$　　(3) $\sqrt[4]{-128-128\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$

解　(1)

$$-\frac{1}{8}=\frac{1}{(\sqrt{8})^2}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$$

$$\sqrt[2]{-\frac{1}{8}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)\qquad(k=0,1)$$

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i},\ z_2=-\frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{i}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$$

(2)

$$\frac{\mathrm{i}}{8}=\frac{1}{2^3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt[3]{\frac{\mathrm{i}}{8}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\qquad(k=0,1,2)$$

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4},\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4},\ z_3=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

(3)

$$-128-128\sqrt{3}\,\mathrm{i}=4^4\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt[4]{-128-128\sqrt{3}\,\mathrm{i}}=4\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,1,2,3)$$

$$z_1=2\sqrt{3}-2\mathrm{i},\ z_2=2+2\sqrt{3}\mathrm{i},\ z_3=-2\sqrt{3}+2\mathrm{i},\ z_4=-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$$

例 1-12　确定下列曲线的形状：

(1) $z=t-2+\mathrm{i}(t^2-4t+5)$　　(2) $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\dfrac{1}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$

(3) $z=3\sec t+2\mathrm{i}\tan t(t\in\mathbf{R})$

解　若令 $x=\mathrm{Re}\,z$，$y=\mathrm{Im}\,z$，消去共同的参数 t，即可求出关于变元 x，y 的表达式，此表达式即为所求.

(1) $x=t-2$，$y=t^2-4t+5$，显然 $x^2=t^2-4t+4=y-1$，所以 $y=x^2+1(y\geqslant 1)$是抛物线.

(2) $z=2\cos t+2\mathrm{i}\sin t+\dfrac{1}{2}\cos t-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\sin t$

于是 $x=\dfrac{5}{2}\cos t$，$y=\dfrac{3}{2}\sin t$，故 $\left(\dfrac{2}{5}x\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}y\right)^2=1$ 是椭圆.

(3) $x=3\sec t$，$y=2\tan t$，消去 t 得 $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2-\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=1$，是双曲线.

例 1-13　设 a，b 和 c 是复常数，且 $a\neq 0$. 证明：方程

$$az^2+bz+c=0 \qquad ①$$

的解由(通常的)二次公式

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad ②$$

给出，其中 $\sqrt{b^2-4ac}$表示$(b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}$的值之一.

证　用 $4a$ 去乘式①的两端后，变形为

$$4a^2z^2+4abz+b^2=b^2-4ac$$

即$(2az+b)^2=b^2-4ac$，得 $2az+b=(b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{b^2-4ac}$，解出 z，即为式②.

习　题　1

1. 求下列各式的值：

(1) $\left|\dfrac{1+2\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}}\right|$　　(2) $|\overline{(1+\mathrm{i})}(2-3\mathrm{i})(4\mathrm{i}-3)|$

(3) $\left|\dfrac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}\right|$　　(4) $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}-\mathrm{i})$

2. 求下列根式的值：

(1) $\sqrt[2]{\mathrm{i}}$　　(2) $\sqrt[2]{\dfrac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}}$　　(3) $\sqrt[3]{27}$

(4) $\sqrt[3]{-4-4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$　　(5) $(-16)^{\frac{1}{4}}$　　(6) $\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{4}}$

3. 将复数 $\dfrac{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)^3}$ 化为指数式和三角式.