高等学校通用教材

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

工科数学分析（上册）

孙玉泉 文 晓 薛玉梅 苑 佳 杨义川 编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等学校通用教材

工科数学分析

（上册）

孙玉泉　文　晓　薛玉梅　苑　佳　杨义川　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

《工科数学分析》分上、下两册. 本书为上册,内容包括:集合与映射、数列极限、函数极限与连续、函数的导数、泰勒公式、不定积分、定积分、定积分的应用、广义积分、常微分方程. 附录为常用几何曲线图示和计算机辅助数学分析学习举例.

为满足新形势下"重基础、宽口径"的人才培养需求,编写团队结合多年的教学经验,精心设置教材内容,注重核心内容的完整性和严谨性,注重数学分析的经典思想、方法和技巧,并兼顾课程与现代数学应用前沿的联系.

本书可供综合性大学和理工科院校作为教材使用,也可作为相关科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析. 上册 / 孙玉泉等编著. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社, 2019.8

ISBN 978-7-5124-3044-0

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 147223 号

工科数学分析(上册)

孙玉泉　文　晓　薛玉梅　苑　佳　杨义川　编著

责任编辑　蔡　喆

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

读者信箱:goodtextbook@126.com　邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本:787×1 092　1/16　印张:17.25　字数:442 千字

2019 年 8 月第 1 版　2019 年 8 月第 1 次印刷　印数:4 000 册

ISBN 978-7-5124-3044-0　定价:49.00 元

前　　言

“工科数学分析”是一流工科大类学生一年级的必修课程，其思想方法几乎渗透到了大学四年及后续研究生的所有自然科学、工程技术相关的课程中. 这门课程的学习对培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象力、科学计算能力起着重要的作用.

顾名思义，微积分主要包含微分学与积分学，历史上也称之为无穷小分析. 微分学主要包括求导数、求微分的运算，是一个关于变化率的理论，使得函数、速度、加速度和曲线的切线斜率均可以使用一套通用的符号进行讨论. 而积分学包括求积分的运算，为定义和计算面积、体积等提供了一套通用的方法. 微分学和积分学通过微积分基本定理联系到了一起.

自从 17 世纪下半叶牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)分别独立发明微积分之后，微积分成了推动近代数学发展强大的引擎，同时也极大地推动了自然科学、社会科学及应用科学各个分支的发展. 几乎所有现代技术都以微积分学作为基本数学工具之一.

为更好地适应新时期人才培养的需求，我们编写了本教材. 教材在突出数学分析课程核心内容的同时，力求做到语言简洁，逻辑清晰，满足学生课下自主阅读和学习的需求. 上册主要介绍一元微积分以及常微分方程基础，级数与多元微积分的内容放到了下册. 第 1 章的内容主要是集合、映射、函数等概念的复习和反三角函数与极坐标的简介. 进一步介绍集合的势、可数集、集合的确界等概念. 这一章中，把确界存在定理以公理的形式直接给出，作为后面实数理论的基础. 第 2 章数列的极限主要介绍数列极限的定义、基本性质及其运算，实数理论中的其他等价定理. 第 3 章主要介绍函数的极限与函数的连续. 第 4 章的内容为函数的导数及其应用，主要介绍导数的定义，导数的计算，微分中值定理以及导数在研究函数性质中的应用. 第 5 章的内容为 Taylor 公式，主要介绍函数微分的概念，Peano 余项和 Lagrange 余项的 Taylor 公式及其简单的应用. 第 6 章的内容为不定积分，主要介绍不定积分的概念和求不定积分的方法. 第 7 章的内容为定积分，主要介绍定积分的概念及其计算方法. 第 8 章的内容为定积分的应用，主要介绍定积分在求平面图形的面积、曲面的表面积以及立体图形的体积等数学应用，同时介绍一些定积分在物理中的简单应用. 第 9 章的内容为广义积分，主要介绍无穷积分和瑕积分的基本概念及其敛散性的判别法. 第 10 章的内容为常微分方程基础，主要介绍常微分方程的基本概念以及一些简单的常微分方程的解法.

通过“工科数学分析”这门课程的学习，除了为后继的力学、物理、计算机、金融等相关学科的学习打下相应的数学基础之外，也希望同学们学会使用数学作为工具来分析问题解决问题. 我们列举几个问题，希望大家能通过课程的学习自己回答这些问题：探照灯为什么要设计成旋转抛物面？彩虹的最高点为什么会在你抬头 42 度的位置？第二宇宙速度是根据什么计算出来的？为什么圆柱形罐头的高度是底面半径 2 倍时材料最省？篮球向上扔的时候，到达最高点的时间和从最高点回到原点的时间为什么不一样？

郑志明院士的教学思想和教学理念对本书的编写提供了重要指导，郑志勇教授、韩德仁教授提供了大力支持，徐兵教授、高宗升教授、王进良教授等在教材编写过程中给予了热心帮助，工科数学分析教学团队全体主讲教师在前期讲义的使用过程中提出了许多宝贵意见，为本教

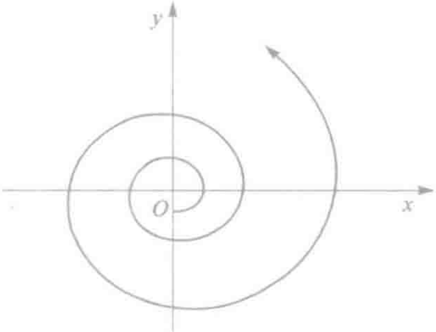
材的出版做出了重要贡献,在此一并致谢.

因编者的才学能力所限,教材中如有不足之处,希望读者能将发现的问题及时反馈给我们. 我们也将在本书的使用过程中及时完善并通过微信公众号“北航工科数分”发布相关勘误信息和补充资料,或者通过北航出版社邮箱 goodtextbook@126.com 联系我们。

编 者

2019 年 7 月

目　　录



第 1 章　集合与映射

数学的研究对象是数量关系与空间形式，而集合论语言则是描述这些对象的最通用的语言. 在本章中我们将回顾集合与映射的基本概念并介绍一些相关的数学知识.

1.1　集　合

1.1.1　集合的概念

集合，简称集，是指某些具有特定性质的事物构成的全体. 构成这些集合的其中一个事物称为该集合中的一个元素. 通常用大写字母如 A，B 或 X，Y 来表示一个集合，用小写字母如 a，b 或 x，y 来表示元素.

设 A 是一个集合，a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$. 若 b 不是集合 A 中的元素，则称 b 不属于 A，记为 $b\notin A$.

表示集合的方式通常有两种，一种是枚举的方式，把集合当中的所有元素都列举出来，然后用一个大括号把它们括起来. 例如可以使用

$$\{1,2,3,4\}$$

来表示 1，2，3，4 这四个数的全体构成的集合. 有的时候尽管无法把集合中的元素全部列举出来，但可以通过列举一部分，把其中的规律体现出来，例如可以使用

$$\{1,2,\cdots,n-1,n\}$$

来表示由 1 到 n 的这 n 个自然数构成的集合.

另一种表示集合的方法是描述的方式，如果集合是由所有具有某种性质 P 的元素构成的，则可记该集合为

$$\{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如可以将方程 $\sin x=0$ 的所有解构成的集合记为

$$\{x \mid \sin x=0\}.$$

集合与集合之间，经常还需要讨论如下关系. 设 A，B 是两个集合，如果 A 中的任一元素都属于 B，则称集合 A 包含于集合 B，或称集合 B 包含集合 A，记为 $A\subseteq B$，这时称 A 是 B 的一个子集.

如果既有 $A\subseteq B$ 又有 $B\subseteq A$，则称 A 和 B 相等，记为 $A=B$.

如果 A 和 B 不相等，则记为 $A\neq B$.

如果 $A\subseteq B$ 但 $A\neq B$,记为 $A\subset B$,此时称 A 是 B 的一个真子集.

在数学中,一些常用集合,有通用的表示方式,例如

使用$\mathbb{N}$表示所有自然数构成的集合,即

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}.$$

使用$\mathbb{Z}$表示所有整数构成的集合,即

$$\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}.$$

所有正整数构成的集合,一般使用$\mathbb{N}^*$或$\mathbb{Z}^+$表示,即

$$\mathbb{N}^*=\mathbb{Z}^+=\{1,2,\cdots\}.$$

使用$\mathbb{Q}$表示所有有理数构成的集合,即

$$\mathbb{Q}=\left\{x \mid x=\frac{q}{p},\text{其中 } q\in\mathbb{Z},p\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1\right\}.$$

使用$\mathbb{R}$表示所有实数构成的集合. 所有正有理数构成的集合用$\mathbb{Q}^+$表示,所有正实数构成的集合使用$\mathbb{R}^+$表示.

给定两个实数 $a<b$,记:

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}.$$

我们称它们为开区间. 其中记号“∞”读做“无穷”. 集合

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant b\}.$$

称为闭区间. 集合

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leqslant b\}.$$

称为半开半闭区间. 开区间、闭区间、半开半闭区间均称为区间. 特别地,整个$\mathbb{R}$也可视为一个区间,表示为$(-\infty,+\infty)$,既把它看成开区间,也把它看成闭区间.

还有一个特殊的集合,它不包含任何元素,使用$\varnothing$表示,读作“空集”. 对于任意集合 X,均有$\varnothing\subseteq X$.

1.1.2 集合的运算

两个集合之间可以定义并、交、差、补四种基本运算. 记

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

它是由 A 和 B 两个集合的元素放到一起构成的一个集合,称之为 A 和 B 的并集. 记

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

它是由 A 和 B 的公共元素构成的集合,称之为 A 和 B 的交集.

集合的并与交满足如下性质:

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

回顾一下如何证明两个集合相等，如证明：

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

这里先证

$$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

设 $x \in (A \cup B) \cap C$，则 $x \in C$ 且 $x \in A \cup B$. $x \in A \cup B$ 说明 $x \in A$ 或者 $x \in B$. 若 $x \in A$，则 $x \in A \cap C$，若 $x \in B$，则 $x \in B \cap C$. 因此总有 $x \in A \cap C$ 或者 $x \in B \cap C$，即有 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. 因此有 $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 成立.

再证

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C.$$

设 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$，则有 $x \in A \cap C$ 或者 $x \in B \cap C$. 不管哪种情况总有 $x \in C$，同时有 $x \in A$ 或者 $x \in B$，因此 $x \in A \cup B$. 于是 $x \in (A \cup B) \cap C$. 从而

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C.$$

两个包含关系合起来即得

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

给定两个集合 A, B，记

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

它表示属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合，称之为 A 和 B 的差集. 注意这里并没有要求 B 是 A 的子集.

当所考虑的集合总是某一个集合 X 的子集时，我们往往称 X 为全集. 对于 X 的一个子集 A，我们将集合 $X \backslash A$ 称为 A 的补集，记为 $\complement_X A$ 也记作 A^c. 在同一个全集中，补和差的运算满足公式

$$A \backslash B = \complement_A B = A \cap B^c.$$

集合的补、交、并三个运算之间满足下列的 DeMorgan 定律：

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

这里回顾一下第一个公式的证明. 先证 $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. 任取 $x \in (A \cup B)^c$，则 $x \notin A \cup B$，因此既有 $x \notin A$，又有 $x \notin B$. 即

$$x \in A^c \text{ 且 } x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c.$$

因此 $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

反过来，任取 $x \in A^c \cap B^c$，有 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$，因此，既有 $x \notin A$，又有 $x \notin B$，可推出 $x \notin A \cup B$. 因此 $x \in (A \cup B)^c$，这证明了 $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. 两方面合起来即 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

两个集合之间还可以定义笛卡尔积，从而得到一个新的集合. 给定集合 A, B，记

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\},$$

称之为集合 A 与集合 B 的笛卡尔积. 集合 A 与集合 B 可以相同也可以不同. 在平面解析几何或空间解析几何中我们经常用二元有序数组或三元有序数组来表示点或向量. 此时二元有序数组 (x, y) 就可以认为是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 中的元素，三元有序数组可以认为是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 中的元素. 此时我们一般记 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 我们还可以使用笛卡尔积表示平面上的长方形和空间中的长方体. 如集合

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$$
表示一个长方形. 集合
$$[a,b]\times[c,d]\times[e,f]=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d,e\leqslant z\leqslant f\}$$
表示一个长方体.

习题 1.1

1. 用集合表示下列数集:

(1)上半平面的点的全体(不含 x 轴);

(2) 0 与 1 之间的有理数全体;

(3) 满足 $\left|\dfrac{x-4}{x+1}\right|\leqslant 1$ 的实数全体;

(4) $\cos n\pi=1$ 成立的 n 的全体.

2. 举例说明集合运算不满足消去律:

(1) $A\cup B=A\cup C$ 不蕴含 $B=C$;

(2) $A\cap B=A\cap C$ 不蕴含 $B=C$.

3. 证明下列集合等式:

(1) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

1.2 映射与函数

1.2.1 集合之间的映射

映射指的是两个集合之间的一个对应关系. 数学分析这门学科的主要研究对象是函数,函数可以看成是特殊的一种映射.

定义 1.2.1 给定两个集合 X,Y. 若 f 是 X 和 Y 之间的对应关系且满足:任给 $x\in X$,在 Y 中存在唯一的元素 y 与之对应,则称 f 为集合 X 到集合 Y 的一个映射,记为
$$f:X\to Y \qquad x\mapsto y.$$
设 $x\in X$,则称 x 对应的位于 Y 中的元素 y 为 x 在映射 f 下的像,记为 $f(x)$. 若 $f(x)=y$,此时也称 x 为 y 的一个逆像或原像. 集合 X 称为映射 f 的定义域,记为 D_f,所有 X 中元素在映射 f 作用下的像的全体构成的集合称为映射 f 的值域,记为 R_f,即
$$R_f=\{y\mid y\in Y,\text{存在 } x\in X,\text{使得 } f(x)=y\}.$$
给定一个映射 $f:X\to Y$. 对于 X 的一个子集 A,记
$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\},$$
它是 Y 的一个子集,称之为 A 在映射 f 下的像. 对于 Y 的一个子集 B,记
$$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\},$$
它是 X 的一个子集,称之为 B 在映射 f 下的逆像或原像.

构成一个映射有三个要素，即映射的定义域 X，映射的值域所在的集合 Y，以及对应规则 f. 特别要注意两点：(1) 映射要求元素的像是唯一确定的；(2) 映射并不要求 Y 中元素的原像是唯一确定的.

设 f 和 g 都是集合 X 到集合 Y 的映射，如果任取 $x\in X$，都有 $f(x)=g(x)$，则称映射 f 和 g 相等，记为 $f=g$.

下面回顾映射的复合和取逆两种运算. 给定两个映射 $g:X\to Y$，$f:Y\to Z$，则可以构造一个从 X 到 Z 的对应关系

$$x\mapsto g(x)\mapsto f(g(x))$$

这个对应关系给出了一个从 X 到 Z 的映射，称之为映射 f 与映射 g 的复合，记为 $f\circ g$. 即

$$f\circ g:X\to Z$$
$$x\mapsto z=f(g(x)).$$

定义 1.2.2 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射，如果对于 X 中的任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为一个单射. 如果对于任意的 $y\in Y$，在映射 f 下都有原像，则称 f 为一个满射. 如果映射 f 既是一个单射又是一个满射，则称 f 为一个双射或一一映射.

设 $f:X\to Y$ 是一个双射，则对于任意的 $y\in Y$，存在一个唯一确定的 $x\in X$，使得 $f(x)=y$ 成立. 此时可以由如下对应关系确定一个从集合 Y 到集合 X 的映射

$$g:Y\to X$$
$$y\mapsto x\text{（其中 }f(x)=y\text{）}.$$

这个从集合 Y 到集合 X 的映射 g 称为映射 f 的逆映射，记为 $g=f^{-1}$. 一个双射也可以视为一个存在逆映射的映射，因此双射也称为可逆映射.

当 $f:X\to Y$ 是一个可逆映射时，设 $g=f^{-1}$ 是它的逆映射，则不难发现：(1)任取 $y\in Y$，有 $f\circ g(y)=y$；(2)任取 $x\in X$，有 $g\circ f(x)=x$，这是一个从 X 到 X 自身的特殊映射，它把 $x\in X$ 映到它自己，我们把这种映射记为 I_X，称之为集合 X 上的恒同映射或恒等映射. 因此总有

$$f\circ f^{-1}=I_Y,\ f^{-1}\circ f=I_X$$

成立.

当 f 是集合 X 到自身的映射时，则可以记

$$f^1=f$$
$$f^2=f\circ f$$
$$f^3=f^2\circ f=f\circ f\circ f$$
$$\cdots$$
$$f^n=f^{n-1}\circ f=f\circ f\circ\cdots\circ f\ (n\in\mathbb{N}^*\text{，其中有 }n\text{ 个 }f).$$

若 f 还是集合 X 到自身的一一映射，则记号可推广到一般的 $n\in\mathbb{Z}$

$$f^{-n}=(f^{-1})^n\text{（其中 }n\in\mathbb{N}^*\text{）}.$$

我们称 f^n 为 f 的 n 次迭代.

1.2.2 函 数

如果一个映射 $f:X\to Y$ 满足 $X\subseteq\mathbb{R}$，$Y\subseteq\mathbb{R}$，则称这样的映射为一元实函数，简称为函数. 对于一个函数 $f:X\to Y$，定义域 X 中的元素 x 称为自变量，Y 中的元素 y 称为因变量. 对于可

逆的函数,我们又称它的逆映射为它的反函数.

两个函数之间除了之前定义的复合运算之外,还可以定义四则运算. 设函数 f 的定义域为 D_f,函数 g 的定义域为 D_g. 定义函数

$$f+g: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)+g(x)$$

称为函数 f 和函数 g 的和. 定义函数

$$f-g: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)-g(x)$$

称为函数 f 和函数 g 的差. 定义函数

$$f \cdot g: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

称为函数 f 和函数 g 的积. 定义函数

$$\frac{f}{g}: (D_f \cap D_g) \backslash g^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

称为函数 f 和函数 g 的商.

下面我们回顾函数的单调性、周期性和奇偶性.

给定一个函数 $f: D_f \to \mathbb{R}$. 如果对任意的 $x, y \in D_f$,当 $x<y$ 时总有 $f(x) \leqslant f(y)$,则称 f 为一个单调递增函数. 如果当 $x<y$ 时总有 $f(x) \geqslant f(y)$,则称 f 为一个单调递减函数. 若当 $x<y$ 时总有 $f(x)<f(y)$,则称 f 为一个严格单调递增函数. 若当 $x<y$ 时总有 $f(x)>f(y)$,则称 f 为一个严格单调递减函数. 如果一个函数是可逆的,则它的反函数与它有相同的单调性.

一元函数还可以讨论周期性. 给定函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,如果存在正数 T,使得

$$f(x+T)=f(x)$$

对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 成立,则称 f 为周期函数,T 称为函数的周期. 满足上述条件的最小的正数 T(若这样的数存在的话),我们称之为 f 的最小正周期.

给定一个函数 $f: D_f \to \mathbb{R}$,它的定义域在数轴上关于原点对称. 如果任取 $x \in D_f$,均有 $f(-x)=-f(x)$,则称 f 为奇函数. 如果任取 $x \in D_f$,均有 $f(-x)=f(x)$,则称 f 为偶函数.

在数学中,人们经常使用图形来辅助研究函数的性质. 给定一个一元函数 $f: D_f \to \mathbb{R}$. 我们将平面 $\mathbb{R}^2$ 上的集合 $\{(x, y) \mid x \in D_f, f(x)=y\}$ 称为 f 的图像. 在平面上,可逆函数 f 的图像与它的逆 f^{-1} 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

在中学阶段我们已经接触过下面这几类函数:

(1) 常值函数: $f(x) \equiv C$,其中 C 为常数;

(2) 幂函数: $f(x)=x^\mu$,其中 μ 为给定的常数;

(3) 指数函数: $f(x)=a^x$,其中 $a>0, a \neq 1$ 为给定的常数;

(4) 对数函数: $f(x)=\log_a x$,其中 $a>0, a \neq 1$ 为给定的常数;

(5) 三角函数：$f(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$，$f(x)=\tan x$ 等.

在这些函数中一般幂函数的反函数仍然为幂函数，指数函数的反函数为对数函数，对数函数的反函数为指数函数. 对于三角函数而言，如果我们对它们的定义域加以限制，则也存在反函数. 例如正弦函数 $f(x)=\sin x$，当我们把它的定义域限制在一个单调的区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上时，它是到值域 $[-1,1]$ 的一个一一映射（我们将在第三章中使用连续函数的性质得到这一点）. 即函数

$$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$
$$x\mapsto\sin x$$

是一个可逆的函数. 我们将它的反函数记为 $y=\arcsin x$，称之为反正弦函数. 易知 $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 对于任意的 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，有

$$\arcsin(\sin x)=x;$$

对于任意的 $y\in[-1,1]$，有

$$\sin(\arcsin y)=y.$$

类似地，将余弦函数 $f(x)=\cos x$ 的定义域限制在一个单调的区间 $[0,\pi]$ 时，它也是一个可逆函数，我们将它的反函数记为 $y=\arccos x$，称为反余弦函数. 易知 $\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，且有

$$\arccos(\cos x)=x,x\in[0,\pi],$$
$$\cos(\arccos y)=y,y\in[0,1].$$

将正切函数 $f(x)=\tan x$ 的定义域限制在单调区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，也可得反函数，将这个反函数记为 $y=\arctan x$，称为反正切函数. 反正切函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 且有

$$\arctan(\tan x)=x,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\tan(\arctan y)=y,y\in(-\infty,+\infty).$$

还可以定义余切函数的反函数 $y=\operatorname{arccot} x$，称为反余切函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$. 由此我们得到了一类新的函数：

(6) 反三角函数：$f(x)=\arcsin x$，$f(x)=\arccos x$，$f(x)=\arctan x$ 等.

以上六类函数称为基本初等函数，基本初等函数经有限次复合或四则运算后形成的能用一个式子表示的函数称为初等函数. 给出一个初等函数之后，如果我们没有特意指定其定义域，那么表示取它的定义域为自然定义域，即使得这个式子有意义的所有自变量的全体构成的集合.

例 1.2.1 求下列初等函数的定义域与值域.

(1) $y=\sqrt{\cos x-1}$，　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

解 (1) 当且仅当 $\cos x-1\geqslant 0$ 时函数有定义,不难求出函数的定义域为

$$D=\{x \mid x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\},$$

值域为

$$R=\{0\}.$$

(2) 当且仅当 $x^2-3x+2>0$ 时函数有定义,不难求出函数定义域为

$$D=(-\infty,1)\cup(2,+\infty),$$

值域为

$$R=(0,+\infty).$$

例 1.2.2 设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$,求 $f^n(x)$.

解 经计算可得

$$f^2(x)=f(f(x))=f(ax+b)=a^2x+(a+1)b;$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f(a^2x+(a+1)b)=a^3x+(a^2+a+1)b.$$

由数学归纳法可证明,对一般的 $n>0$,有

$$f^n(x)=a^nx+(a^{n-1}+\cdots+a+1)b.$$

通过解方程不难算出 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}=a^{-1}x-a^{-1}b$,因此由上述可得 $n>0$ 时,

$$f^{-n}(x)=a^{-n}x-(a^{-(n-1)}+\cdots+a^{-1}+1)a^{-1}b.$$

上面两个例子中的函数都是初等函数,下面给出几个常用的非初等函数.

例 1.2.3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}.$$

例 1.2.4 取整函数 $y=[x]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

例 1.2.5 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}.\end{cases}$$

例 1.2.6 黎曼函数

$$y=R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q} \text{ 时,其中 } p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*, (p,q)=1,\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}.\end{cases}$$

前面所举的例子有个共同之处是函数形式均表示成了 $y=f(x)$,即把因变量 y 放在等式的左边,而等式的右边是一个仅含有自变量 x 的解析表达式,这种表示函数的方式,称为函数的显式表示. 还有一些其他表示函数的方法,例如还可以使用方程来描述自变量和因变量的对应关系:给定一个方程 $F(x,y)=0$,在一定的条件下,对于每个自变量 x,有唯一的因变量 y 与之对应,使得 $F(x,y)=0$ 成立,此时可以用方程 $F(x,y)=0$ 来描述这个对应关系,这种表示函数的方式,称之为函数的隐式表示. 通过这种方程给出的函数又称为隐函数.

例 1.2.7 圆的标准方程 $x^2+y^2=R^2$ 反映了变量 x 与变量 y 的特定关系. 当不对变量