普通高等教育"十三五"规划教材

应用数学分析基础（第一册）
一元函数微分学

主　编　叶仲泉
副主编　曹术存

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

应用数学分析基础(第一册)

一元函数微分学

主　编　叶仲泉
副主编　曹术存

科学出版社
北京

内 容 简 介

应用数学分析基础是在重庆大学"高等数学"课程教材体系改革试点工作的配套讲义的基础上历经 20 多年修订而成的，与传统高等数学教材相比，本书不仅注重让学生理解、掌握高等数学的内容，同时也强调培养学生实事求是的科学态度、严谨踏实的科学作风和追根究底的科学精神.

全书共分四册，本册为一元函数微分学，主要内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用三章，各节均配有习题，各章末配有总习题.

本书可供普通高等院校工科各专业学生作为教材使用，也可供相关科技人员作为参考资料.

图书在版编目（CIP）数据

应用数学分析基础. 第一册，一元函数微分学 / 叶仲泉主编. —北京：科学出版社，2019.9

普通高等教育"十三五"规划教材

ISBN 978-7-03-062285-3

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①叶…　Ⅲ. ①微分学–高等学校–教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 193801 号

责任编辑：王胡权 / 责任校对：杨聪敏

责任印制：张　伟 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2019 年 9 月第 一 版　开本：720×1000　1/16

2019 年 10 月第二次印刷　印张：13

字数：267 000

定价：39.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

高等数学的教学是大学教育十分重要的组成部分，是大部分专业必修的先期课程. 虽然当下已有很多不同的高等数学教材，但经过多年高等数学的教学工作，我们仍然感到，关于高等数学的教材，应该做一些新的努力.

我们认为：教育是通过授业、解惑、传道来塑造人的，从而使受教育者获得服务社会的愿望与能力，并具备尽可能完整的人格. 授业是指使受教育者获得服务社会的技术与技巧(而不是增强与他人竞争的能力)；解惑是指启发受教育者发现新事物并追究事物的真相(而不仅仅是理解前人对事物的认知)；传道是指使受教育者理解自然的法则、社会的法则、生命的真谛、做人的道理及如何才能拥有一个幸福的人生. 孟子在《大学》的开篇就说："大学之道，在明明德，在亲民，在止于至善. ""明明德"就是具有光明正大的品德，"止于至善"就是具有完整的人格. "古之欲明明德于天下者，先治其国；欲治其国者，先齐其家；欲齐其家者，先修其身；欲修其身者，先正其心；欲正其心者，先诚其意；欲诚其意者，先致其知，致知在格物. "简单地说，就是：格物以致知，致知后心正，心正才能修身，从而完善自己的人格.

我们认为：授业、解惑、传道三者之间是相互关联的，而其中的关键在于解惑. 科学的任务就是发现新事物并追究事物的真相，即解惑，是授业、传道的基础. 科学教育的任务则是让受教育者了解前人对事物真相的认知，并培养其实事求是的科学态度、严谨踏实的科学作风、追根究底的科学精神，使其在前人的基础上能够不断创新. 科学态度、科学作风、科学精神三者之间相互影响、相互促进，它们的培养可以养成受教育者终身学习、向一切事物学习的习惯，既读有字之书，也读无处不在的无字之"书"，从而形成科学的世界观、人生观及价值观，对事物有真知灼见，不被假象迷惑、不为谣言左右. 所以通过科学的学习培养起学习者实事求是的科学态度、严谨踏实的科学作风、追根究底的科学精神比学习知识本身更加重要.

高斯说过："数学是科学的皇后. "众所周知，数学是其他科学的基础，而且高等数学是大多数大学生都必须学习的课程，从这个意义上说高等数学的教育最能够实现"授业、解惑、传道"的目标. 至少，编者作为数学教育工作者的看法是

这样的.

高等数学作为应用数学的基础, 首先要培养的是学习者掌握数学作为科学语言的功能, 即微积分学, 这是这套《应用数学分析基础》教材第一册到第三册的内容. 同时我们也希望在这套《应用数学分析基础》教材里展示数学解决实际问题的整个过程, 所以在第四册里介绍了数学模型及数学模型的求解问题.

第一册主要内容为一元函数的微分学, 首先介绍研究的对象——函数, 然后介绍研究函数的主要工具——极限理论, 最后利用极限理论来研究函数的性质, 即一元函数的微分学.

第二册研究如何表达及计算分布在一个闭区间上的量, 即一元函数积分学的内容. 另外研究了利用一元函数的微分学建立数学模型并求解的一些例题, 即常微分方程的内容.

第三册为多元函数的微积分学, 前半部分利用多元函数的极限理论来研究多元函数的性质, 即多元函数的微分学. 后半部分研究如何表达及计算分布在比闭区间更复杂的几何体上的量, 即多元函数的积分学.

第四册包括场论、建立数学模型的基本原理、建模的过程、数学模型解的存在范围及求解数学模型的基本思想和方法.

我们编写这套《应用数学分析基础》, 作为高等数学的教材, 是希望实现以下目标的一种尝试.

1. 强调培养学生实事求是的科学态度、严谨踏实的科学作风、追根究底的科学精神, 使学生更好地掌握数学知识, 扩大视野, 进而影响其世界观、人生观、价值观, 真正使数学教育达到育人的目的.

2. 希望学生通过这套教材的学习, 能够了解数学学科在科学研究中的地位、"高等数学" 在数学学科中的地位, 了解他们现在学习 "高等数学" 对今后的学习及工作有极其重要的意义. 让教材与现代数学内容有更好的连接, 使学生有更加广阔的科学视野.

3. 在编写教材的过程中不追求对每一个概念都有严格的定义, 也不追求对每个定理的严格证明, 但对没有严格定义的概念要有交代, 对没有严格证明的定理要指出, 使学生尽量避免"理所当然"的惯性思维, 培养他们追根究底的科学精神. 对于没有证明的定理和没有解决的问题, 适当地介绍相关的书籍, 给对自己有更高要求的学生以引导.

4. 让学生了解数学科学的功能在科学研究中实现的过程, 使学生在以后的工作中敢用数学、会用数学.

5. 将几何、代数、分析学尽量统一起来编写，让学生更好地了解不同数学分支之间的内在联系，加深他们对数学概念的理解，提高教学效率.

由于编者水平有限，加之时间仓促，不当及疏漏之处在所难免，恳请同行及读者不吝赐教！

编　者

2019 年 3 月于重庆大学

目　　录

第一章　函数与极限

微积分的产生是人类科学史上的一件大事，它是科学发明史上最精彩的篇章之一，是科学思想的宝库. 300 多年前，受力学、天文学的启发，牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)发明了微积分，到 19 世纪微积分已经成为天体力学、弹性力学、电磁学和统计物理学强有力的工具. 到目前，微积分在数学、物理学、工程学以及生物学等方面已经显示出了强大的威力.

高等数学以经典微积分为主要内容. 如果将整个数学知识比作一棵大树，则初等数学是树根，名目繁多的数学分支是树枝，而高等数学就是树干. 高等数学是一门基础理论课，许多数学分支是在它的基础上发展起来的，学好这门课程，对以后学习其他数学分支以及专业课都会起重要的作用；高等数学的方法和概念来源于物理现实和直观几何，是应用的重要工具，它对工程技术的重要性就像望远镜之于天文学，显微镜之于生物学一样.

微积分是研究函数的行为、性质和应用的数学学科，它的基本内容为：极限论、微分学和积分学. 微分学研究函数的性质，积分学可以用来表达及计算几何体上的非均匀分布量，而极限论是整个微积分的基础，也是研究函数的基本手段和方法. 正确理解微积分的基本概念以及由此产生的极其丰富的成果，学好微积分首先需要对函数的概念和极限的概念有深刻的认识.

第一节　集合与映射

一、集合的意义与概念

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的学科. 一个量可能有不同的状态，比如自由落体这一事物，时间为与其相关的一个量，而时间有 1 秒、3 秒、4.5 秒等不同的状态. 一个量的不同状态称为一个对象，将具有某些共同特定性质的对象全体称为一个**集合**，这些对象称为该集合的元素. 在20世纪20年代就已确立了集合论在现代数学理论中的基础地位，现代数学的各个分支的几乎所有结果都建立在严格的集合理论上.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，就说 a

不属于 A, 记作 $a \notin A$. 如果一个集合的元素只有有限多个, 则称该集合为有限集, 否则称为无限集.

全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$, 全体正实数构成的集合记为 $\mathbf{R}^+$, 全体自然数(即非负整数)构成的集合记为 $\mathbf{N}$, 全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$, 全体正整数的集合记为 $\mathbf{N}^+$ (或者 $\mathbf{N}^*$), 全体复数的集合记为 $\mathbf{C}$.

表示集合的方法有两种: 枚举法和描述法.

枚举法就是将集合中的元素一一列出, 如 $A=\{a,b,c,d\}$.

描述法就是用集合所有元素的共同属性来表示集合. 假设 S 是具有性质 P 的元素构成的集合, 则可以采用 $S=\{x|x\text{具有性质}P\}$ 这样的方法来表示集合. 如有理数集 $\mathbf{Q}$ 可以表示为 $\mathbf{Q}=\left\{x\middle|x=\dfrac{q}{p},\text{其中}p\in\mathbf{N}^+\text{并且}q\in\mathbf{Z}\right\}$; 正实数集 $\mathbf{R}^+$ 可以表示为 $\mathbf{R}^+=\{x|x\in\mathbf{R},\text{并且}x>0\}$.

值得注意的是, 集合中的元素之间没有次序关系.

不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$.

如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素, 则称集合 A 为集合 B 的子集, 记为 $A\subset B$, 规定空集是任何集合的子集. 如果集合 A 为集合 B 的子集, 且集合 B 为集合 A 的子集, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A=B$. 可以证明 n 个元素构成的集合 $T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 共有 2^n 个子集.

二、集合的运算

集合的基本运算包括并、交、差、补四种.

两个集合 A 与 B 的**并**是由 A 与 B 的所有元素组成的集合, 记为 $A\cup B$, 即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\}.$$

两个集合 A 与 B 的**交**是由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合, 记为 $A\cap B$, 即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{且}x\in B\}.$$

两个集合 A 与 B 的**差**是由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 记为 $A\setminus B$, 即

$$A\setminus B=\{x|x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

我们将研究某一问题时所考虑对象的全体称为全集, 并用 I 表示, 设 $A\subset I$, 集合 A 关于集合 I 的**补集** A^c 定义为 $A^c=I\setminus A$.

集合的并、交、差、补运算具有如下性质:

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

对偶律　$(A\cup B)^{\mathrm{c}}=A^{\mathrm{c}}\cap B^{\mathrm{c}},(A\cap B)^{\mathrm{c}}=A^{\mathrm{c}}\cup B^{\mathrm{c}}$.

以上这些性质都可以根据集合相等的定义验证.

三、笛卡儿乘积集合

集合 A 与 B 的**笛卡儿**(Descartes)**乘积集合** $A\times B$ 定义为

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\text{且}y\in B\}.$$

当 A 与 B 都是实数集 $\mathbf{R}$ 时, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 表示 xOy 平面上全体点的集合, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$; 同理可知 $\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 表示的是空间直角坐标系.

例 1.1　设

$$A=\{x|x\in\mathbf{R},\text{且}a\leqslant x\leqslant b\},$$

$$B=\{y|y\in\mathbf{R},\text{且}c\leqslant y\leqslant d\},\quad C=\{z|z\in\mathbf{R},\text{且}e\leqslant z\leqslant f\}.$$

则 $A\times B$ 表示平面上一个闭矩形, $A\times B\times C$ 表示空间中的一个闭长方体.

四、映射的意义与概念

映射是两个集合的元素与元素之间的联系方式, 是现代数学中非常重要和基本的概念.

定义 1.1 (映射)　设 A 与 B 为两个非空集合. 如果对每个 $x\in A$, 按照某种确定的法则 f, 有唯一确定的 $y\in B$ 与它对应, 则称 f 为从 A 到 B 的一个**映射**, 记作

$$f:A\to B\text{或}f:x\to y=f(x),$$

其中, 称 y 为 x 在映射 f 下的**象**, 称 x 为在映射 f 下的一个**原象(逆象)**, 集合 A 称为映射 f 的定义域, 记为 $D(f)$ 或 D_f. 集合 A 中所有元素 x 的象构成的集合称为映射 f 的值域, 记为 $R(f)$ 或 R_f, 即

$$R(f)=R_f=\{y|y=f(x),x\in A\}.$$

映射的定义中有两个基本要素: 定义域和对应法则. 定义域限制映射存在的范围, 对应法则是 A 中元素确定 $R(f)$ 中对应元素 y 的方法.

映射也称为**算子**. 若 $B\subset\mathbf{R}$, 则称映射 $f:A\to B$ 为**泛函**; 若 $A,B\subset\mathbf{R}$, 则称映射 $f:A\to B$ 为后面要研究的**函数**. 若映射将 A 中的每个元素都映射为自身, 则称它为 A 上的恒等映射或单位映射, 记作 I_A 或 I, 即对任意 $x\in A$, $Ix=x$.

有两点值得注意: 映射要求元素的象必须是唯一的; 映射并不要求原象具有

唯一性.

若 $R(f)=B$, 则称 f 是**满射**; 若对每个 $y\in R(f)$ 都存在唯一的原象 $x\in A$, 则称 f 是**单射**; 若 f 既是满射又是单射, 则称 f 是从 A到B 的**一一映射**.

例 1.2 设 $A=\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}, B=\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$, 令

$$f:n\to 2n,\quad n\in A,$$

则 f 是从 A 到 B 的一一映射, 即偶数集与正整数集是一一对应的, 这是一件很神奇的事情, 因为表面上看感觉偶数比正整数要少得多. 能与自己的真子集建立一一对应的关系是无限集的一个重要特性, 而一一映射是研究无限集元素的个数的多少以及比较两个无限集所含元素多少的基本工具.

第二节 实数集与函数

一、实数集的意义与实数集的完备性

微积分讨论实变量之间的函数关系, 即自变量和因变量的取值范围都是限制在实数范围内的, 实数集的一个基本性质——实数集的完备性(或者连续性)是数学分析的基础.

1. 数系的发展

实分析中用到的各种数系有: 自然数系 $\mathbf{N}$、整数系 $\mathbf{Z}$、有理数系 $\mathbf{Q}$、实数系 $\mathbf{R}$.

人类对数的认识是从自然数开始的, 自然数系对加法运算和乘法运算是封闭的, 即任何两个自然数相加和相乘都是自然数, 但对减法运算和除法运算不封闭, 即两个自然数之差或之商不一定是自然数.

当自然数系扩充到整数系后, 对加法、减法和乘法运算都是封闭的, 但对除法运算不封闭, 即两个整数之商不一定是整数. 于是将整数系扩充到有理数系 $\mathbf{Q}=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{q}{p},\text{其中}p\in\mathbf{N}^+\text{并且}q\in\mathbf{Z}\right\}$, 显然有理数系对加法、减法、乘法和除法(除数不为零)都是封闭的.

我们从几何直观来分析一下. 一条规定了原点和单位长度的有向直线, 称为**坐标轴**. 在坐标轴上, 整数集的每一个元素都能找到自己对应的位置, 这些点称为整数点, 整数点之间的距离至少为 1, 所以称整数系具有"离散性". 同样, 有理数集的每一个元素也能在坐标轴上找到对应的点, 称为**有理点**.

命题 2.1 (有理数被有理数隔开) 设 x 和 y 是两个有理数, 且 $x<y$, 则存在有

理数 z, 使得 $x<z<y$.

证明　令 $z=\dfrac{x+y}{2}$ 即得证.

该命题说明任何两个有理数之间至少有一个有理数, 从而容易知道任何两个有理数之间有无限多个有理数, 这就说明有理数在坐标轴上的分布是密密麻麻的, 它的这种特性称为“稠密性”. 表面上看来, 有理数集已经很完美了.

但是有理数集并不完美, 它并没有填满整条直线, 其中留有许多“空隙”或“洞”, 虽然这种稠密性保证在一定意义上这些洞是无限小的. 如图 1.1, 用 c 表示边长为 1 的正方形的对角线的长度, 则 $c^2=2$, 即 $c=\sqrt{2}$, 容易证明 $\sqrt{2}$ 不是一个有理数. 所以 $\sqrt{2}$ 就位于有理数点留下的“空隙”中.

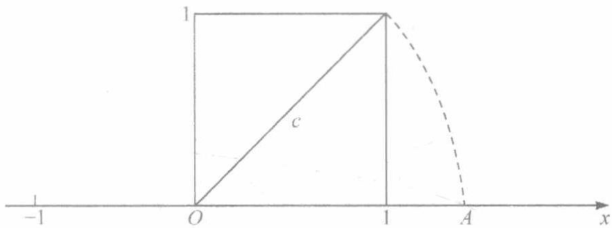

图 1.1

另一方面, 我们可以得到任意接近 $\sqrt{2}$ 的有理数.

命题 2.2　对于每个有理数 $\varepsilon>0$, 都存在一个非负的有理数 x, 使得

$$x^2<2<(x+\varepsilon)^2.$$

证明　假设不存在非负的有理数 x 满足 $x^2<2<(x+\varepsilon)^2$, 这说明只要 x 不是负的且 $x^2<2$, 必定也有 $(x+\varepsilon)^2<2$, 由此推出 $(x+2\varepsilon)^2<2,\cdots,(x+n\varepsilon)^2<2,\cdots$, 其中 $n\in\mathbf{N}^+$, 从而 $\varepsilon^2<2,(2\varepsilon)^2<2,\cdots,(n\varepsilon)^2<2,\cdots$, 即对一切正整数 n, 都有 $(n\varepsilon)^2<2$, 但这不可能. 这个矛盾完成了证明.

例 2.1　对于命题 2.2, 若 $\varepsilon=0.001$, 则可取 $x=1.414$, 因为 $x^2=1.999396$, $(x+\varepsilon)^2=2.002225$.

于是我们好像可以用有理数序列的“极限”来逼近 $\sqrt{2}$, 如

$$1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad 1.4142,\quad 1.41421,\quad \cdots.$$

这其实是构造实数的一种思想.

2. 实数集的完备性

注意到有理数一定能表示成有限小数或者无限循环小数, 扩充有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的最自然的方式是将无限不循环小数(称为**无理数**)添加进来. 我们将全体有理数

和全体无理数所构成的集合称为实数集 **R**:

$$\mathbf{R}=\{x|x\text{是有理数或者无理数}\}.$$

实数“布满”了坐标轴, 即实数集 **R** 与坐标轴上的所有点是一一对应的. 实数集的这种特性称为实数集的**完备性**或实数集的**连续性**. 实数集的连续性是实分析的坚实基础.

实数集的连续性有多种等价的表达方式, 本节将要介绍的“确界存在定理”就是实数集的连续性的表述之一.

3. 最大数与最小数

为表述方便, 引入两个记号: 用“$\forall$”表示“对任意的”, “$\exists$”表示“存在”.

设 S 是一个非空实数集, 如果 $\exists M\in S$, 使得 $\forall x\in S$, 都有 $x\leqslant M$, 则称 M 是数集 S 的最大数, 记为 $M=\max S$; 如果 $\exists m\in S$, 使得对 $\forall x\in S$, 都有 $x\geqslant m$, 则称 m 是数集 S 的最小数, 记为 $m=\min S$. (“max”是 maximize 的缩写, 表示“最大的”; 类似地, “min”是 minimize 的缩写, 表示“最小的”.)

当 S 为有限集(S 中只包含有限多个实数)时, 显然 $\max S$ 与 $\min S$ 一定存在; 但当 S 为无限集时, $\max S$ 或 $\min S$ 就不一定存在, 如 $S=[0,1)$ 有最小数 0, 但无最大数.

4. 上确界与下确界

定义 2.1 (集合的有界性) 设 S 是一个非空实数集, 如果 $\exists L\in\mathbf{R}$, 使得对 $\forall x\in S$, 都有 $x\leqslant L$, 则称 L 是数集 S 的一个上界; 如果 $\exists l\in\mathbf{R}$, 使得对 $\forall x\in S$, 都有 $x\geqslant l$, 则称 l 是数集 S 的一个下界. 若数集 S 既有下界又有上界, 则称 S 为有界集.

容易证明, S 为有界集 $\Leftrightarrow\exists M\in\mathbf{R},M>0$, 使得 $\forall x\in S$, 都有 $|x|\leqslant M$.

例 2.2 $S=\{x|x=\cos t,0\leqslant t\leqslant\pi\}$ 是一个有界数集, $L=1$ 是它的一个上界, 且任何大于 1 的实数都是它的上界, 从而它有无穷多个上界; $l=-1$ 是它的一个下界, 且任何小于 -1 的实数都是它的下界, 从而它有无穷多个下界.

例 2.3 $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots\right\}$ 是一个有界集, $L=\frac{1}{2}$ 是它的一个上界, $l=0$ 是它的一个下界, 且它的上界和下界都有无穷多个.

一个很自然的问题是: 在有上界的数集的无穷多个上界中, 有没有最小的上界? 在有下界的数集的无穷多个下界中, 有没有最大的下界? 如果有, 则最小的上界或最大的下界就特别重要.

定义 2.2 (上确界) 设 S 是一个非空实数集, 如果实数 β 满足:

(1) β 是数集 S 的一个上界, 即对 $\forall x \in S$, 都有 $x \leqslant \beta$;

(2) 任何小于 β 的实数都不是数集 S 的上界: $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S$, 使得 $x > \beta - \varepsilon$, 则称 β 为数集 S 的**上确界**(最小的上界), 记为 $\beta = \sup S$.

定义 2.3 (下确界) 设 S 是一个非空实数集, 如果实数 α 满足:

(1) α 是数集 S 的一个下界, 即对 $\forall x \in S$, 都有 $x \geqslant \alpha$;

(2) 任何大于 α 的实数都不是数集 S 的下界: $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S$, 使得 $x < \alpha + \varepsilon$, 则称 α 为数集 S 的**下确界**(最大的下界), 记为 $\alpha = \inf S$.

定理 2.1 (确界存在定理——实数系连续性定理) 非空有上界的实数集必有上确界, 并且其上确界是唯一的; 非空有下界的实数集必有下确界, 并且其下确界是唯一的.

证明 任何一个实数都可以表示为

$$x = [x] + (x),$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分, (x) 表示 x 的非负小数部分. 我们可以将 (x) 表示为无限小数的形式

$$(x) = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots,$$

其中 $\alpha_i \in \{0,1,2,3,\cdots,9\}, i = 1,2,\cdots$. 若 (x) 是有限小数, 则在后面接上无限个零.

设 S 为非空有上界的实数集, 则 S 中元素的整数部分的最大值一定存在(否则与 S 有上界矛盾), 设为 α_0, 记

$$S_0 = \{x \mid [x] = \alpha_0 \text{ 且} x \in S\},$$

显然 S_0 为非空集合, 而且 $\forall x \in S$, 只要 $x \notin S_0$, 就有 $x < \alpha_0$.

又设 S_0 中元素的第一位小数数字中的最大值为 α_1, 且记

$$S_1 = \{x \mid x \in S_0, \text{ 且 } x \text{ 的第一位小数为 } \alpha_1\},$$

同样 S_1 为非空集合, 而且 $\forall x \in S$, 只要 $x \notin S_1$, 就有 $x < \alpha_0 + 0.\alpha_1$.

一般地, 设 S_{n-1} 中元素的第 n 位小数数字中的最大值为 α_n, 且记

$$S_n = \{x \mid x \in S_{n-1}, \text{ 且 } x \text{ 的第 } n \text{ 位小数为 } \alpha_n\},$$

同样 S_n 为非空集合, 而且 $\forall x \in S$, 只要 $x \notin S_n$, 就有 $x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.

这样一直下去, 我们得到一列非空数集 $S \supset S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_n \cdots$ 和一列数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 满足

$$\alpha_0 \in \mathbf{Z};$$

$$\alpha_i \in \{0,1,2,3,\cdots,9\}, \quad i = 1,2,\cdots.$$

令 $\beta = \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$, 下面证明 β 即非空实数集 S 的上确界.

(1) $\forall x \in S$, 要么存在非负整数 n_0, 使得 $x \notin S_{n_0}$, 此时 $x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n_0} \leqslant \beta$; 要么对任何非负整数 n, 有 $x \in S_n$, 由 S_n 的定义知此时 $x = \beta$. 所以 $\forall x \in S$, 有

$x \leqslant \beta$, 即 β 为非空实数集 S 的上界.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 可以将正整数 n_0 取得充分大, 便有

$$\frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon.$$

取 $x_0 \in S_{n_0}$, 则 β 与 x_0 的整数部分及前 n 位小数是相同的, 故有

$$\beta - x_0 \leqslant \frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon,$$

即 $x_0 > \beta - \varepsilon$. 这就证明了任何小于 β 的数 $\beta - \varepsilon$ 都不是数集 S 的上界.

同理可证非空有下界的实数集必有下确界.

上(下)确界的唯一性是显然的.

确界存在定理——实数系连续性定理从几何的角度可以解释得较清楚: 如果实数集的全体没有填满数轴而留有“空隙”, 则“空隙”左边的数集就没有上确界, “空隙”右边的数集就没有下确界. 由于有理数集 **Q** 在数轴上留有“空隙”, 所以它就不具备实数集的“确界存在定理”.

二、函数的定义与概念

函数是用数学语言来研究现实世界的主要工具, 也是微积分研究的基本对象, 它研究变量和变量之间的关系.

圆的面积是其半径的函数; 理想气体的压力是密度和温度的函数; 运动着的物体的位置是时间的函数; 圆柱体的体积是其半径和高的函数; 足球比赛的票价是观众所在位置的函数.

上述例子表达了这样一种基本思想: 通过某一事实的信息去推知另一事实, 换句话说, 从一个或者几个变量的值去推知另一变量的值.

定义 2.4 设有两个变量 x 和 y, 变量 x 的变化范围为 $D \subset \mathbf{R}$. 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照某一确定的对应关系, 都可以唯一确定变量 y 的一个相应值, 我们就说变量 y 是变量 x 的一个函数, 记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中, x 称为**自变量**; y 称为**因变量**; 集合 D 称为函数的**定义域**; $f(x)$ 称为 f 在 x 的值, 或者称为 x 在映射 f 下的象; $f(x)$ 的所有可能取值称为 f 的**值域**, 即 $\{f(x) | x \in D\}$.

函数可以看成一种特殊的映射, 即从实数集到实数集的映射. 确定函数的要素有两个: 函数的定义域与对应关系 f.

如果将函数看成一台机器(图 1.2), 而将自变量 x 的取值看成输入, 输入通过机器产生一个输出 $f(x)$. 这样我们可以将定义域看作所有可能输入的集合, 而值