



普通高等教育机电类“十三五”规划教材

现代控制理论与应用

梁全 王洁 苏东海 徐威○编 著

XIANDAI

KONGZHI

LILUN YU YINGYONG

0000 00 0 00 00 00 0 0
0000 0 00 00 00000 0 0
0 0 00 0 0 0 0 0



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育机电类“十三五”规划教材

现代控制理论与应用

梁 全 王 洁 编著
苏东海 徐 威

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

现代控制理论是联系古典控制理论和智能控制理论的纽带，有着承上启下的作用。机械类专业研究生学好现代控制理论，对解决工程实践问题具有重要的指导意义。本书将以线性定常系统为主要研究对象，介绍了系统建模、求解问题，系统的可控性、可观测性和稳定性问题，还介绍了控制系统的校正和最优控制问题。

本书可以作为机械类专业研究生学习现代控制理论的教材，也可以作为机械、电气等行业工程师自学控制理论的参考书。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目 (CIP) 数据

现代控制理论与应用 / 梁全等编著. —北京: 电子工业出版社, 2019.8
ISBN 978-7-121-37092-2

I. ①现… II. ①梁… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 144544 号

责任编辑: 赵玉山 特约编辑: 田学清
印 刷: 北京捷迅佳彩印刷有限公司
装 订: 北京捷迅佳彩印刷有限公司
出版发行: 电子工业出版社
 北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
开 本: 787×1092 1/16 印张: 12.25 字数: 321 千字
版 次: 2019 年 8 月第 1 版
印 次: 2019 年 8 月第 1 次印刷
定 价: 38.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010) 88254556, zhaoy@phei.com.cn。

前 言

现代控制理论以古典控制理论为基础,但又对古典控制理论进行了颠覆性的发展,使控制理论能够解决多变量、非线性、时变的控制系统问题。

当今,人工智能、智能控制正在盛行,其发展前景固然比较乐观,但学习现代控制理论仍然具有其历史和现实意义。一方面,现代控制理论起到了连接古典控制理论和智能控制理论的作用,掌握现代控制理论思想和方法,对理解古典控制理论和智能控制理论都有着至关重要的作用;另一方面,现代控制理论在工业控制中仍然扮演着重要的角色,众多机械、电气设备仍然将现代控制理论作为控制系统设计的主要理论依据,因而,掌握现代控制理论的思想方法是解决工程实践问题、学习更高等级控制理论的基础。基于以上原因,将现代控制理论作为机械类专业研究生的公共基础课,对培养研究生的工程实践能力、建立系统变量的概念、理解控制系统设计与运行原理有极其重要的作用。

当今,很少有机械设备能够脱离电气控制系统独立运行,有效解决该问题的有利工具之一就是现代控制理论。事实上,无论是古典控制理论还是现代控制理论,其本质都是对微分方程的数学描述和其衍生问题的研究。通过学习控制理论,学生能够发现宇宙中的万事万物,小到一粒尘埃,大到整个太阳系;不管是固体、液体还是气体,不管是电磁学还是热力学,不管是电气传动还是流体传动等,都可以用微分方程建立其数学模型。而古典控制理论和现代控制理论正是以这些抽象的微分方程为研究对象,研究这些微分方程的固有特性,探索对其进行求解、优化、校正等人为改造的方法,以使这些微分方程所代表的万事万物按照设计者的设想去工作,实现为人类服务,这就是控制理论的最高境界,也是控制理论存在并蓬勃发展的主要原因。

本书是机械类专业研究生的公共基础课“现代控制理论与应用”的配套教材,笔者在写作过程中,充分考虑到现代控制理论的高度抽象性和机械类专业的特点,力图将晦涩难懂的数学理论变成鲜活的工程实例,真正将控制理论和机械工程实践相结合,使学生学习完本门课程后,真正理解如何以现代控制理论为工具对机械系统、电气系统等实际工程系统进行建模、求解、校正和优化,进而做到学有所用。

基于以上原因,本书各章节的安排如下。第1章为基础知识,主要是为了帮助学生复习作为现代控制理论基础的拉氏变换、矩阵等基础数学知识。第2章为控制系统的状态空间描述,重点解决现代控制理论中的“理论”和机械专业中的工程“实践”脱节的问题,这也是本书最主要的特色;通过对本章的学习,学生能够理解具体机械、电气对象如何建立基于现代控制理论的数学模型,并掌握其方法,为后续学习打下良好基础。第3章为线性控制系统的时域分析,主要介绍第2章建立的数学模型的求解问题。第4章为控制系统的稳定性,阐述控制系统稳定性这一最基本要求的一般性判断准则。第5章为线性控制系统的可控性和可观测性,这属于控制系统的固有特性。第6章为线性定常系统的综合,研究如何优化某一控制系统的性能指标问题。第7章为最优控制,研究如何使某一控制系统的性能指标达到最优;这是全书的结尾章节,也是最重要的章节,学习现代控制理论的最终目的就是要解决类似最优控制工程问题,使理论为实践服务。

本书第1章、第2章、第3章、第7章由沈阳工业大学梁全编写；第4章由沈阳工业大学王洁编写；第5章由沈阳工业大学苏东海编写；第6章由沈阳工业大学徐威编写。全书由梁全统稿。在本书写作过程中，研究生高建文、杨育程、单东升、牛彪参与了部分录入、排版工作。

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，敬请同行专家和广大读者批评指正。

目 录

第 1 章 基础知识	(1)
1.1 拉普拉斯变换	(1)
1.1.1 拉普拉斯变换的基本概念	(1)
1.1.2 拉普拉斯反变换	(5)
1.2 矩阵	(9)
1.2.1 矩阵的定义	(9)
1.2.2 余子式、代数余子式和伴随矩阵	(9)
1.2.3 主子行列式	(10)
1.2.4 矩阵的秩	(10)
1.2.5 矩阵的初等变换	(10)
1.2.6 逆矩阵	(11)
1.3 习题	(13)
第 2 章 控制系统的状态空间描述	(14)
2.1 状态的概念	(14)
2.2 控制系统中状态的基本概念	(15)
2.3 控制系统的状态空间表达式	(15)
2.4 状态空间表达式的一般形式	(17)
2.5 根据系统的物理机理建立状态空间表达式	(18)
2.5.1 机械系统	(18)
2.5.2 电网络系统	(23)
2.5.3 状态变量的选取问题	(29)
2.6 流体系统	(32)
2.6.1 液位系统	(32)
2.6.2 气动系统	(35)
2.6.3 线性化方法	(37)
2.6.4 液压系统	(38)
2.7 根据系统微分方程建立状态空间表达式	(42)
2.7.1 微分方程中不含输入函数导数项	(42)
2.7.2 微分方程中包含输入函数导数项	(43)
2.8 状态空间表达式的图形表示法	(46)
2.8.1 图形表示法的基本元素	(47)
2.8.2 由控制系统的方块图求系统状态方程	(49)
2.9 根据系统的传递函数建立状态空间表达式	(50)
2.9.1 直接法	(51)
2.9.2 零极点法	(56)
2.9.3 并联法	(58)

2.10	系统状态空间表达式与传递函数阵	(64)
2.10.1	由状态空间模型求传递函数阵	(64)
2.10.2	组合系统的状态空间模型和传递函数阵	(66)
2.11	系统状态空间表达式的特征标准型	(70)
2.11.1	系统状态的线性变换	(70)
2.11.2	系统的特征值和特征向量	(71)
2.11.3	将状态方程化为对角线标准型	(73)
2.12	习题	(76)
第3章	线性控制系统的时域分析	(78)
3.1	线性定常齐次状态方程的解	(78)
3.2	状态转移矩阵	(79)
3.2.1	状态转移矩阵的性质	(79)
3.2.2	几个特殊的状态转移矩阵	(79)
3.2.3	状态转移矩阵的计算	(80)
3.3	线性定常非齐次状态方程的解	(85)
3.4	线性时变系统状态方程的解	(87)
3.4.1	线性时变齐次状态方程的解	(88)
3.4.2	线性时变系统的状态转移矩阵	(89)
3.4.3	线性时变系统非齐次状态方程的解	(89)
3.5	习题	(90)
第4章	控制系统的稳定性	(92)
4.1	李雅普诺夫稳定性定义	(92)
4.1.1	平衡状态的定义	(92)
4.1.2	范数的概念	(92)
4.1.3	李雅普诺夫稳定性定义	(93)
4.2	李雅普诺夫稳定性理论	(94)
4.2.1	李雅普诺夫第二法中的二次型函数	(94)
4.2.2	李雅普诺夫第二法	(96)
4.3	线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	(98)
4.3.1	线性定常连续系统	(98)
4.3.2	李雅普诺夫第二法校正线性定常系统	(99)
4.3.3	利用李雅普诺夫函数估算系统动态性能	(101)
4.3.4	利用李雅普诺夫第二法求解参数最优化问题	(105)
4.4	习题	(108)
第5章	线性控制系统的可控性和可观测性	(110)
5.1	线性连续系统的可控性	(111)
5.1.1	时变系统的可控性	(111)
5.1.2	定常系统的可控性	(112)
5.2	线性连续系统的可观测性	(114)
5.2.1	线性时变系统的可观测性	(114)

5.2.2	线性定常系统的可观性	(115)
5.3	对偶原理	(116)
5.3.1	线性系统的对偶关系	(116)
5.3.2	可控性和可观性的对偶关系	(117)
5.4	线性系统的可控标准型和可观测标准型	(117)
5.4.1	可控标准型	(117)
5.4.2	可观测标准型	(119)
5.5	线性系统的结构分解	(122)
5.5.1	系统的可控性分解	(122)
5.5.2	系统的可观性分解	(123)
5.6	习题	(125)
第6章	线性定常系统的综合	(127)
6.1	反馈控制系统的基本结构	(127)
6.1.1	状态反馈和输出反馈	(127)
6.1.2	两种反馈形式的讨论	(128)
6.2	极点配置问题	(129)
6.2.1	状态反馈极点配置定理	(129)
6.2.2	单输入单输出系统状态反馈极点配置方法	(132)
6.3	系统镇定	(136)
6.3.1	状态反馈镇定	(136)
6.3.2	输出反馈镇定	(139)
6.4	解耦控制	(140)
6.4.1	串联解耦	(141)
6.4.2	反馈解耦	(142)
6.5	状态观测器	(148)
6.5.1	全维状态观测器及其设计方法	(148)
6.5.2	降维状态观测器	(153)
6.5.3	带状态观测器的闭环控制系统	(157)
6.6	习题	(161)
第7章	最优控制	(163)
7.1	最优控制的基本概念	(163)
7.1.1	最优控制问题	(163)
7.1.2	静态最优控制	(165)
7.2	最优控制中的变分法	(166)
7.2.1	变分法	(166)
7.2.2	应用变分法求解最优控制问题	(175)
7.3	习题	(184)
参考文献		(185)

第1章 基础知识

在科学技术飞速发展的今天,现代控制理论已经成为现代技术体系不可缺少的内容,已经被广泛地应用于机械、冶金、石油、化工等各个领域。随着现代机械制造业的发展,机械控制工程技术的研究越来越深入且越来越广泛,而现代控制理论正是当今机械控制工程技术的重要组成部分。

为了更好地学习和理解现代控制理论,读者需要先掌握一些基础知识。这些知识包括拉普拉斯变换(以下简称拉氏变换)的基本方法和矩阵理论,这些内容都将在本章进行介绍。

其中,拉氏变换的基本方法是古典控制理论详细介绍的内容,本书默认读者已经具备了这些基础知识。但是考虑到知识的继承性和延续性,我们将在1.1节对拉氏变换的一些基本概念进行简单的复习。

另外,现代控制理论优于古典控制理论的原因之一在于前者可以处理多变量问题。多变量问题必然要求处理多维的变量,这需要用到矩阵理论,所以,我们将在1.2节对矩阵理论进行简单的复习。

1.1 拉普拉斯变换

现代控制理论和古典控制理论有其内在的基本联系,所以,我们先复习一下与古典控制理论相关的拉氏变换的基本知识。

1.1.1 拉普拉斯变换的基本概念

由于拉氏变换涉及复数,所以我们先来复习一下复数的概念。

复数的数学表达式为: $s = \sigma + \omega j$, $\sigma, \omega \in \mathbf{R}$, 其中, j 为虚单位, $j^2 = -1$; σ 称为实部, 用符号表示为 $\sigma = \text{Re}[s]$; ω 称为虚部, 用符号表示为 $\omega = \text{Im}[s]$ 。

以复数为自变量的函数称为复变函数, 如下所示的函数均为复变函数:

$$G(s) = \frac{2s+1}{5s^2+6s+1}$$
$$G(s) = \frac{s-2}{s+3}$$

下面我们介绍与复变函数相关的概念, 即零点和极点的定义。

1. 极点、零点

如果复变函数的定义如式(1.1)所示:

$$G(s) = \frac{k(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad (1.1)$$

则极点定义为使式(1.1)分母为零的复数, 即 $s_1 = -p_1$, $s_2 = -p_2$, 即使 $G(s) \rightarrow \infty$, 那么 s_1 、 s_2 称为复变函数 $G(s)$ 的极点。反之, 使分子为零的点称为零点, 在式(1.1)中, 当 $s = -z$ 时,

$G(s)=0$ ，所以，称 s 为复变函数 $G(s)$ 的零点。

2. 拉氏变换定义

拉氏变换，首先是由法国数学家拉普拉斯提出的，它是一种积分变换。

在控制理论中研究拉氏变换，主要是因为我们把拉氏变换当作一种数学工具，借助这个工具，可以方便地求解微分方程，这对我们研究系统的动态特性很有帮助。

拉氏变换的定义：设函数 $f(t)$ ，在 $[0, +\infty)$ 有定义，且积分 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ (s 为复数) 在 s 的某一域内收敛，则由此积分确定的函数 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ ，称为函数 $f(t)$ 的拉氏变换，记为 $F(s) = L[f(t)]$ 。其中， $f(t)$ 称为原函数， $F(s)$ 称为象函数。

3. 典型时间函数

下面我们来复习一些典型的时间函数及其拉氏变换。掌握这些基本时间函数的拉氏变换，是进行复杂时间函数拉氏变换的基础。

1) 单位阶跃信号

单位阶跃信号的数学表达式如下：

$$x_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

单位阶跃信号的函数图形如图 1-1 所示。

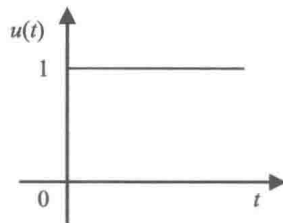


图 1-1 单位阶跃信号的函数图形

根据拉氏变换的定义，单位阶跃信号的拉氏变换为

$$L[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

当幅值不为 1 时，称为阶跃函数。

2) 单位脉冲信号

单位脉冲信号的数学表达式为

$$x_i(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

根据单位脉冲信号的性质，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

所以，有单位脉冲信号的拉氏变换为

$$L[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

单位脉冲信号的函数图形如图 1-2 所示。

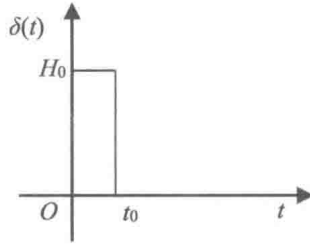


图 1-2 单位脉冲信号的函数图形

其中, $H_0 t_0 = 1$, 即面积 = $H_0 t_0$ 。

3) 单位速度信号 (单位斜坡信号)

单位速度信号的数学表达式为

$$x_i(t) = r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

其拉氏变换为

$$L[r(t)] = \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} t d e^{-st} = \frac{1}{s^2}$$

单位斜坡信号的函数图形如图 1-3 所示。值得说明的是, 当直线的斜率不等于 1 时, 称其为斜坡函数。

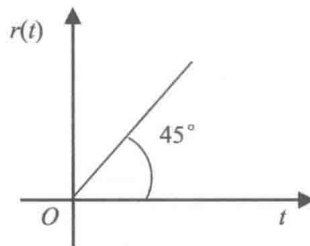


图 1-3 单位斜坡信号的函数图形

4) 指数函数

指数函数的数学表达式为

$$x_i(t) = o(t) = e^{-at}$$

其中, a 为常数。

其拉氏变换为

$$\begin{aligned} L[o(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

5) 单位正弦信号

单位正弦信号的数学表达式为

$$x_i(t) = b(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

其拉氏变换为

$$L[b(t)] = \int_0^{+\infty} \sin \omega t e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

下面给出其证明过程。根据高等数学中的欧拉公式，有

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

可求得

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

由拉氏变换定义，可求得

$$\begin{aligned} L[\sin \omega t] &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} (e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}) dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

根据以上推导，同样可得单位余弦信号的拉氏变换为

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

我们学习典型时间函数的拉氏变换是为了在求解普通函数的拉氏变换时，可以将普通函数转换为典型时间函数，再配合常用的拉氏变换表（见表 1-1），就可以很方便地求解。

表 1-1 常用的拉氏变换表

序号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
9	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega^2}$

4. 拉氏变换的性质

要对普通函数进行拉氏变换, 还需要掌握拉氏变换常见的性质, 下面对其进行简单的总结。

1) 线性性质

已知 α 、 β 为常数, 且 $L[f_1(t)] = F_1(s)$, $L[f_2(t)] = F_2(s)$, 则有

$$L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

2) 微分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则有

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

进一步

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

若 $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ (即当全部初值为 0 时), 则有

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$$

3) 积分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则有

$$L\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{1}{s} f^{-1}(0)$$

若 $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 则有

$$L\left[\int \dots \int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

4) 终值定理

设 $L[f(t)] = F(s)$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在且唯一, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

5) 延迟定理 (位移定理)

设 $L[f(t)] = F(s)$, 如果 $f(t)$ 沿时间轴延迟一个恒值 a , 用 $f(t-a)$ 表示, 则

$$L[f(t-a)] = e^{-as} F(s)$$

6) 卷积定理

已知函数 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$, 函数 $g(t)$ 的拉氏变换为 $G(s)$, 则有

$$L[f(t) * g(t)] = L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

其中, $f(t) * g(t) \triangleq \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, 为 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积。

1.1.2 拉普拉斯反变换

1. 拉氏反变换的基本情况

我们在设计控制系统和分析控制系统的过程中, 有时不仅要某个时间函数进行拉氏变

换, 还可能要进行拉氏变换的逆运算, 即拉氏反变换。但是, 在通常情况下, 用反变换的定义求解比较困难, 所以此处我们不再赘述拉氏反变换的定义, 而是采用常用的变通法, 先把 $F(s)$ 展开成有理分式之和, 然后查表 1-1 求反变换。这需要对极点的不同情况进行讨论。

1) 没有相同极点的情况

已知某复变函数的表达式如式 (1.2) 所示:

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s-p_i} \quad (1.2)$$

其中, 系数 A_i 的计算公式为

$$A_i = (s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \quad (1.3)$$

根据拉氏变换表 1-1 可求得复变函数 $F(s)$ 的拉氏反变换为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

下面我们通过一个例子来说明其使用方法。

【例 1-1】 求象函数 $F(s) = \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}$ 的原函数。

解:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+5} \\ A_1 &= (s-p_1)F(s)\Big|_{s=p_1} = s \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}\Big|_{s=0} = \frac{1}{10} = 0.1 \\ A_2 &= (s-p_2)F(s)\Big|_{s=p_2} = (s+2) \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}\Big|_{s=-2} = \frac{-3}{-6} = 0.5 \\ A_3 &= (s+5) \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}\Big|_{s=-5} = \frac{-9}{-5(-3)} = -0.6 \\ f(t) &= L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{0.1}{s} + \frac{0.5}{s+2} + \frac{-0.6}{s+5}\right] \\ &= 0.1 + 0.5e^{-2t} - 0.6e^{-5t} \end{aligned}$$

2) 有共轭复极点的情况

共轭复极点, 是指复变函数的表达式如式 (1.4) 所示形式:

$$F(s) = \frac{Ms+N}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{M(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{M\alpha+N}{\beta} \frac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \quad (1.4)$$

另外, 已知拉氏反变换有如下形式 (根据表 1-1 常用的拉氏变换表), 有

$$L^{-1}\left[\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}\right] = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad L^{-1}\left[\frac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}\right] = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

则式 (1.4) 的拉氏反变换为

$$f(t) = Me^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{M\alpha + N}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

我们用一个例子来说明其使用方法。

【例 1-2】 $F(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s + 5)}$, 求 $f(t)$ 。

解:

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{Ms + N}{(s-1)^2 + 2^2}, \quad A = sF(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{5}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s + 5)} = \frac{\frac{1}{5}(s^2 - 2s + 5) + Ms^2 + Ns}{s(s^2 - 2s + 5)}$$

解得 $M = -1/5$, $N = 2/5$ 。

$$F(s) = \frac{1/5}{s} + \frac{-\frac{1}{5}(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2} + \frac{-\frac{1}{5} \times 1 + \frac{2}{5}}{2} \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^t \cos 2t + \frac{1}{10} e^t \sin 2t$$

3) 有相同极点的情况

有相同的极点, 是指复变函数的表达式如下式所示:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-q})(s-p_q)^q}$$

其中, q 表示有 q 个相同的根, 所以叫有相同极点。则该复变函数可以表示为

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n-q} \frac{A_i}{s-p_i} + \frac{A_{21}}{s-p_q} + \frac{A_{22}}{(s-p_q)^2} + \cdots + \frac{A_{2q}}{(s-p_q)^q}$$

上式中各未知系数的计算公式如下所示:

$$A_i = (s-p_i)F(s) \Big|_{s=p_i}$$

$$A_{21} = \left\{ \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{(q-1)}}{ds^{(q-1)}} \left[(s-p_q)^q F(s) \right] \right\} \Big|_{s=p_q}$$

$$\vdots$$

$$A_{2q} = (s-p_q)^q F(s) \Big|_{s=p_q}$$

为了说明其使用方法, 我们看下面的例子。

【例 1-3】 $F(s) = \frac{1}{s(s+2)^3(s+3)}$, 求 $f(t)$ 。

解:

$$F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{A_{21}}{s+2} + \frac{A_{22}}{(s+2)^2} + \frac{A_{23}}{(s+2)^3}$$

$$A_1 = sF(s)|_{s=0} = \frac{1}{8 \times 3} = \frac{1}{24}$$

$$A_2 = (s+3)F(s)|_{s=-3} = \frac{1}{3}$$

$$A_{21} = \left\{ \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{s(s+3)} \right] \right\} \Big|_{s=-2} = \left\{ \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3} \right] \right\} \Big|_{s=-2}$$

$$= -\frac{3}{8}$$

$$A_{22} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s(s+3)} \right] \right\} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{4}$$

$$A_{23} = \frac{1}{s(s+3)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{24} + \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{4}t^2e^{-2t}$$

2. 机械系统的微分方程

下面我们通过一个简单的机械系统的例子，来说明拉氏变换和拉氏反变换在控制系统建模和求解中的作用，更详细的内容将在后面章节中介绍。

由小车、弹簧、阻尼器组成的机械系统原理图如图 1-4 所示。其中，小车的质量为 m ；弹簧的刚度为 k ；阻尼器的阻尼比为 c 。

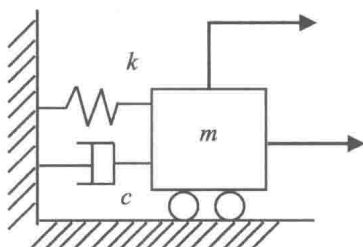


图 1-4 机械系统原理图

首先，介绍阻尼的概念。振动过程中的阻尼力称为阻尼，阻尼力的大小可近似认为与振体速度的一次方成正比，用数学公式表达为

$$R = cv \tag{1.5}$$

其中， c 表示黏性阻尼系数（阻尼比）； R 表示阻尼力； v 表示物体的运动速度。

弹簧弹力的大小符合胡克定律，即

$$f = kx \tag{1.6}$$

其中， f 表示弹簧的弹力； k 表示弹簧的刚度； x 表示弹簧的形变量。

要对图 1-4 进行建模，需要写出其微分方程，根据牛顿第二定律，质点在力的作用下运动状态发生改变，所产生的加速度 a 与所受的合力 $\sum F$ 的大小成正比，与质点的质量 m 成反比，方向与 $\sum F$ 一致，有

$$m\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t) - c\dot{x}(t)$$

即

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

等式两侧取拉氏变换（根据拉氏变换的线性性质），有

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s)$$

将上式整理成传递函数的形式，有

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k}$$

得到传递函数的形式以后，就可以依据前文介绍的极点的不同情况，分别进行处理，限于篇幅，此处不再赘述。

1.2 矩 阵

在后面章节的现代控制理论学习中，由于经常要用到矩阵的一些基本理论知识，包括矩阵的转置，求矩阵的逆、秩等，所以我们将在本节对这些知识进行复习。

1.2.1 矩阵的定义

矩阵的定义：由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成 m 行 n 列的数表，称为 m 行 n 列矩阵，简称矩阵。

矩阵的类型包括方阵、对角矩阵、单位矩阵、转置矩阵、对称矩阵等。对角矩阵和单位矩阵的例子如下所示：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ 和 } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将矩阵的行列互换得到的新矩阵称为转置矩阵。

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 则其转置矩阵为 } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}。$$

奇异矩阵：对应的行列式等于 0 的矩阵称为奇异矩阵。

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则其行列式为 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0.5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0, \text{ 则 } A \text{ 为奇异矩阵。矩阵 } A \text{ 的行列}$$

式有时也表示为 $\det(A)$ 。

非奇异矩阵：行列式不为零的矩阵即为非奇异矩阵。

1.2.2 余子式、代数余子式和伴随矩阵

下面介绍余子式、代数余子式和伴随矩阵的概念。

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫作元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} ；记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ，叫作元素 a_{ij} 的代数余子式。注意：其中所求的 A_{ij} 为一个数值，并非矩阵。