高教版 2020年

全国硕士研究生招生考试

数学考试分析

（2020年版）

教育部考试中心

高等教育出版社

高教版　2020 年

全国硕士研究生
招生考试

数学
考试分析
（2020 年版）

RFID

教育部考试中心

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

全国硕士研究生招生考试数学考试分析：2020年版 / 教育部考试中心编. -- 北京：高等教育出版社，2019.6
ISBN 978-7-04-051709-5

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①教… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第112410号

全国硕士研究生招生考试数学考试分析(2020年版)
QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG ZHAOSHENG KAOSHI
SHUXUE KAOSHI FENXI (2020 NIAN BAN)

策划编辑 杨挺扬　　责任编辑 雷旭波　　封面设计 杨立新　　版式设计 童 丹
责任校对 马鑫蕊　　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	山东鸿君杰文化发展有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	12		
字　数	300千字	版　次	2019年6月第1版
购书热线	010-58581118	印　次	2019年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	38.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 51709-00

目　录

第一部分　数学科考试说明

一、 考试性质

全国硕士研究生招生数学科考试(以下简称数学考试)是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试.

一方面,从数学考试成绩的使用功能上看,它是常模参照性的考试.所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣,离开考生群体解释考生的成绩意义不大.我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选,这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征.数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用.从这个意义上讲,数学考试具有明显的选拔功能,是常模参照考试.

另一方面,从数学考试的测量功能上看,数学考试又是水平考试.水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平,从而决定是否适应将来的某项任务的考试,其主要特征是命题不以《教学基本要求》或某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据.《考试大纲》规定考试内容和考试要求,与《教学基本要求》没有直接的关系.数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业硕士研究生阶段的学习任务,以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力.数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与《教学基本要求》不完全相同,《教学基本要求》中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查,而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于《教学基本要求》.可见,数学考试也符合上述水平考试的特征,因而也是水平考试.

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求,从 2009 年开始,数学考试分为三个卷种,即数学(一)、数学(二)和数学(三),对不同卷种的考试内容有不同的要求.这种对不同学科、不同专业的考生提出不同考试要求的特征也是水平考试的重要标志.

二、 指导思想

根据数学考试的性质和目的,数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想:既有利于国家对高层次人才的选拔,又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高.在这两个“有利于”中,重点是有利于国家对高层次人才的选拔.

有利于国家对高层次人才的选拔,就是要求这项考试具有较高的信度和效度,能对考生群体进行有效的测量和甄别,从而区分出考生成绩的优劣,并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来,进入更高层次的教育阶段学习和深造.

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,就是要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际,试题水平既能反映教学的实际水平,也能考查考生应当具备的知识和

能力,同时,利用考试这根“指挥棒”正确引导高等学校的数学教学向培养学生应用数学能力的方向发展,使得学生学而有用,学而会用,从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用.

三、 基本原则

(1) 严格按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》(简称《考试大纲》)规定的考试内容和考试要求进行命题.

《考试大纲》主要包括以下内容:考试性质、考查目标、试卷分类及使用专业、考试形式和试卷结构、考试内容和考试要求、题型示例及参考答案等,它是法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据.

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定,各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致,试卷的难易度与题型示例的难易度基本一致,试卷中不出现超纲题、偏题和怪题.

(2) 试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查.

(3) 试题编制要符合各种题型编制原则.

(4) 保持历年试题难度的稳定.

(5) 试题编制应科学、公正、规范.

四、 参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的一个重要组成部分,它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度,是考试公平性的重要保证.

数学填空题要求答案是确定的和唯一的,参考答案只给出应填的结果,不给出推导计算过程.一般每题 4 分,答对 4 分,答错 0 分.对于四选一的选择题有 A、B、C、D 四个备选项,其中三个是干扰项,一个是正确选项,参考答案只给出正确选项前的字母,不给出推导过程.选对得满分,选错得 0 分,不倒扣分,鼓励考生在不会作答时猜测选项.对于计算题、证明题以及其他解答题,一般提供一至两种参考解答或证明方法,有些试题有更多的解法甚至包括初等解法,但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法.参考答案的文字表述必须规范,推理过程必须表述清楚,避免因参考答案表述不清而造成评分误差.每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关.一般地说,综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大,分值较高;基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低.各题的分值设定之后,就需要确定评分参考,即运算过程中关键步骤的赋分权重.计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的,比如,完成一道分值为 10 分的计算题需要三个关键步骤,完成到第一个步骤给 3 分,完成到第二个步骤给 6 分,三个步骤全部完成给 10 分.对于文科试题常常是按照要点单独赋分.为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢? 这是考虑到对于数学计算或证明题,只有做对了前面的步骤,才能完成后面的步骤这一特点.对于有多个解法的试题,一般到达同一结果即给相同的分数,每一步骤分值的给定不是随意的,如同确定

每题的分值一样，需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度，关键的步骤分值较高，反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据，一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案与评分参考对部分考卷进行试评，对评分参考做进一步的细化，制订评分细则，使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分，一份由很难的试题构成的试卷，可以通过较松的评分使其平均分较高，反之亦然.因此，评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

五、 试题、试卷和考试质量的评价指标

根据全国硕士研究生招生数学考试的性质，它是常模参照性的水平考试.对于常模参照考试，通常用难度和区分度评价试题的质量；用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况，同时也作为评价试卷质量的重要指标；用信度和效度评价考试的质量.

1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标，它是考生在该题上的得分率，即考生在该题上的平均得分与该题满分之比，通常以小写的 p 表示，取值范围在 0 与 1 之间.由于不同的考生群体水平是有差异的，他们在同一题上的平均得分也不同，因此，同一题目相对于不同的考生群体，其难度值是不同的，也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言，由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的，可以把每年的考生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的)，这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言，难度值在 0.3 以下的为难题，难度值在 0.3~0.8 的视为中等难度的试题，难度值在 0.8 以上的视为易题.试卷难度一般控制在 0.5 左右，一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中，为了保证试题的质量，需要估计题目难度.根据难度的定义，估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度，而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力.区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数，用 D 表示，一般 $-1<D<1$.对于主观性试题，一般用积矩相关系数；对于客观性试题，如填空题和选择题，一般用双列相关计算公式.该公式比较复杂，可参考有关教育测量书籍，在此不做介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组，然后分别计算出高分组、低分组的得分率 $p(H)$、$p(L)$，$D=p(H)-p(L)$.高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27%的考生，低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27%的考生.这种方法适合较小规模的考试，不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格，0.2~0.3 的试题应予以修正，0.2 以下的试题为不合格，应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系，难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小，难度中等

的试题区分度通常较大.为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试题分为六类,如下表所示.

试题的六大类型分类表

特征 类型	p	D	试题特征
Ⅰ	(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
Ⅱ	[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
Ⅲ	(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
Ⅳ	(0,0.3)	(0.3,1.0)	难度大但区分能力强
Ⅴ	[0.3,0.8]	(0.3,1.0)	难度适中且区分能力强
Ⅵ	(0.8,1)	(0.3,1.0)	难度小但区分能力强

在上述分类中,我们没有考虑区分度小于零的情况,因为这种试题一般不会出现.我们认为,第Ⅴ类试题是测量效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上).第Ⅰ类试题属于“题太难谁都不会做”,第Ⅲ类试题属于“题太易谁都会做”,它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用,因此,命题中我们严格控制出现这两类试题.同时,我们也不要求出现太多的第Ⅱ类和第Ⅵ类试题.第Ⅳ类试题在选拔性的硕士研究生招生数学考试中具有非常重要的作用,它对区分中、高水平的考生十分有效,通过多年对试题的分析,这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.

2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看作一个题目,则像计算题目难度一样,也有一个试卷难度指标,即全体考生的平均分与试卷满分之比.在某项考试的满分逐年保持不变的情况下,全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标,试卷的平均分反映全体考生的平均得分.试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标,标准差愈大,说明考生成绩分布得愈广,该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强;标准差愈小,说明考生成绩都集中在平均分附近,没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标.因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定,在大规模考试中,一般情况下考生的成绩近似服从正态分布,而正态分布由均值和标准差决定,试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计.因此,控制试卷难易度的稳定性,关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式,即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值,在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计,就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分,从而达到控制试卷难度的目的.试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系,但一般来说,试题的区分度愈大,该题对试卷标准差的贡献值就愈大.特别地,中等难度、区分度较大的第Ⅴ类试题对标准差的贡献最大.因此,在命题中应尽量使第Ⅴ类试题在试卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的60%以上成绩的考生占考生总人数的比例,若满分为

150分,试卷的及格率是考生成绩分布曲线下大于90分的面积,此面积与成绩分布的均值和标准差有关,在命题中难以单独控制,把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的,但一般情况下,不把它作为试卷质量的评价指标.

3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标.信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果.常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度.由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 α 系数.目前我们采用的是分半信度和 α 系数.效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西.常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度.关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍.

在后面的试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标.

第二部分　2019 年数学试题分析

一、数学（一）

读者可于 2019 年 9 月 1 日以后
扫码获取 2019 年试题评价指标

1. 选择题

(1) 当 $x\to0$ 时,若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k=$

A. 1.　　　　B. 2.

C. 3.　　　　D. 4.

【答】 应选 C.

【分析】 本题主要考查无穷小量和无穷小量阶的概念,考查简单极限的计算以及在求极限过程中利用等价无穷小量和泰勒公式的方法,是一道考查基本概念、基本方法、基本计算的试题.

【解法 1】 利用洛必达法则及等价无穷小量代换得

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sec^2 x}{kx^{k-1}}=-\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{kx^{k-1}\cos^2 x}=-2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^{k-1}},$$

所以当且仅当 $k-1=2$,即 $k=3$ 时,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^k}$存在且不为零.

故当 $x\to0$ 时,若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k=3$.

故选 C.

【解法 2】 利用泰勒公式得

$$x-\tan x=x-\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]=-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\quad(x\to0),$$

所以当 $x\to0$ 时,$x-\tan x$ 与 x^3 是同阶无穷小,故 $k=3$.

故选 C.

【典型错误】 本题考生得不出正确答案的主要原因可能是:

① 将同阶无穷小量与高阶、低阶无穷小量的概念混淆,从而得到错误结论.

② 在计算过程中,没有正确使用等价无穷小量代换,导致计算错误.

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x|x|, & x\leqslant0,\\ x\ln x, & x>0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

A. 可导点,极值点.　　　　B. 不可导点,极值点.

C. 可导点,非极值点.　　　　D. 不可导点,非极值点.

【答】 应选 B.

【分析】 本题考查函数在一点处可导的概念及可导的充分必要条件,考查极值点的概念及极值点的充分条件,是一道考查基本概念、基本方法的试题.

【解】 因为$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ x\ln x, & x>0,\end{cases}$所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{x}=-\infty,$$

故$f(x)$在$x=0$处的右导数不存在,从而$f(x)$在$x=0$处不可导.

又因为$f(0)=0$,且当$x<0$时,$f(x)=-x^2<0$,当$x\in(0,1)$时,$f(x)=x\ln x<0$,所以$x=0$是$f(x)$的极大值点.

综上可知,应选 B.

【典型错误】 本题考生得不出正确答案的主要原因可能是:

① 不会利用单侧导数的定义判断其存在性,不知道导数与单侧导数的关系.

② 不会利用极值点的定义判断不可导点是否为极值点.

(3) 设$\{u_n\}$是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$. B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

【答】 应选 D.

【分析】 本题考查数列的单调有界收敛定理及数列极限的运算性质,考查级数收敛的定义,是一道考查基本概念、基本性质、简单计算的试题.

【解法 1】 因为$\{u_n\}$是单调增加的有界数列,所以$\{u_n\}$收敛,从而$\{u_n^2\}$收敛.

因为$\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2-u_k^2)=u_{n+1}^2-u_1^2$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2-u_k^2)=\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}^2-u_1^2)$存在,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$收敛.

应选 D.

【解法 2】 本题也可利用排除法得到正确答案.

取$u_n=1-\frac{1}{n}$,则$\{u_n\}$是单调增加的有界数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$.这时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$均发散,故可排除选项 A,B.

取$u_n=-\frac{1}{n}$,则$\{u_n\}$是单调增加的有界数列,且$1-\frac{u_n}{u_{n+1}}=-\frac{1}{n}$.这时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$发散,故可排除选项 C.

综上可知,应选 D.

【典型错误】 本题考生得不出正确答案的主要原因可能是:

① 求不出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$的部分和,从而不能利用定义判断其收敛性.

② 没有掌握级数收敛的必要条件和简单级数的收敛性,从而不能利用通过举反例的方法排除错误选项.

(4) 设函数$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$.如果对上半平面$(y>0)$内的任意有向光滑封闭曲线C都有

$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$,那么函数 $P(x,y)$ 可取为

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$.　　B. $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$.　　C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.　　D. $x-\dfrac{1}{y}$.

【答】 应选 D.

【分析】 本题考查曲线积分与路径无关的充分必要条件,考查偏导数的求法,是一道考查基本性质、简单计算的试题.

【解】 因为对上半平面内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$$\oint_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0,$$

所以曲线积分 $\oint_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ 在上半平面内与路径无关,故$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y^2}\right)=\dfrac{1}{y^2}$,所以$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}$,从而 $P(x,y)=f(x)-\dfrac{1}{y}$.

因为$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$在正 y 轴上没定义,所以只有 $x-\dfrac{1}{y}$符合要求.

故应选 D.

注:得到$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}$时,也可利用验证法找到 $P(x,y)$ 为$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$或 $x-\dfrac{1}{y}$.

【典型错误】 本题考生得不出正确答案的主要原因可能是:没有掌握曲线积分与路径无关的充分必要条件,不能正确使用题设条件.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

【答】 应选 C.

【分析】 本题主要考查实二次型矩阵的行列式的值、特征值与特征向量等相关概念及应用,同时也考查实二次型的标准形、规范形、正惯性指数、负惯性指数等概念.

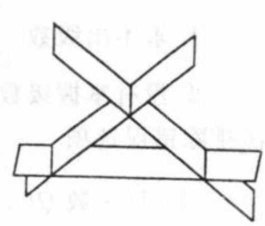
【解】 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$.又因为 $|\boldsymbol{A}|=4=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2\lambda_3$,得 $\lambda_3=-2$.从而得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 1,负惯性指数为 2,所以,二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.正确选项为 C.

【典型错误】 由于考生对实二次型的标准形与规范形的概念不清,会给做题带来一定的困难.

(6) 如图所示,有 3 张平面两两相交,交线相互平行,它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\quad(i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$,则



A. $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$.　　B. $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.

C. $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.　　D. $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$.

【答】 应选 A.

【分析】 本题主要考查三元线性方程与空间平面之间的关系，线性方程组有无解的判别条件，同时考查方程组是否有解与对应的平面在空间中是否有交点之间的关系.

【解】 由于 3 张平面两两相交，则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$；又因为它们的交线相互平行，所以 3 张平面没有公共的交点，即方程组无解，故 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant 3$. 从而只有 $r(\boldsymbol{A})=2$, $r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，故选 A.

【典型错误】 有几何背景的代数问题，在一定程度上都会给考生带来理解上的困难. 主要是对代数式所表达的几何意义不清楚所造成的. 在这一类题中，本题还是一个比较基础的题，但得分率并不高.

(7) 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ D. $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

【答】 应选 C.

【分析】 本题考查随机事件的概率的概念，考查概率的性质及概率的运算规则，考查事件独立性概念，是基本题.

【解】 由概率的运算性质知 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，因此等式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ 成立的充分必要条件是 $P(AB)=0$，比如设 $P(A)=0.1$, $P(B)=0.2$ 且 A 与 B 互不相容，则有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，但此时 $P(A)\neq P(B)$，所以选项 A 是错误的. 对于选项 B，等式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立的充分必要条件是 A 与 B 相互独立，这与 $P(A)=P(B)$ 没有必然联系，故选项 B 不正确. 对选项 C，由概率的运算性质，$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$，$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$，可见 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 当且仅当 $P(A)=P(B)$，故 C 是正确选项. 对选项 D，由于

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\,\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})\\
&=1-P(A\cup B)\\
&=1-P(A)-P(B)+P(AB),
\end{aligned}
$$

所以 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$ 的充分必要条件是 $P(A)+P(B)=1$，这个条件与 $P(A)=P(B)$ 没有必然联系，因此选项 D 不正确.

故选 C.

【典型错误】 本题得分率较高. 给出不正确答案的原因应该是对概率的基本运算性质掌握得不好. 本题中的选项 A 和 B 是较容易被排除的. 考生的错误主要体现在对选项 C 和 D 的判断上. 由以上解法可以看出，需要考生对概率的基本运算公式相当的熟悉，才能快速而准确地判断出选项 C 是正确的，而选项 D 是错误的. 否则就只能在这两个选项中随便猜一个.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$

A. 与 μ 无关，而与 σ^2 有关. B. 与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

C. 与 μ,σ^2 都有关. D. 与 μ,σ^2 都无关.

【答】 应选 A.

【分析】 本题考查正态分布的概念，正态分布的概率计算，考查二维正态分布的性质. 同时考查了随机变量独立性的概念以及正态分布的两个参数的概率意义. 本题是一道考查基础知识的试题，试题对正态分布的有关性质的考查比较全面.

【解法 1】 由正态分布性质,并结合题设知 $X-Y \sim N(0,2\sigma^2)$,再由正态分布的概率计算公式有

$$
\begin{aligned}
P\{|X-Y|<1\} &= P\{-1<X-Y<1\} \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1,
\end{aligned}
$$

因此 $P\{|X-Y|<1\}$ 与 μ 无关,而与 σ^2 有关.故选 A.

【解法 2】 由 $\frac{X}{\sigma}-\frac{Y}{\sigma} \sim N(0,2)$,及 $\{|X-Y|<1\}=\left\{\left|\frac{X}{\sigma}-\frac{Y}{\sigma}\right|<\frac{1}{\sigma}\right\}$,即可判断 $P\{|X-Y|<1\}$ 与 μ 无关,而与 σ^2 有关.故选 A.

【典型错误】 本题不需要考生做太多的计算,但要求考生很熟悉正态分布的性质.本题涉及的正态分布的性质包括:① 若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $\mu=E(X)$,$\sigma^2=D(X)$,$P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.② 若随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布,则 X,Y 的任意线性函数服从正态分布,再结合正态分布的两个参数期望和方差,便可确定 X,Y 的线性函数的分布.本题解决的关键一步就是利用正态分布的性质得出 $X-Y \sim N(0,2\sigma^2)$.考生得不出正确答案的主要原因可能是不能确定出 $X-Y$ 的分布.如果不能确定出 $X-Y$ 的分布,那就只能按通常的做法去考察概率 $P\{|X-Y|<1\}$:先由题设得出 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$,再把 $P\{|X-Y|<1\}$ 表示为联合密度 $f(x,y)$ 的二重积分,这种做法不仅很复杂,而且不容易得出正确答案.得不出正确答案的另一个可能的原因是不清楚正态分布概率计算的公式.

2. 填空题

(9) 设函数 $f(u)$ 可导,$z=f(\sin y-\sin x)+xy$,则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

【答】 应填 $\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$.

【分析】 本题主要考查偏导数的概念和复合函数的链导法则,是一道考查基本概念、基本方法、基本运算的试题.

【解】 因为 $z=f(\sin y-\sin x)+xy$,所以

$$
\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)\cos y+x.
$$

从而 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$.

【典型错误】 本题超过四分之一的考生不得分,考生得不出正确答案的主要原因可能是:

① 不能分析函数的结构,得不到 z 与 x,y 的正确关系.

② 具体求导时,简单函数的导数公式记错.

(10) 微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$________.

【答】 应填 $\sqrt{3e^x-2}$.

【分析】 本题主要考查微分方程定解问题的概念,考查一阶线性微分方程的通解公式,

是一道考查基本概念、基本方法、基本运算的试题.

【解】 将 $2yy'-y^2-2=0$ 变形得 $(y^2)'-y^2=2$. 根据 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

得 $y^2=\mathrm{e}^x\left(C+\int 2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)=C\mathrm{e}^x-2$.

由 $y(0)=1$ 得 $y(0)^2=C\mathrm{e}^0-2=C-2=1$, 故 $C=3$, 所以 $y(x)=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

【典型错误】 本题超过一半的考生不得分,考生得不出正确答案的主要原因可能是:

① 不能将原方程变形,得不出会解的一阶线性微分方程.

② 没有正确掌握一阶线性微分方程的通解公式,或出现计算错误.

(11) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$ ________.

【答】 应填 $\cos\sqrt{x}$.

【分析】 本题主要考查函数项级数和函数的概念,考查简单函数的麦克劳林公式,是一道考查基本概念、基本性质的试题.

【解】 因为 $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, x\in(-\infty,+\infty)$, 所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}.$$

【典型错误】 本题得分的考生不到四分之一,考生得不出正确答案的主要原因可能是:

① 不能掌握基本的课程内容,记不住要求的一些基本结论.

② 不能将级数进行简单变形,从而不能将问题与已知结果联系起来.

③ 部分考生没有学好函数项级数的内容,放弃了这类问题.

(12) 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【答】 应填 $\frac{32}{3}$.

【分析】 本题主要考查曲面积分的概念及曲面积分与二重积分的关系,考查二重积分的性质和计算,是一道考查基本概念、基本性质、基本运算的试题.

【解】 因为 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$, 所以 $4-x^2-4z^2=y^2$.

因为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 在 xOy 平面的投影为 $x^2+y^2\leqslant 4$, 且曲面上侧为正,所以

$$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}|y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r=\frac{32}{3}.$$

【典型错误】 本题得分的考生不到四分之一,考生得不出正确答案的主要原因可能是:

① 没有掌握基本的课程内容,不能将具体的曲线积分正确地转化为二重积分.

② 没有掌握二重积分的基本性质,不能将二重积分正确地转化为累次积分.

③ 简单运算出现错误,如 $\sqrt{y^2}=y$ 等.

④ 部分考生没有学好曲面积分的内容,放弃了相关题目.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 则线性方程组

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

【答】 应填 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$.

【分析】 本题主要考查齐次线性方程组的基础解系和方程组的通解等基本概念及其应用,同时也考查向量组的线性相关性、矩阵的秩等概念,以及它们与齐次线性方程组的基础解系之间的关系.

【解】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.

记线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,从而 $\boldsymbol{\eta}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解.由于 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,故 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以,$\boldsymbol{\eta}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,其通解为 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\eta}=k(1,-2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$.

【典型错误】 ① 考生没有从向量的关系式 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 中看出齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有一个解 $\boldsymbol{\eta}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,这是解决本题时遇到的主要困难.

② 只给出了其中的一个解 $\boldsymbol{\eta}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,而没有给出通解 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数,EX 为 X 的数学期望,则 $P\{F(X)>EX-1\}=$________.

【答】 应填 $\dfrac{2}{3}$.

【分析】 本题考查概率密度和分布函数的概念,考查数学期望的计算及事件概率的计算,是一道考查概率基础知识的试题.

【解法 1】 $EX=\int_0^2 x\cdot\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}P\{F(X)>EX-1\}&=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}\\&=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}\\&=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$