普通高等教育“十一五”国家级规划教材

实变函数论

第四版

江泽坚　吴智泉　纪友清　编

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

实变函数论

第四版

江泽坚　吴智泉　纪友清　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书核心内容为空间$\mathbb{R}^n$上 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论。作为预备知识，先介绍了集合论和$\mathbb{R}^n$空间的基础知识；作为 Lebesgue 积分的重要应用，后面介绍了 L^p 空间理论、Fourier 级数与 Fourier 变换；作为拓展知识，本书介绍了一点集合环上测度的扩张。

本书可作为高等学校"实变函数论"课程的教材，由于学时限制，部分内容课堂内不能完成讲授，可供有能力的学生自学和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/江泽坚，吴智泉，纪友清编. --4 版. --北京：高等教育出版社，2019.7

ISBN 978-7-04-052055-2

Ⅰ.①实… Ⅱ.①江… ②吴… ③纪… Ⅲ.①实变函数论-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 104050 号

项目策划 李艳馥 兰莹莹 李 蕊

策划编辑 兰莹莹 责任编辑 兰莹莹 封面设计 王凌波 版式设计 张 杰

插图绘制 李沛蓉 责任校对 刘 莉 责任印制 耿 轩

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	13	版　　次	1961 年 6 月第 1 版
字　　数	290 千字		2019 年 7 月第 4 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2019 年 7 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	27.80 元

物 料 号 52055-00

实变函数论

第四版

江泽坚　吴智泉　纪友清　编

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/128454，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

实变函数论简史

第一版序

http://abook.hep.com.cn/128454

第四版说明

本书第三版是2007年出版的。近十余年讲授过程中，不断有学生寻求测度旋转不变性的证明；同时，许多同仁也希望能补充测度旋转不变性的证明，以使测度理论更加完善。因此我们在近几年的教学过程中，每次都利用两个学时来处理测度旋转不变性及一些相关问题。

我们凝练了近几年的处理方法，在第四版中增加了一节保距映射的保测性，并配以少量习题充实相关内容。第四版保持了第三版的体系、特色，为了避免破坏第三版使用者的习惯，我们将增加的内容列为第三章第5节，原第5节编号变为第6节。

编　者

2018年5月

第三版说明

第二版说明

目 录

第一章 集合及其基数

实变函数论是在集合论的观点与方法渗入数学分析的过程中产生的.对特定的集合按某种要求作分解与组合,是实变函数论中的一种基本的论证手法,因此我们现在先介绍一些有关集合论的基本知识.

§1 集合及其运算

一个**集合**是被我们看成了一个单一整体的一些"事物".这些"事物"称为这个集合的**元素**.如果 A 是一个集合,x 是 A 的元素,则记为 $x\in A$.读作"x 属于 A";x 不是 A 的元素这一事实记为 $x\overline{\in} A$ 或 $x\notin A$,读作"x 不属于 A".

我们说集合 A 已经给定,就是说对于任意"事物"x,我们都能鉴别 x 是否是 A 的元素,即鉴别 $x\in A$ 和 $x\notin A$ 中哪一个成立.一般说来,这两个式子中应该有一个而且只有一个成立.

上面我们把集合"看成了一个单一整体"是说我们认为集合和组成这个集合的那些元素是不同的.我们着眼的不是这些元素中一个个的"事物",而是认为这些"事物"已组成了一个整体.因此如果 x 是某一"事物",当我们说"以 x 为元素构成一集合"时,这个集合和 x 本身就是不同的东西了,尽管这个集合中就只有一个元素 x.

我们可以用已有的"事物"作元素构造各种各样的集合.例如将 1,2,3 三个数放在一起看成一个整体,便得到一个集合,可以记为 $\{1,2,3\}$.此处我们用$\{\quad\}$表示把括号中的那些"事物"放在一起看成一个整体的意思.这种用加上括号来表示构成集合的办法,我们以后将经常引用.如 $\{2,4,6,8\}$,$\left\{\frac{1}{n};n=1,2,\cdots\right\}$分别表示由 2,4,6,8 这四个数组成的集合和由 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$这样的无穷多个数组成的集合.一般说来,如果 $p(x)$ 是一个与 x 有关的条件(或命题),则所有合乎这个条件(或使这个命题成立)的 x 所构成的集合便记为 $\{x;p(x)\}$.例如当 $p(x)$ 是"数 x 的平方等于 1"这一条件时,$\{x;p(x)\}$就是$\{-1,1\}$.又如果 E 是一个事先给定了的集合,则 $E[x;p(x)]$ 便表示 E 中所有使条件 $p(x)$ 满足的 x 所构成的集合,也就是 $\{x;x\in E,p(x)\}$.例如当 $f(x)$ 是一个给定的实函数且 a 是一个常数时,$E[x;f(x)>a]$ 就是 E 中那些使 $f(x)$ 大于 a 的 x 所构成的集合.自然这里的 E 应是某个已事先给定了的集合.

我们说两个集合 A 和 B 是**相等的**，记为 $A=B$，就是说它们所包含的元素相同，即它们实际上是同一个集合．例如 $\{x;x^2=1\}=\{-1,1\}$．

设 A,B 是两个集合，如果属于 A 的元素都属于 B，则说 A **包含于** B 或 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$，A 包含于 B 也可以说成 B 包含 A，而记为 $B\supset A$．

不含任何元素的集合称为**空集**或**虚无集**，记作 $\varnothing$．它是任何集合的子集．

对于任何集合 A，$A\supset A$ 总成立，所以 A 也是 A 本身的子集，如果 $B\subset A$，$B\neq A$，即 B 是 A 的子集，但 B 还不等于 A，则说 B 是 A 的**真子集**．

下述两个定理是显然成立的．

定理 1　$A=B$ 的充要条件是 $A\subset B$，且 $B\subset A$．

定理 2　如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$．

设 A,B 是两个给定的集合，将它们所共有的元素拿来构成一个新的集合，称为 A 和 B 的**交**，记作 $A\cap B$ 或 AB，因此

$$A\cap B=\{x;x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，$C=\{6,7,8\}$，则

$$A\cap B=\{3,4\},B\cap C=\{6\},A\cap C=\varnothing.$$

一般说来，如果 Λ 是一集合，对于每一 $\lambda\in\Lambda$，都相应地给定了一个集合 A_λ，则我们就说给定了（以 Λ 为下标集的）**一族集合**．这时这族集合的交定义为

$$\{x;\text{对每一 } \lambda\in\Lambda,\text{都有 } x\in A_\lambda\},$$

记为 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$．如果 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$ 或 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，则上述交就分别简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$．所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;\text{对任何正整数 } n,\text{都有 } x\in A_n\}.$$

例 1　若 $A_n=\left\{x;0\leqslant x<1+\dfrac{1}{n}\right\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\left\{x;0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\}=A_n,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

例 2　若 $A_n=\left\{x;n\leqslant x\leqslant n+\dfrac{3}{2}\right\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing.$$

例 3　若 $A_n=\left\{x;-\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n}\right\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\left\{x;-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\},\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}.$$

例 4　若 Λ 是全体实数所构成的集合，$A_\lambda=\{x;\lambda\leqslant x<\infty\}$，$\lambda\in\Lambda$，则

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\varnothing.$$

两个集合 A 和 B 的**并**定义为

$$\{x;x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

记为 $A\cup B$.例如 $\{1,2,3,4\}\cup\{3,4,5,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$.同样,以 Λ 为下标集的一族集合 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的并就是

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x;\text{有 }\lambda\in\Lambda,\text{使 }x\in A_\lambda\}.$$

当 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$ 或 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 时,分别有

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x;\text{有 }i\leqslant n,\text{使 }x\in A_i\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;\text{有正整数 }n,\text{使 }x\in A_n\}.$$

例 5 若 $A_n=\{x;n-1<x\leqslant n\}$,$n=1,2,3,\cdots$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;0<x<\infty\}=(0,\infty).$$

例 6 若 $A_n=\left\{-1+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}\right\}$,$n=1,2,3,\cdots$,则

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\left\{x;-1+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}\right\}$$
$$=A_n=\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right],$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;-1<x<1\}=(-1,1).$$

例 7 设 Λ 是大于零而小于 1 的全体有理数构成的集合,$A_\lambda=\left\{x;\frac{\lambda}{2}<x<2\lambda\right\}$,$\lambda\in\Lambda$,则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=(0,2).$$

当 $A\cap B=\varnothing$ 时,我们说 A 和 B 不(相)交.对于集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,如果对任意 λ',$\lambda''\in\Lambda$,$\lambda'\neq\lambda''$,都有 $A_{\lambda'}\cap A_{\lambda''}=\varnothing$,则说这族集合是互不相交的或两两不交的.

根据交与并的定义立即可得:

定理 3 下列各式恒成立:

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(2) $A\cap(B\cup C)=(B\cup C)\cap A=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(3) $A\cup A=A$,$A\cap A=A$.

定理 4

(1) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$.

(2) 若 $A_\lambda\subset B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$,则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$,特别是若 $A_\lambda\subset C(\lambda\in\Lambda)$,则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset C$;

(3) 若 $A_\lambda\subset B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$,则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$,特别是若 $C\subset B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$,则

$C\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$；

(4) $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup B_\lambda)=\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cup\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$；

(5) $A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$.

证明 以(2),(5)的证明为例.先证(2),由并的定义,如果$x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,则应有$\lambda'\in\Lambda$,使$x\in A_{\lambda'}$.而$A_{\lambda'}\subset B_{\lambda'}$,所以有$x\in B_{\lambda'}$.从而$x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$,这说明$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$是成立的.

再证(5).这又分两步.

第一步证明$A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$.若$A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\neq\varnothing$.任取$x\in A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$.由交的定义,$x\in A$并且$x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$.再根据集合并的定义可知有$\lambda'\in\Lambda$,使$x\in B_{\lambda'}$.于是$x\in A\cap B_{\lambda'}$.从而$x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$.所以$A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$.

第二步证明$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)\subset A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$.由并的定义,如果$x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$,则有$\lambda'\in\Lambda$,使$x\in A\cap B_{\lambda'}$.于是$x\in A$且$x\in B_{\lambda'}$.从$x\in B_{\lambda'}$便知$x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$.而已知$x\in A$,所以$x\in A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$,这证明了$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)\subset A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$.由定理1,

$$A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda).$$

证完.

对于两个给定的集合A,B,我们定义$A-B$为

$$A-B=\{x;x\in A,x\notin B\}.$$

即$A-B$是由属于A而不属于B的那些元素构成的集合(也记为$A\setminus B$).注意,一般说来$(A-B)\cup B$未必等于A(参见本节习题第1题).如果已知$A\supset B$,则$A-B$称为B相对于A的**余集**.记为$\complement_A B$.特别是如果我们在某一问题中所考虑的一切集合都是某一给定集合S的子集时,集合B相对于S的余集就简称为B的余集,而把$\complement_S B$简记为$\complement B$或B^c.

定理5

(1) $S^c=\varnothing,\varnothing^c=S$；

(2) $A\cup A^c=S,A\cap A^c=\varnothing$；

(3) $(A^c)^c=A$；

(4) 若$A\supset B$,则$A^c\subset B^c$.

定理6(De Morgan公式)

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c,\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.$$

证明 以第一式为例.如果$\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c$不是空集,$x\in\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c$,则$x\in S$且$x\notin\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$.

因而对任意 $\lambda \in \Lambda$，都有 $x \notin A_\lambda$，所以有 $x \in S - A_\lambda = A_\lambda^c$. 由于这对一切 $\lambda \in \Lambda$ 都成立，故 $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$. 这表明 $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$.

反之，当 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \neq \varnothing$ 且 $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ 时，对一切 $\lambda \in \Lambda$, $x \in A_\lambda^c$，即 $x \in S$, $x \notin A_\lambda$. 因而 $x \in S$ 且 $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，这也就是说 $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c$. 所以 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c$. 从而由定理 1,

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c.$$

证完.

对于一个给定的集合 S，若 $\mathscr{F}$ 是 S 的一族子集，即 $\mathscr{F}$ 是以 S 的一些子集为元素的一个集合，如果它满足条件：

1) $\varnothing \in \mathscr{F}$;

2) 当 $A \in \mathscr{F}$ 时，$A^c = \complement_S A \in \mathscr{F}$;

3) 当 A, B 都属于 $\mathscr{F}$ 时，$A \cup B \in \mathscr{F}$,

则我们就说 $\mathscr{F}$ 是 S 的一些子集构成的一个**域**或**代数**. 此时必有

(1) $S \in \mathscr{F}$;

(2) 当 $A, B \in \mathscr{F}$ 时，$A \cap B \in \mathscr{F}$.

如果把上述定义中的 3) 改为

3′) 当 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是 $\mathscr{F}$ 中一串元素时，必有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F},$$

则 $\mathscr{F}$ 便称为 S 的一些子集构成的一个 **σ-域**或 **σ-代数**. 结合 2), 3′) 和 De Morgan 公式，即知对于 σ-域来说，上述(2)可扩充为

(2′) 当 $A_n \in \mathscr{F}(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 时，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$, σ-域一定是域. 但是一般说来，只满足条件 1), 2), 3) 的域未必满足条件 3′)，即域不一定是 σ-域. 另外条件 3′) 中的"一串" A_n 当然是无穷多个，但是并不是说 $\mathscr{F}$ 中任意无穷多个元素的并都仍然是 $\mathscr{F}$ 的元素. 因为并非任意一个无穷集合中的元素都可以排成"一串"，即可以排成一个这样的序列形式. 什么样的无穷集合的元素可以排成一个序列，这正是我们在后面的 §2—§4 中要详细讨论的问题.

对于任意给定的非空集合 S. 由 S 的子集构成的 σ-域显然是有的，比如 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, S\}$ 和由 S 的全体子集所构成的 $\mathscr{F}_1$ 都是 σ-域. 另外易见 $\mathscr{F}_0$ 和 $\mathscr{F}_1$ 还分别是由 S 的子集构成的 σ-域中的最小者和最大者，即对任意由 S 的子集构成的 σ-域 $\mathscr{F}$，都有 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_1$.

定理 7 如果 $\mathscr{A}$ 是由 S 的子集构成的一非空集合，则存在唯一一个 S 的子集的 σ-域 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$，使 $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}(\mathscr{A})$ 并且对于 S 的子集的任何 σ-域 $\mathscr{F}$，只要 $\mathscr{F} \supset \mathscr{A}$，就有 $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}(\mathscr{A})$，这也就是说在 S 的子集的包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-域中有一个最小的 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. 这个 σ-域 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 称为由 $\mathscr{A}$ 产生的(或决定的) σ-域.

证明 包含 $\mathscr{A}$ 的，由 S 的子集构成的 σ-域总是存在的，比如包含 S 的全体子集

的 $\mathscr{F}_1$ 就是一个.用 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 表示所有包含 $\mathscr{A}$ 的,由 S 的子集所构成的 σ-域的交①,则 $\mathscr{F}(\mathscr{A})\supset\mathscr{A}$.如果 $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的,由 S 的子集构成的 σ-域,自然有 $\mathscr{F}\supset\mathscr{F}(\mathscr{A})$.所以我们只要证明 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 确实是一 σ-域就可以了.首先,每一(包含 $\mathscr{A}$ 的)σ-域 $\mathscr{F}$ 中都含有空集 $\varnothing$,因此 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 中也含有 $\varnothing$.其次,如果 $A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$,则对于任何含有 A 的 σ-域 $\mathscr{F}$,$A\in\mathscr{F}$,从而 $A^c\in\mathscr{F}$,由于这里的 $\mathscr{F}$ 可以是由 S 的子集构成的、包含 $\mathscr{A}$ 的任意 σ-域,所以 $A^c\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$.最后若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中的每一个都属于 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$,则对于任意包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-域 $\mathscr{F}$,$A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,3,\cdots)$,于是 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.从而也就有 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$.可见 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 确实是一 σ-域.证完.

对于一串给定的集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$.我们定义

$$\{x;有无穷多个\ n,使\ x\in A_n\}$$

为这串集合的**上极限**,记为 $\overline{\lim_n} A_n$ 或 $\limsup\limits_n A_n$;定义

$$\{x;只有有限多个\ n,使\ x\notin A_n\}$$

为这串集合的**下极限**,记为 $\underline{\lim_n} A_n$ 或 $\liminf\limits_n A_n$.显然

$$\liminf_n A_n\subset\limsup_n A_n.$$

例 8 设 $A_n=\left[\dfrac{1}{n},3+(-1)^n\right]$,$n=1,2,3,\cdots$,则

$$\liminf_n A_n=(0,2],\quad \limsup_n A_n=(0,4].$$

这时 $\liminf\limits_n A_n\neq\limsup\limits_n A_n$.

如果一串集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的上、下极限相同,则我们就说这串集合是**有极限的或收敛的**,并且我们把 $\limsup\limits_n A_n$(也就是 $\liminf\limits_n A_n$)记为 $\lim\limits_n A_n$,称为其**极限**.

定理 8 对于任意一串集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,都有

$$\liminf_n A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{i=m}^{\infty}A_i,$$

$$\limsup_n A_n=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty}A_i.$$

证明 若 $x\in\liminf\limits_n A_n$,则只有有限个 n,使 $x\notin A_n$,所以有 m_0 使 $n\geqslant m_0$ 时,$x\in A_n$,从而 $x\in\bigcap_{i=m_0}^{\infty}A_i$,于是 $x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{i=m}^{\infty}A_i$.反之,如果 $x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{i=m}^{\infty}A_i$,则有 m_0 使 $x\in\bigcap_{i=m_0}^{\infty}A_i$,这说明当 $n\geqslant m_0$ 时,$x\in A_n$,可见最多有 m_0-1 个 n 使 $x\notin A_n$.因而 $x\in\liminf\limits_n A_n$.这证明了第一个等式.

如果 $x\in\limsup\limits_n A_n$,则有无穷多个 n,使 $x\in A_n$,因此对于任意 m,在 $A_m,A_{m+1},A_{m+2},\cdots$ 中一定还有包含 x 的集合,因此 $x\in\bigcup_{i=m}^{\infty}A_i$.注意 m 任意,所以 $x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty}A_i$.反之,如果

---

① 用 Λ 表示由 S 的子集构成的,包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-域的全体,则 Λ 非空,约定对于 $\lambda\in\Lambda$,将 λ 视为 $\mathscr{F}_1$ 的子集时,记为 $\mathscr{F}_\lambda$,则 $\mathscr{F}(\mathscr{A})=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda$.

$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i$，则对任意 m，$x \in \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i$，所以必有 $i \geqslant m$ 使 $x \in A_i$. 这说明使 $x \in A_n$ 的 n 必有无穷多个，因而 $x \in \limsup_n A_n$. 第二式也得证.

由定理 8 立即可得

定理 9 如果集合序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 单调上升（下降），即 $A_n \subset A_{n+1}$（相应地 $A_n \supset A_{n+1}$）对一切 n 都成立，则

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \left(\text{相应地} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

定理 10 如果 $\mathscr{F}$ 是一 σ-域，$A_n \in \mathscr{F}$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $\limsup_n A_n$ 和 $\liminf_n A_n$ 也都属于 $\mathscr{F}$.

习　题

1. 证明 $(B-A) \cup A = B$ 的充要条件是 $A \subset B$.

2. 证明 $A-B = A \cap B^c$.

3. 证明定理 4 中的(3)，(4)，定理 6(De Morgan 公式)中的第二式和定理 9.

4. 证明 $(A-B) \cup B = (A \cup B) - B$ 的充要条件是 $B = \varnothing$.

5. 设 $S=\left\{1,2,3,4\right\}$，$\mathscr{A}=\left\{\left\{1,2\right\},\left\{3,4\right\}\right\}$，求 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. 又如果 $S=\left\{\frac{1}{n};n=1,2,3,\cdots\right\}$，$\mathscr{A}_0=\left\{\left\{\frac{1}{n};n\text{ 为奇数}\right\}\right\}$，$\mathscr{A}_1=\left\{\left\{1\right\},\left\{\frac{1}{3}\right\},\cdots,\left\{\frac{1}{2i+1}\right\},\cdots\right\}$，问 $\mathscr{F}(\mathscr{A}_0)$ 和 $\mathscr{F}(\mathscr{A}_1)$ 是什么？

6. 对于 S 的子集 A，定义 A 的示性函数为

$$\varphi_A(x)=\begin{cases}1, & x \in A,\\ 0, & x \notin A.\end{cases}$$

证明：如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是 S 的子集的序列，则

$$\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \varphi_{A_n}(x), \quad \varphi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \varphi_{A_n}(x).$$

7. 设 $f(x)$ 是定义于 E 上的实函数，a 为一常数，证明

$$E[x;f(x)>a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[x;f(x) \geqslant a+\frac{1}{n}\right],$$

$$E[x;f(x) \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[x;f(x)>a-\frac{1}{n}\right].$$

8. 如果实函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$，则对于任意常数 a，都有

$$E[x;f(x) \leqslant a] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_n E\left[x;f_n(x) \leqslant a+\frac{1}{k}\right]$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_n E\left[x;f_n(x) < a+\frac{1}{k}\right].$$

§2 集合的基数

在抽象地研究集合（即不考虑集合中元素的特性）时，一个集合中元素的多少应该

是基本的概念.比如一个由五个苹果作成的集合和一个由五本书作成的集合,当然是两个不同的集合,但是如果我们不计较它们的元素的具体属性时,它们却是有共同的特性的,即它们的元素的多少是相同的(它们都是由五个元素组成的).相反,一个由五个苹果作成的集合和一个由六个苹果作成的集合之间却没有这种共同点.可见在抽象地研究集合时,元素的多少是值得重视的属性.

对于有限集合,即由有限多个元素作成的集合来说,表明元素多少的概念自然就是元素的个数.空集的元素的个数是零.任意一个非空的有限集的元素的个数都是一个正整数.为了求得一个有限集合 M 中元素的个数,我们只要一个个地数它的元素就可以了.最后数到的那个数是多少,元素的个数就是多少.一个个地去数 M 中元素,事实上就是依次用正整数去给 M 中元素编号,比如说数到了 5,那就是从 M 中挑出了一个元素 e,把它叫做第五号,它可以记作 e_5,这时必定已经先有了 e_1,e_2,e_3,e_4.因此,如果一个集合 M 含有 n 个元素,那么经过这样的"数"的过程以后,就排成了下述形状:

$$M=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}.$$

现在设想 M' 是另外一个也是由 n 个元素组成的集合,那么对它的元素数过以后自然也就排成了

$$M'=\{e_1',e_2',\cdots,e_n'\}.$$

由于 M 和 M' 中元素的个数相同,两处的 n 是同一个正整数.如果我们让 M' 中编号为 i 的元素 e_i' 和 M 中具有同一编号的元素 e_i 相对应,则这个对应是一对一的.反之,如果 M'' 是另一个集合,元素的个数并不知道.但是有一种办法使它的元素 e'' 和 M 的元素 e 一个一个地对应起来,则 M'' 中元素的个数必定也正好是 n.就好像我们如果已知有 100 个人,另外还有一堆书,不知有多少,但是当每人拿一本时,正好拿完,既没有人拿两本,也没有人没有拿,那么书的本数就一定是 100,用不着再一本本地去数.如果人数事先也是未知的,那么我们当然还是不知道书有多少本,但是我们可以肯定人和书的数目必定是相同的.即这个"人的集合"和这个"书的集合"的元素个数相同.

以上的分析表明:要说明两个有限集合 M 和 M' 具有同样多的元素,我们并不需要知道它们元素的个数是多少,而只要能在它们的元素之间建立起一个一一对应的关系来就可以了.这个事实启示我们如何去研究无穷集合中元素的数量,即如何鉴别两个无穷集合的元素的数量是否有差别.要注意,对于无穷集合来说,元素的"个数"这个概念已是完全没有意义了.

定义 1　设 A,B 是两个集合,如果存在二者元素之间的一个对应关系 φ,使 A 中任意元素 x,通过 φ 都恰与 B 中一个元素 y 对应,而 B 中任意的 y 也一定是 A 中某一 x(通过 φ)在 B 中的对应元素,则我们就说 A 和 B 是**对等的**或**具有相同的基数**,记为 $A\sim B$.而满足上述条件的对应 φ 称之为 A 和 B 之间的一个 1-1 对应.(注意 $A\sim B$ 和 $A=B$ 不同.)

显然,两个集合"具有相同的基数"是有限集合的"具有相同的元素个数"这一概念的推广(因为对于有限集合来说,A 和 B 在且只在它们的元素个数相同时才能对等).因此"基数"就应该是"元素个数"这一概念的推广.但是到底什么是集合的基数,我们不打算给出一个明确的回答,而且也很难给出一个明确的回答,因为这是一个很复杂的问题.我们只能认为基数是任何集合都具有的一个属性,任意两个集合,如果它

们是对等的，则它们的基数就相同.反之，如果两个集合的基数相同，则它们必定是对等的，即必定可以作出它们之间的 1-1 对应关系来.集合 A 的基数记为 $\overline{\overline{A}}$，A 和 B 的基数相同便可记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.显然基数的相等是具有对称性和传递性的.即如果 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 则 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}$；如果 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{C}}$，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{C}}$.（集合的基数也称为集合的**势**或**权**.）

例 1 设 B 是全体正整数所作成的集合，A 是全体偶数所作成的集合，则 $A\sim B$.因为只要令 B 中的 n 与 A 中的 $2n$ 对应，即可建立一个 B 和 A 之间的 1-1 对应.

例 2 设 A 是开区间 $(0,1)$ 中所有的点所作成的集合，B 是半轴 $(0,\infty)$ 上所有的点所作成的集合，则 $A\sim B$.

事实上，如果用 C 表示图 1 所画圆弧（不带端点）上所有的点所作成的集合，通过将圆弧往 OX 轴上作垂直投影，可以将 A 中的点 x 与 C 中的点 z 一一对应起来，但是另一方面，通过从 P 点作中心投影，我们又可以将 C 中的点 z 和 B 中的点 y 一一对应起来，于是 A 中的点 x 也就和 B 中的点 y 一一对应起来了.

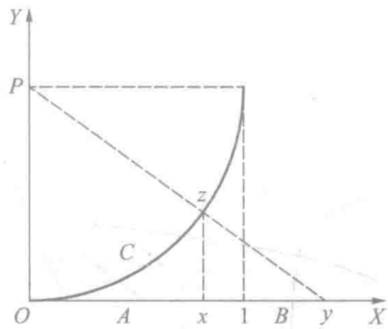

图 1

上述两个例子中的 A 都是 B 的真子集.所以这两个例子都是整个集合和它的一个真子集对等的例子.其所以可能是因为这两个例子中的 B 都是无穷集合.对于有限集合来说是绝不会出现这种状况的.我们还可以证明（见 §3 习题的第 5 题）任意无穷集合一定可以和它自己的某一个真子集对等.所以能和它的一个真子集对等是集合为无穷集合的特征性质.其实这是可以用来作为无穷集合的定义的.在前面，我们是把无穷集合理解为“不是有限集合的集合”而没给它下正式的定义.如果我们把无穷集合就定义为**能与它本身的一个真子集对等的集合**，任何无穷集合都能和它的一个真子集对等就不再成为需要证明的事情了.

大家也许会想：可能任意两个无穷集合都是对等的吧！假如真是如此，那么“对等”这个概念或者说基数概念的引进也就没什么大意思了.为了说明情况不是如此，我们先来证明下述定理（Cantor 定理）.

定理 1 $[0,1]$ 闭区间上所有的点构成的点集是不能和由全体正整数所构成的集合 $\mathbb{Z}_+$ 对等的.

证明 设不然，则存在一个 $\mathbb{Z}_+$ 和 $[0,1]$ 之间的 1-1 对应关系 φ.我们把 $[0,1]$ 区间上的与 $\mathbb{Z}_+$ 中的 n 对应的元素 $\varphi(n)$ 记为 x_n，则我们就将 $[0,1]$ 上全体的点排列成了一个序列：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots. \tag{*}$$

把$[0,1]$三等分，则显然$\left[0,\frac{1}{3}\right]$与$\left[\frac{2}{3},1\right]$中至少有一个不含有$x_1$，用$I_1$表示任一这样的区间，则$x_1 \notin I_1$.把$I_1$三等分，在它们的左与右两个闭区间中必至少有一个不含x_2，用I_2表示一个这样的区间，则$x_2 \notin I_2$.同样把I_2三等分，又可得不含有x_3的一个闭区间I_3，依此类推，根据归纳法，得到闭区间序列$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足条件：

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$；

(ii) $x_n \notin I_n, n=1,2,3,\cdots$；

(iii) I_n的长度为$\frac{1}{3^n}$，所以当$n \to \infty$时趋于0.

根据闭区间套定理，存在点$\xi \in I_n, n=1,2,3,\cdots$.由于$x_n \notin I_n$对一切$n$成立，故$\xi$不可能是某一$x_n$.但$\xi$显然属于$[0,1]$，这与(*)是由$[0,1]$上全体的点排成相矛盾.

定义 2　设A,B是两个集合.如果A和B不对等，但存在B的某子集B^*使A和B^*对等，则我们就说A的基数$\overline{\overline{A}}$小于B的基数$\overline{\overline{B}}$，记为$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

A的基数小于B的基数也可以说成B的基数大于A的基数，记为$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$.

上述$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$的定义中，特别写明了"$A$和$B$不对等"这样一个条件，它的必要性是显然的.因为如果A是一无穷集合，则A是可以和它自己的一个真子集对等的，因此如果定义$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，只要求$A$能和$B$的一个真子集对等而不加$A$和$B$不对等的限制，就会得出$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{A}}$的结论来，这显然是不合适的.但是现在这样的定义是否就合理了呢？按现在这样的定义，会不会出现既有$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$又同时有$\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$的情况呢？下面的 Bernstein 定理说明这是不会的.

定理 2　若A,B是两个集合.如果存在A的子集A^*，B的子集B^*，使$A \sim B^*$，$B \sim A^*$，则$A \sim B$.

证明　设φ是A和B^*之间，ψ是B和A^*之间的一个1-1对应关系.令$A_0=A^*$，$B_0=B^*$，$A_1=A-A_0$.然后定义

$$B_1=\varphi(A_1) \overset{\text{def}}{=\!=} \{y; y=\varphi(x), x \in A_1\},$$

$$A_2=\psi(B_1) \overset{\text{def}}{=\!=} \{x; x=\psi(y), y \in B_1\},$$

("$\overset{\text{def}}{=\!=}$"表示式右是式左的记号的定义)由于$A_2 \subset A_0$，所以$A_1 \cap A_2=\varnothing$.再令$B_2=\varphi(A_2)$，注意$\varphi$是1-1对应，便知$B_1 \cap B_2=\varnothing$.一般说来，如已作出$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相交，$B_1$，$B_2, \cdots, B_n$互不相交，$A_{i+1}=\psi(B_i)$，$B_i=\varphi(A_i)$，$i=1,2,\cdots,n-1$，则取

$$A_{n+1}=\psi(B_n), \quad B_{n+1}=\varphi(A_{n+1}).$$

由于ψ是1-1对应，从$B_1, B_2, \cdots, B_n$互不相交可知A_{n+1}和$A_2, A_3, \cdots, A_n$互不相交.又$A_{n+1} \subset A_0$，故A_{n+1}和A_1也不相交.再由于φ是1-1对应，$A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$互不相交便知$B_{n+1}$与$B_1, B_2, \cdots, B_n$互不相交.这样我们就得出了两串互不相交的集合$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$，使$A_{i+1}=\psi(B_i)$，$B_i=\varphi(A_i)$，$i=1,2,3,\cdots$.于是$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\varphi}{\sim} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.又通过$\psi$，$B \sim A_0$，$B_k \sim A_{k+1}$，故