时代云图 SHI DAI YUN TU

理工社®

2020

【张宇数学教育系列丛书】

4

张宇
考研数学
题源探析经典
1000题

（习题分册·数学一）

张宇 主编

时代云图

扫码 查真伪

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

时代云图 SHI DAI YUN TU　理工社®

【张宇数学教育系列丛书】

张宇
考研数学
题源探析经典
1000题

（习题分册 · 数学一）

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题．习题分册．数学一／张宇主编．—北京：北京理工大学出版社，2019.3(2019.7重印)

ISBN 978-7-5682-6818-9

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第038920号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／蠡县天德印务有限公司
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／7.5
字　　数／187千字
版　　次／2019年3月第1版　2019年7月第4次印刷
定　　价／66.80元(共2册)

责任编辑／高　芳
文案编辑／胡　莹
责任校对／杜　枝
责任印制／李志强

Preface 前言

按照考研数学历年的命题规律和风格，结合最新的信息，考生在 2020 年考研复习备考中应做到以下五点：一是将考研基础知识和常规题目作为复习主体；二是要加强综合性试题的训练；三是加强计算能力的培养，使自己具备较强的处理数学计算过程的本领，要知道，绝大多数数学题都是要通过准确的计算才能得到正确答案的；四是要加强应用能力的培养，多做用数学基础知识解决实际问题的题目；五是要全面复习，将考研大纲中的所有知识作为复习范围，不要有所偏颇。以上五点也将是 2020 考研命题的趋势，请各位考生重视。

本书是对题源的最新研究成果，它尽力搜集和命制了题源本身或与题源相关的重要考题，值得考生在复习全过程中认真做题、消化。我也将在各种场合对本书的题目进行详细讲解并予以重点提示，以期让考生把握住考试命题方向，准确复习备考。题源和题库研究是公共资源，从 2019 年考研命题的情况来看，它并不回避市面上已经公开的题源，甚至可考到原题，于是，我很高兴把我们所掌握的信息提供给全国考生，并乐于与大家分享这些资料。这对消除考研数学的神秘感，进一步促进考试的公正性与科学性都会起到重要作用。

这本《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》最初是按照数学一、数学二、数学三平均 1000 道题左右来命名的，多年来一直这样叫下来，成为了考研习题集的一个经典名称。事实上，数学一考试内容最多，题目不止 1000 道，数学二考试内容最少，题目少于 1000 道，数学三的考试内容居中，近于 1000 道。

衷心感谢原命题专家们给予的指导与帮助。希望考生认真研读、操练本书中的每一道题目，提高解题能力，争取考研得到高分。

张宇

2019 年 2 月　于北京

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

01

高等数学

高等数学是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在考研数学一试卷中分值为82分，约占56%。

第 1 章　极限、连续

一、函数极限

1.1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}}{e^{x^2}-1}$.

1.2 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$.

1.3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$.

1.4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)(1-\cos 2x)-2x^2}{x^4}$.

1.5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}\sin^2 x-\tan^2 x}{x^2[\ln(1+x)]^2}$.

1.6 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x+x^3\cos\dfrac{1}{x}}$.

1.7 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}$.

1.8 求$\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^x\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}\displaystyle\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)\,dt}dt$.

1.9 求$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

1.10 求$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

1.11 求$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2)$，其中常数$a>0$.

1.12 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$.

1.13 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-xe^{\frac{1}{x}})$.

1.14 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

1.15 求$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}$.

1.16 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1.17 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

1.18 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.19 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}$.

1.20 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)\sin\dfrac{x^2}{2}}$.

1.21 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

1.22 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

1.23 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{x\sin^2 x}$.

1.24 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

1.25 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$，其中 $a\neq 0$.

1.26 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

1.27 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-1\right)\sin x}$.

1.28 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x}\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

1.29 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

1.30 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$.

1.31 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

1.32 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$.

1.33 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

1.34 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且 $a_i\neq 1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant 2$.

1.35 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A\ (a>0,a\neq 1)$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

1.36 已知$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2\mathrm{e}^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)$.

1.37 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，证明：存在常数 A,B，使得当 $x\to 0^+$ 时，恒有

$$f(x)=\mathrm{e}+Ax+Bx^2+o(x^2),$$

并求常数 A,B.

1.38 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}=D\neq 0$. 求常数 A,B,C,D.

1.39 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x-x}, & x<0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x^2+x-1}{x\sin\frac{x}{6}}, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f[g(x)]$.

1.40 设 $\alpha\geqslant 5$ 且为常数，则 k 为何值时极限

$$I=\lim_{x\to+\infty}[(x^\alpha+8x^4+2)^k-x]$$

存在，并求此极限值.

1.41 已知极限

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^4}+\frac{c}{x^5}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)=1,$$

求常数 a,b,c.

1.42 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

1.43 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-2}}$.

1.44 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

1.45 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，证明：极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，且极限值小于 $1+\dfrac{\pi}{4}$.

1.46 设 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 满足 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，且 $f(0)=1$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且极限值小于 $1+\dfrac{\pi}{2}$.

二、无穷小比阶

1.47 当 $x\to 0$，$(1-\cos x)\ln(1+2x^3)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x\tan^2 x}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 $n=$ ________.

1.48 当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{1+\tan\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sin\sqrt{x}}$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$ ________.

1.49 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ 是无穷小量 x^k 的同阶无穷小，则 $k=$(　　).

(A)1　　(B)2　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{3}{2}$

1.50 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中，最高阶的无穷小是(　　).

(A)$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$　　(B)$1-\cos x$

(C)$\tan x-\sin x$　　(D)$e^x+e^{-x}-2$

1.51 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中，与 x 同阶的无穷小是(　　).

(A) $\sqrt{1+x}-1$　　(B)$\ln(1+x)-x$

(C)$\cos(\sin x)-1$　　(D)x^x-1

1.52 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin x+\int_0^x t^2 e^{t^2}\,dt$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$(　　).

(A)3　　(B)4　　(C)5　　(D)6

1.53 当 $x\to 0^+$ 时，试比较无穷小量 α,β 和 γ 三者之间的阶，其中

$$\alpha=\int_0^x \cos t^2\,dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt.$$

1.54 当 $x\to 0$ 时，$\sin x(\cos x-4)+3x$ 为 x 的几阶无穷小？

1.55 当 $x\to 0$ 时，确定下列无穷小量的阶数：

(1)$\tan(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$；

(2) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$；

(3)$3^{\sqrt{x}}-1$.

1.56 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\cos x\cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小，则 $c=$ ________，$k=$ ________.

1.57 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 对于无穷小 x 的阶数等于________.

1.58 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=A\neq 0$ 的充要条件是(　　).

(A)$\alpha>1$　　(B)$\alpha\neq 1$　　(C)$\alpha>0$　　(D) 与 α 无关

1.59 设当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

1.60 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=ax^3+bx$ 与 $g(x)=\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)\,dt$ 是等价无穷小，则(　　).

(A)$a=\dfrac{1}{3},b=1$　　(B)$a=3,b=0$　　(C)$a=\dfrac{1}{3},b=0$　　(D)$a=1,b=0$

1.61 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，则正整数 n 为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

1.62 当 $x\to\pi$ 时，若有 $\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim A(x-\pi)^k$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

1.63 半径分别为 $R,r(R>r>0)$ 的两个圆相切于坐标轴原点. 如图 1-1-1 所示.

(1) 当 $x\to 0^+$ 时，若线段长 MM_1 与 x^k 同阶，求 k；

(2) 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\angle MOM_1$ 与 x^c 同阶，求 c.

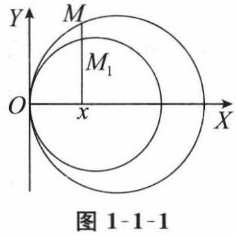

图 1-1-1

三、数列极限

1.64 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(\sin\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{n}\right)$.

1.65 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$.

1.66 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\dfrac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$.

1.67 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})$,其中$a>0$.

1.68 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.69 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

1.70 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$,$a>0$.

1.71 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}$存在且不为零,则常数$k=$ ________.

1.72 设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$,则(　　).

(A)$\{a_n\}$有界　　(B)$\{a_n\}$不存在极限

(C)$\{a_n\}$自某项起同号　　(D)$\{a_n\}$自某项起单调

1.73 设数列$\{x_n\}$满足$x_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$,则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,但不为零

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$可能存在,也可能不存在

1.74 已知数列$\{a_n\}$单调,下列结论正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{a_n}-1)$存在　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a_n^2}$存在

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n$存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a_n^2}$存在

1.75 设$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=\dfrac{2a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}(n=1,2,\cdots)$.

(1) 求$b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$的表达式;

(2) 求$\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$和$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

1.76 设$a_1=3,a_{n+1}=a_n^2+a_n(n=1,2,\cdots)$,求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\right).$$

1.77 已知$x_1=\dfrac{1}{2}$,$2x_{n+1}+x_n^2=1$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.78 设 $x_1=1,x_n=1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}}(n=2,3,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

1.79 设 $x_1=1,x_{n+1}=\dfrac{x_n+3}{x_n+1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.80 设当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$a\leqslant f(x)\leqslant b$，并设存在常数 k，$0\leqslant k<1$，对于 $[a,b]$ 上的任意两点 x_1 与 x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$. 证明：

(1) 存在唯一的 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\xi$；

(2) 对于任意给定的 $x_1\in[a,b]$，定义 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

1.81 已知 $(2+\sqrt{2})^n=A_n+B_n\sqrt{2}$，$A_n,B_n$ 为整数，$n=1,2,3,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{B_n}$.

1.82 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x$，$x\in[0,+\infty)$，设 $a_1\geqslant0$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列；

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，则有 $f(t)=t$；

(3) 若条件改为 $0\leqslant f(x)<x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $t=0$.

1.83 (1) 设 $f(x)=x+\ln(2-x)$，求 $f(x)$ 的最大值；

(2) 设 $x_1=\ln 2$，$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\ln(2-x_i)$，$n=2,3,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其极限值.

1.84 设 $x_1=1$，$x_n=\int_0^1\min\{x,x_{n-1}\}\mathrm{d}x$，$n=2,3,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其极限值.

1.85 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<1$，$\ln(1+x_n)=\mathrm{e}^{x_{n+1}}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明

(1) 当 $0<x<1$ 时，$\ln(1+x)<x<\mathrm{e}^x-1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

1.86 (1) 证明方程 $x=2\ln(1+x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根 ξ；

(2) 任取 $x_1>\xi$，定义 $x_{n+1}=2\ln(1+x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

1.87 (1) 证明方程 $\mathrm{e}^x+x^{2n+1}=0$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一实根 x_n，$n=0,1,2\cdots$；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值 a；

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-a)$.

1.88 设 $F(x,y)=\dfrac{f(y-x)}{2x}$，$F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$，$x_0>0$，$x_1=F(x_0,2x_0)$，$\cdots$，$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)$，$n=1,2,\cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

1.89 已知 $f_n(x)=\mathrm{C}_n^1\cos x-\mathrm{C}_n^2\cos^2x+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^n\cos^nx$.

(1) 证明方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 中仅有一根 x_n，$n=1,2,3,\cdots$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(\arccos\dfrac{1}{n}\right)$；

(3) 设 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

1.90 (1) 证明：当 $x\to0^+$ 时，不等式 $0<\tan^2x-x^2<x^4$ 成立；

(2) 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\tan^2\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.91(1) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f'(x)>0, x\in(0,+\infty)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；

(2) 证明 $f(x)=(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，其中 n 为正整数；

(3) 设数列 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、连续与间断

1.92 当 $x\in\left(-\frac{1}{2},1\right]$ 时，确定函数 $f(x)=\dfrac{\tan\pi x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并判定其类型.

1.93 确定函数 $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|x^2-|x|}$ 的间断点，并判定其类型.

1.94 设 $a>0, b>0, c>0$，

$$A(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ c, & x=0.\end{cases}$$

(1) 讨论 $A(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

(2) 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}A(x)$，$A(-1)$，$A(1)$ 五者之间的大小关系.

1.95 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续区间、间断点，并判别间断点的类型.

1.96 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型.

1.97 若 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则(　　).

(A) $\lambda<0, k<0$　　(B) $\lambda<0, k>0$　　(C) $\lambda\geqslant 0, k<0$　　(D) $\lambda\leqslant 0, k>0$

1.98 若 $f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，则 $a=$ ________.

1.99 试讨论函数 $g(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^x+\beta, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

1.100 求函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$ 的间断点，并判断它们的类型.

1.101 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+e^{nx}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判定其类型.

1.102 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x<0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型.

1.103 设 $f(x;t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$ $((x-1)(t-1)>0, x\neq t)$，函数 $f(x)$ 由表达式

$$f(x)=\lim_{t\to x}f(x;t)$$

确定，求 $f(x)$ 的连续区间和间断点，并判定间断点的类型.

1.104 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是$[a,b]$上的一个点列，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}}$.

1.105(1) 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}\,(x\geqslant 0)$ 的表达式；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

1.106 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，求 a,b 的值.

1.107 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+1}{|x+1|(x^2-x)}\sin\left(\dfrac{|x-1|}{x+2}\pi\right)$ 的所有间断点，并判断它们的类型.