

AP 微积分 辅导手册

吴文忠 编著

Cracking the AP Calculus

AB&BC

AP备考5分之选

中英文结合

完善的配套训练

全面对接国内高中数学

高效覆盖AP微积分考点



化学工业出版社

AP 微积分 辅导手册

吴文忠 编著

Cracking the AP Calculus



化学工业出版社

· 北京 ·

《AP 微积分辅导手册》融汇众多成功案例，直击中国学生的薄弱点，解构整门考试的知识点、考点，为参加 AP 微积分考试的中国学生提供一套应对 AP 微积分 (AB&BC) 考试的完备方案。希望考生学完本书内容，可以顺利通过考试。

《AP 微积分辅导手册》一书的内容有：函数、极限和连续性、导数、微分、不定积分和定积分、积分的应用、微分方程和级数，涵盖了 AP 微积分 AB 和 AP 微积分 BC 考试大纲中要求的全部考点，并且有相关的例题演示，在理论讲解上兼顾实战性。

本书适合准备前往海外读大学的高中生，准备参加 AP 考试的考生学习使用，同时可用作相关培训和辅导机构的参考教材。

图书在版编目 (CIP) 数据

AP 微积分辅导手册/吴文忠编著. —北京：化学工业出版社，2018.8
ISBN 978-7-122-32488-7

I. ①A… II. ①吴… III. ①微积分-高等学校-入学考试-美国-自学参考资料 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 136537 号

责任编辑：要利娜
责任校对：王素芹

文字编辑：吴开亮
装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）
印 刷：北京京华铭诚工贸有限公司
装 订：北京瑞隆泰达装订有限公司
787mm×1092mm 1/16 印张 19½ 字数 466 千字 2018 年 11 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网 址：<http://www.cip.com.cn>
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：59.80 元

版权所有 违者必究

前言

Foreword

自 2012 年开始，不经意间竟攒下教学总结数百页。同时，伴随着学员的好成绩，越来越多家长找到我，希望我辅导孩子学习微积分，也在很多家长朋友建议下，我开始萌生编撰本书的想法。

2014 年本书部分内容线上发布，截止到 2017 年元旦，累计读者 12 万多人次，许多学生考出 5 分（满分）的优异成绩，我感到很自豪！

置身教学第一线多年，我深切体会到学生在微积分学习上的难点、易错点和薄弱点。微积分很抽象，学生在学习过程中，可能遭遇抽象性和数学语言符号化等困难，也可能遭遇有限运算到无限运算转变的困难，还可能遭遇基础不够等困难。

正是因为笔者知道如何才能培养和提高学生的能力，了解后继课程的需要以及沉淀教学经验，本书考虑到多数中国学生所遇到的问题和需求，并完全适应最新的 AP 微积分考纲（2017 年），确保学生能从这本教材中真正地受益，取得好成绩。

如何阅读本书

本书在编排方式上循序渐进，便于读者随时参阅并配合练习，合理使用本书，将大有裨益。

首先，充分了解 AP 微积分并及早制订学习计划。第 1 章，详细介绍了 AP 微积分及考试大纲、常见问题、试卷结构和考试时间等，帮你打“有准备的战”，帮你制订出适合自身的学习计划。

其次，全面掌握本书每一个知识点。第 2 章，集中回顾了 Pre-Calculus 知识点，用来确保学习微积分良好的数学基础；第 3~11 章，每章都有思维导图、英文思维的核心概念、精选的 Example、方法总结和 Note 标注，多层次地帮你全面掌握每一个必考知识点。

最后，注重练习与分享。演算典型例题和习题，真题实战训练，是保证考试成绩不可或缺的一个环节。并且，以分享者的角色来阅读，效果大不一样。

分享的阅读方式可以增强记忆、加深体会、扩大视野。开诚布公地与人分享读书心得，可以为你带来一群学习好伙伴。也欢迎通过微信与我取得联系，加入官方阅读群。

你将有何收益（本书的特点）

我想借用美国作家 Marilyn Ferguson 的一段话：

“谁也无法说服他人改变。我们每个人都守着一扇只能从内开启的改变之门，不论动之以情或晓之以理，我们都不能替别人开门。”

当你决定对微积分打开“接纳之门”，接纳本书，你将得到以下收获。

首先，一书在手，AP 微积分考试无忧。

微积分在近代数学的地位绝无仅有，本书聚焦 AP 微积分考试，共计 11 章，有效覆盖 AP 微积分考试所有考点，专注于中国学生的需求。

- 详细介绍了 AP 微积分及其考试，精心汇编了专业词汇；

- 以美国本土广为流行的 TI-89 Titanium * 为例，讲解图形计算器使用；

- 解构知识点、考点，精心配备了 380 余道典型例题，100 余道课后习题；

- 直击考生薄弱点，函数图像、图表 200 多幅，Note 标注近 80 处，方法总结超过 30 个。

作为一本内容翔实的备考教材，本书还针对考生 Free-Response 薄弱的状况，习题“分解式”紧密呼应考点并附详细解答，全面对接国内高中数学，衔接 Pre-Calculus，让基础薄弱的同学无忧，还总结了考试常用公式定理，实现“一书在手，AP 微积分考试无忧”。

其次，希望本书能弥补预定不上我们课程的遗憾。

本书一开始即为 AP 微积分辅导课程编撰，参加我的课程无疑是一个好选择，然而，由于笔者时间不足，一部分同学可能预定不上，希望本书弥补笔者的部分遗憾，以另一种形式为你的备考出力。

- 例题选取上，如本书 Example 5.42，在常规求导 (Derivative) 外，示例避开繁杂运算，Example 5.47 再示例简化方法，颇费心思；

- 梯度设置上，如本书 5.4.1 节 Chain Rule 的实际应用，分解举例，先结合 Quotient Rule，再结合三角函数，循序渐进，步步深入考生的难点；

- 类似本书 7.3.2 节和 7.3.3 节，点出学生容易掉入的“坑”，并不仅仅停留于理论分析，还分解具体题型（如本书 7.3 节、7.4 节和 7.5 节），帮考生“跳出坑”；

- 准确把握知识程度，如本书 3.1 节，明确指出极限的考试范围是函数极限，不包含数列极限，4.1 节讲解连续，不用一般性定义，选用 3 个判断条件；

- 力求帮助同学们“知其然，更知其所以然”，如以 Example 形式给出导数基本公式证明，同学们可以掌握导数基础公式，还可以跟随练习。

通过研究真题发现，只给函数图像，不给解析式，中国考生很不习惯，特别在 Free-Response 部分。于是，借助我们过去开发的针对性训练，在本书各个章节分布重点函数图像。

笔者清楚，选修 AP 微积分的学生情况多种多样，基础参差不齐，部分学生对数学兴趣不大，对微积分的重要性也不了解。本书入门门槛不高，突出重点，注重知识点内在脉络，使学生能逐步学好微积分。

最后，中英文结合，不止于通过 AP 微积分考试。

本书定位：做更适合中国考生的 AP 微积分辅导教材。一些英文原版教材对中国考生而言，或讲解过于空泛，或例题与知识点呼应不够紧密；国内不乏优秀的微积分教材，而专门针对 AP 微积分的却比较少。

本书汲取多本知名英语原著教材之精华，参考国内知名高等数学教材（见参考文献），中英文结合，英文思维为主，辅以母语的优势：

- 专业词汇中英文对照；

- 基本概念、定义和性质，典型例题、习题和解答，英文思维，英文表达；

- 过程讲解发挥母语优势，脉络清晰，重点内容标注专业英语词汇；

- 让你轻松应对 AP 微积分考试，更适应未来国外的大学数学课堂。

一本 AP 微积分辅导教材，若能尽可能快地向学生介绍微积分的基本概念、方法和应用，鼓励学生“数形结合”“特值代入”等直观形象地分析、演算及思考，重点加强学生代数运算

和抽象思维，兼顾中英文数学差异，这才是更适合中国考生的。

读者对象

本书可以作为一些学校和老师的 AP 微积分课程参考教材，也适合很多刚进入 AP 微积分辅导行业老师入门参考。本书适合如下读者：

- 在初中和高中阶段选修 AP 微积分的同学；
- 有出国意愿和规划的国内同学；
- 就读于国内国际班或国际学校的同学；
- 就读于国外高中，计划申请一流大学的同学；
- 已经获得国外大学 offer，而又想有所提高的同学；
- 微积分或数学爱好者。

勘误和支持

由于笔者的水平有限，书中难免出现一些不妥之处，在此恳请读者批评指正。笔者个人微信号（709645945），将努力回答所有与本书内容相关的问题，虚心接受您的宝贵意见和各种批评建议。另外，微信订阅号“AP 微积分”（微信号：apcalculus）用于及时更新读者反馈和最新的研究成果。

致谢

感谢我的学生们，让笔者更清楚学生的薄弱点在哪里，更需要什么，以及如何更高效并更有保障地获取 5 分（满分）的成绩。部分学生已经步入社会的各领域，看着学生的成长，笔者觉得自己的工作很有意义。

感谢众多家长朋友的信任和支持，有些凭借十几分钟的电话，素未谋面，便把孩子的学习托付到我手上，这份信任一直鼓舞着我。

感谢化学工业出版社的编辑，始终支持我的写作，让我顺利完成本书全部书稿。

谨以此书献给我最亲爱的家人和朋友们！

编著者

目录

Content

第 1 章 AP 微积分简介 **Introduction of AP Calculus** 001

- 1.1 课程及考试 The Courses and Examinations 001
- 1.2 AP 微积分 AB 和 BC 大纲要求 The Examination Outline of AP Calculus
AB & BC 004
- 1.3 AP 微积分参考词汇表 Reference Vocabulary of AP Calculus 006
- 1.4 图形计算器的使用 Use of Graphing Calculators 013

第 2 章 函数 **Functions** 019

- 2.1 函数的定义 Definition of Functions 020
- 2.2 函数的基本性质 Function Basic Properties 022
- 2.3 基本初等函数 Basic Elementary Functions 023
- 2.4 反函数 & 复合函数 Inverse Functions & Composite Functions 033
- 2.5 函数变换 Transforming of Functions 035
- 2.6[#] 参数方程 & 向量函数 Parametric Equations & Vector Functions 037
- 2.7[#] 极坐标函数 Polar Functions 039
- 2.8 习题 Practice Exercises 041

第 3 章 极限 **Limit** 043

- 3.1 极限的定义 Definition of the Limit 044
- 3.2 极限存在的判定 The Limit does Exist or Not 045
- 3.3 极限的运算 Operations of Limit 047
- 3.4 极限的应用 Applications of Limit 052
- 3.5 习题 Practice Exercises 053

第 4 章 连续 **Continuity** 055

- 4.1 连续性的定义 Definition of the Continuity 056

4.2	间断点的分类 Kinds of Discontinuities	059
4.3	连续函数定理 The Continuous Functions Theorem	061
4.4	习题 Practice Exercises	063

第5章 导数和微分 **Derivative and Differential** 065

5.1	导数的定义 Definition of the Derivative	066
5.2	可导性和连续性 Derivability and Continuity	072
5.3	导数的基本公式和法则 Basic Differentiation Formulas and Rules	075
5.4	链式法则和反函数求导 The Chain Rule & Derivative of an Inverse Function	077
5.5	隐函数求导和二阶导数 Implicit Differentiation & Second Derivatives	082
5.6 [#]	参数方程求导 Derivatives of Parametric Equations	088
5.7 [#]	向量函数和极坐标函数求导 Derivatives of Vector Functions and Polar Functions	090
5.8	微分 Differential	093
5.9	习题 Practice Exercises	096

第6章 微分的应用 **Applications of Differential Calculus** 098

6.1	切线方程和法线方程 Equations of Tangent and Normal	099
6.2	最值问题 The Problems of Maxima and Minima	101
6.3	运动问题 The Problems of Motion	112
6.4	微分中值定理 The Mean Value Theorem for Derivatives	118
6.5	洛必达法则 L'Hôpital's Rule	120
6.6	估算问题 The Problems of Estimate	125
6.7 [#]	欧拉方法 Euler's Method	129
6.8	习题 Practice Exercises	130

第7章 不定积分 **The Indefinite Integral** 132

7.1	不定积分的定义 Definition of The Indefinite Integral	133
7.2	不定积分公式 Formulas of The Indefinite Integral	135
7.3	U-替换法 U-Substitution	138
7.4 [#]	分部积分法 Integration by Parts	148
7.5 [#]	有理函数的积分 Integration of Rational Functions	153
7.6	不定积分的应用 Applications of Indefinite Integral	156
7.7	习题 Practice Exercises	157

第 8 章 定积分 **The Definite Integral** 159

8.1 黎曼和与梯形法则 Riemann Sums and Trapezoid Rule	160
8.2 定积分的定义 Definition of the Definite Integral	165
8.3 微积分基本定理 The Fundamental Theorem of Calculus	169
8.4 定积分的性质 Properties of Definite Integral	174
8.5 积分中值定理 The Mean Value Theorem for Integrals	176
8.6 定积分的计算 The Operations of Definite Integrate	178
8.7# 广义积分 Improper Integrals	180
8.8 习题 Practice Exercises	185

第 9 章 积分的应用 **Applications of Integral** 186

9.1 面积 Area	187
9.2 体积 Volume	195
9.3# 弧长 Arc Length	204
9.4 位移和距离 Displacement and Distance	206
9.5 习题 Practice Exercises	207

第 10 章 微分方程 **Differential Equations** 209

10.1 一阶微分方程 First-Order Differential Equations	210
10.2 求解可分离变量微分方程 Solving Separable D. E.	211
10.3 斜率场 Slope Fields	213
10.4 指数增长与衰减 Exponential Growth and Decay	216
10.5 约束增长与衰减 Restricted Growth and Decay	219
10.6# 逻辑斯谛微分方程 Logistic Differential Equation	222
10.7 习题 Practice Exercises	225

第 11 章 无穷级数 **Infinite Series** 226

11.1 数列的极限 The Limit of The Sequence	227
11.2 无穷级数 Infinite Series	228
11.3 四类重要级数 Four Important Series	232
11.4 正项级数的四大判别法 Four Tests of Nonnegative Series	235
11.5 绝对收敛和条件收敛 Absolute and Conditional Convergence	240
11.6 幂级数 Power Series	242
11.7 泰勒级数和麦克劳林级数 Taylor and Maclaurin Series	245
11.8 幂级数的计算 Computations with Power Series	251

11.9 习题 Practice Exercises	254
----------------------------------	-----

习题答案 Practice Answer	<i>255</i>
-----------------------------	------------

附录 Appendix	<i>287</i>
--------------------	------------

A.1 常用公式和定理 Common Formulas and Theorems	287
--	-----

A.2 AP 微积分公式总结 Summary AP Calculus Formula	291
--	-----

A.3 VIP 服务及网站	298
---------------------	-----

参考文献 References	<i>299</i>
------------------------	------------

第 1 章

AP 微积分简介

Introduction of AP Calculus

微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性无论怎么评价都不过分。

The calculus was the first achievement of modern mathematics and it is difficult to overestimate its importance.

——【美】冯·诺依曼 (Von Neumann)

1.1 课程及考试 The Courses and Examinations

恩格斯指出，“在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹和唯一的功绩，那就正是在微积分这里。”

微积分是数学的一个基础学科；在物理、化学、生物、工程、医学和经济学等很多学科上，微积分也都有广泛应用，其价值难以估量。

这里以笔者微信的个性签名与大家共勉，一起开启这门课程的学习：

仰望莱布尼茨、牛顿肖像；

拉格朗日，傅里叶旁，追逐黎曼最初梦想……

1.1.1 为什么要参加 AP 微积分考试 Why would you like to join the examination of AP Calculus

其一，微积分的学习是世界各国高等教育的重要内容之一，被绝大多数大学专业列为必修课程，AP 微积分能使同学们提前接触到这门重要的大学课程。

其二，AP 微积分考试成绩达 4 分或 5 分，美国大多数的大学可以置换相应的学分，有些大学也接受 3 分的成绩。这意味着，虽然还没进大学，你已经拿到大学的学分，为你的大学教育节约时间成本并省下一笔高昂的学费。

其三，AP 微积分成绩标志着一个学生的数学学术能力，对申请高水平大学具有重要的参考价值。即便最后 AP 微积分考试成绩不能置换学分，也足以证明你在中学已经学习了高等数学的课程，给大学数学学习打下坚实的基础。

另外，微积分知识对于理解 AP 经济学中边际、弹性等概念有很好的帮助，学习 AP 物理需要用微积分知识作为工具，所以，AP 微积分成为很多同学的首选科目。

1.1.2 AP 微积分 AB 和 BC 有什么区别 What are the differences between AP Calculus AB and BC

AP 微积分课程包括微积分 AB 和微积分 BC 两门课。微积分 AB 大致相当于国内文科高等数学第 1 学期的内容和难度。微积分 BC 大致相当于国内普通工科第 1 学年（2 学期）微积分课程的内容和难度。内容上，微积分 BC 涵盖了 AB 的所有内容，具体请参考本书 1.2 节（AP 微积分 AB 和 BC 大纲要求），本书加“#”内容为 BC 要求而 AB 不要求的内容。

因为考试时间重合，一年之内，AB 和 BC 只能选择一科，但并不要求一定得先考 AB 再考 BC。假如同学们参加微积分 BC 的考试，微积分 BC 的成绩单上面同时会提供微积分 AB 的成绩。

对于未来专业选择生物化学、社会科学、普通商科及管理类的同学而言，BC 基本涵盖了大学本科所有的教学内容，拿到 5 分并兑换 AP 学分，意味着大学不需要再修习微积分课程。对于专业方向是数学、计算机、物理、工程或经济、金融等专业的同学，BC 能相当好地满足后续学习要求。

部分同学纠结于选择 AB 还是 BC，多数情况下，建议结合自身数学基础、专业选择以及所申请大学的要求，酌情选择即可。特殊情况下，欢迎与我联系，定制最优方案。

1.1.3 AP 微积分考题结构和考试时间 The test form and schedule of AP Calculus

改革后，最新版（2017 年）的 AP 微积分，考题结构和考试时长不变：总时长 195 分钟，共 108 分。选择题，选项由 5 个减少为 4 个，无计算器部分增加 2 道，有计算器部分减少 2 道，对于考试时长调整了 5 分钟。见 Table 1.1.3。

Table 1.1.3 AP 微积分考题结构和考试时间（最新）

多项选择题 Multiple-Choice Section	总共 45 题/105 分钟	答对得 1 分，不答或答错均不得分不扣分，卷面分乘以系数 1.2 为最后得分。答对全部题得 54 分，占总分 50%
Part A: 无计算器	30 题/60 分钟	
Part B: 有计算器	15 题/45 分钟	
自由问答题 Free-Response Section	总计 6 题/90 分钟	每题 9 分，共 54 分，占总分 50%
Part A: 无计算器	2 题/30 分钟	
Part B: 有计算器	4 题/60 分钟	

每年具体考试日期可在微信订阅号“AP 微积分”（微信号：apcalculus）中回复“考试日期”查看。

1.1.4 制订你的学习计划 Make your plan

因为申请一般都在秋季，对计划出国的高中生而言，三年时间减少为两年半。为此，建议同学们在高一、高二合理安排 AP 微积分课程计划。高一至少完成微积分 AB 的课程学习并拿到理想成绩，至少获得 3 方面优势：

① 由于专业方向可能未确定，主要考虑因素是考试成绩，数学基础好的同学，直接报 BC，基础一般的同学，先报 AB，再报 BC，策略取胜，都能拿到理想的微积分考试成绩，为高水平大学申请“攒下”优势。

② 微积分知识对于理解 AP 经济学很多概念有帮助，是学习 AP 物理的工具，优先选报微积分，为选报其他 AP 课程打下知识基础。

③ 若是到后面，只剩下一年多一点的时间，要完成托福、SAT 或者 ACT 的考试，再加上 SAT2 和 AP 的压力，时间真的不够，所以，高一提前准备不止能获得更多考试机会，还能减轻压力。

1.1.5 自学或参加辅导 Learn By Oneself or Attend The After-school Class

理论上，任何课程都可以自学，本书十分适合中国学生用来自学 AP 微积分，在此，提供 4 点建议：

① 确保良好的数学基础，本书第 2 章重点回顾了微积分的预备知识 (Pre-Calculus)，希望同学们巩固掌握。

② 本书完全按照最新 AP 微积分考纲编写，突出重点，分章节编排，注重知识点内在脉络和联系，同学们应该把控进度，合理安排学习计划。

③ 依据本书各章给出的典型例题，一步一个脚印地掌握所有知识点，完成各章对应的练习题，做到举一反三，深入理解。

④ 结合 College Board 发布的 AP 微积分真题，贴近实战经验，保障考试发挥。

另外，AP 微积分是一门准大学水平课程，具有一定的挑战性，除了自学，本书配套 VIP (辅导) 服务体系，可通过“AP 微积分·考试网”(calculus.apexams.net) 或微信订阅号“AP 微积分”(ID: apcalculus) 与我取得联系。参加辅导将为你带来三方面的价值：

① 节约宝贵的时间成本 (划重点)，减轻压力。面临 TOEFL、SAT 或 ACT 考试，再有 SAT2 和 AP 的压力，时间真心不够，完善的课程体系和课程配套、资深的教研和师资给你支持，部分同学还能获得本人一对一亲自辅导。

② 高分，有保障。完善的课程体系，《AP 微积分真题导练》训练体系，对 AP 微积分考试的研究、评分规则的把握以及微积分的教学积淀，你将获得每一步推理根据、数学语言规范性和关键步骤 (步骤分) 等非常细节化的指导。

③ 启发思维。我认为这一点特别重要，教育是鼓励、引领和启发，上述两点是教学，这一点接近教育，除去考试，启发思维，你还能获得更多。

1.1.6 AP 微积分等级分和原始分转换 AP Score Conversion Chart Calculus

AP 微积分采取 5 分制，分别是：5 分非常优秀 (Extremely Well Qualified)；4 分优秀 (Well Qualified)；3 分及格 (Qualified)；2 分可能及格 (Possibly Qualified)；1 分无建议 (No Recommendation)。考生原始成绩都转换成 5 分制，每年略有变化，但总体趋势稳定。Table 1.1.6.1 是 2011 年 AP 微积分等级分和原始分转换表，并且历年成绩分布也非常接近，没有显著变化，Table 1.1.6.2 给出 2017 年微积分 AB 和 BC 的成绩分布。

Table 1.1.6.1 AP 微积分等级分和原始分转换表 (2011 年)

微积分 AB		微积分 BC	
考试实际分数	5 分制	考试实际分数	5 分制
68~108	5	69~108	5
52~67	4	59~68	4
39~51	3	44~58	3
27~38	2	36~43	2
0~26	1	0~35	1

Table 1.1.6.2 AP 微积分成绩分布 (2017 年)

等级分	AB		BC	
	人数	百分比	人数	百分比
5	59250	18.7%	56422	42.6%
4	56775	18.0%	23987	18.1%
3	65851	20.8%	26341	19.9%
2	69631	22.0%	18694	14.1%
1	64592	20.4%	7070	5.3%
全球平均分	2.93		3.78	

1.2 AP 微积分 AB 和 BC 大纲要求 The Examination Outline of AP Calculus AB & BC

最新改革后的 AP 微积分 (2017 年), 微积分 AB 增加考点 L'Hopital's Rule, BC 在 Series 部分增加考点 Limit Comparison test, Absolute and Conditional Convergence 以及 The Alternating Series Error Bound, 本书完全匹配支持, 除此之外, 因为 L'Hopital's Rule 很好用, 本书 BC 部分扩了其他不定式类型 (见 6.5.3 节), 提升学生能力。

内容上, BC 在 AB 基础上, 主要增加参数方程 (Parametric Equations)、向量函数 (Vector Functions) 和极坐标函数 (Polar Functions), 广义积分 (Improper Integrals) 以及无穷级数 (Infinite Series) 等。下面根据 College Board 发布的考试大纲详细说明。

1.2.1 基础知识 Basic Facts

- 1) 函数 (Functions) 和函数图像 (Graphs) 分析;
- 2) 基本初等函数的导数 (Derivatives) 和不定积分 (Antiderivatives);
- 3) 导数的积 (Product)、商 (Quotient) 和链式法则 (Chain Rules);
- 4) 使用矩形 (Rectangle) 的左边 (Left)、中点 (Midpoint) 或右边 (Right) 估算定积分, 使用梯形法则 (Trapezoid Rules) 估算定积分 (Definite Integrals);
- 5) 重要的定理: 罗尔定理 (Rolle's Theorem)、中值定理 (The Mean Value Theorem) 和微积分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus);
- 6) # 掌握参数方程 (Parametric Equations)、向量函数 (Vector Functions) 和极坐标

函数 (Polar Functions) 并应用于微积分。

1.2.2 极限和连续 Limits and Continuity

- 1) 掌握函数的极限, 包括单侧极限 (One-sided Limits);
- 2) 理解渐近性 (Asymptotic) 和无界性 (Unbounded) 并掌握渐近线 (Asymptote);
- 3) 理解函数的连续性 (Continuity) 并判断其连续性。

1.2.3 导数及其应用 Derivative and Its Applications

- 1) 理解导数是一个瞬时的变化比率 (Instantaneous Rate of Change), 并且能够应用这个概念。
- 2) 求解某点处的导数, 以及求方程的切线 (Tangent Line) 和法线 (Normal Line)。
- 3) 运用导数、二阶导数研究函数在上升/下降 (Increasing/Decreasing), 上凹/下凹 (Concave Up/Down), 以及最大值/最小值 (Maxima/Minima) 和拐点 (Inflection)。
- 4) 在运动中分析一个物体的瞬时速度 (Speed)、速度 (Velocity) 和加速度 (Acceleration); 必要时, 运用隐函数求导 (Implicit Differentiation) 的方式解决变化率 (Rates) 问题。
- 5) 使用洛必达法则 (L' Hopital' s Rule) 计算不定型的极限 (Limits of Indeterminate Forms)。
- 6) # 掌握两个维度的运动分析。掌握如何分析位置 (Position)、速度 (Velocity)、瞬时速度 (Speed)、加速度 (Acceleration)、物体运动的距离 (Distance), 并使用向量 (Vectors) 微积分的概念分析在两个维度上的运动。

1.2.4 积分及其应用 Integral and Its Applications

- 1) 理解积分是代表着基于不定积分的累加函数 (Accumulation Functions), 并能够运用这个概念;
- 2) 理解积分中值定理 (The Mean Value Theorem for Integrals) 并会求函数的平均值 (Average Value);
- 3) 求面积 (Area) 和体积 (Volume);
- 4) 求运动对象的位置 (Position) 和运动距离 (Distance);
- 5) 给定一个比例 (Accumulation), 考虑累积的总量 (Total Amount);
- 6) # 使用分步积分法 (Integration by Parts) 和部分分数法 (Partial Fractions) 求解积分 (Finding Antiderivatives);
- 7) # 使用极限分析和求解广义积分 (Improper Integrals);
- 8) # 求解弧线长 (Arc Lengths)。

1.2.5 微分方程 Differential Equations

- 1) 求解微分方程 (Differential Equations) 和斜率场 (Slope Fields);
- 2) 结合微分的应用, 使用欧拉方法 (Euler's Method) 估算分析;
- 3) # 理解掌握指数增长 (Exponential Growth)、约束增长 (Restricted Growth) 和

logistic 增长等微分方程，并简单运用解决实际问题。

1.2.6# 无穷级数 Infinite Series

1)# 熟悉重要的级数：几何级数 (Geometric Series)、P 级数、调和级数 (Harmonic Series)、交错级数 (Alternating Series)；

2)# 使用比值判别法 (Ratio Test)、极限比较判别法 (Limit Comparison test) 等判别常数项级数 (Series of Constants) 收敛/发散 (Converges/Diverges)；

3)# 理解绝对收敛 (Absolute Convergence) 和条件收敛 (Conditional Convergence) 并能求交错级数的误差界 (Alternating Series Error Bound)；

4)# 确定幂级数 (Power Series) 的收敛半径和收敛区间 (The Radius and Interval of Convergence)；

5)# 使用泰勒级数 (Taylor Series) 和麦克劳林级数 (Maclaurin Series) 表示函数的幂级数；

6)# 使用拉格朗日误差界 (Lagrange Error Bound) 估算级数的误差边界。

1.3 AP 微积分参考词汇表 Reference Vocabulary of AP Calculus

①按知识体系分类整理；②意思相近的词汇尽量排列在一起；③标注词汇音标（部分过长词条标注主要音标），使用本词汇表，更加高效、稳固地掌握课程专业词汇。

1.3.1 算数和代数 Arithmetic and Algebra

add	加上
subtract	减去
multiply	乘以
divide	除以
sum	和
difference	差
product	积
quotient	商
reciprocal	倒数
radians	弧度
degrees	角度
trigonometric identity	三角恒等式
Pythagorean theorem	勾股定理
double-angle formula	倍角公式
sum formula	和角公式
difference formula	差角公式
numerator	分子

denominator	分母
polynomial	多项式
radical	根式
root	根
corollary	推论
figure out	计算
plug ... into ...	把 ... 代入 ...
divide A by B	把 A 除以 B
multiply A by B	用 A 乘以 B
cross-multiply	交叉相乘
take the square root	求平方根
expand and simplify	展开化简
factor ... out of	约去

1.3.2 几何 Geometry

perpendicular	垂直的
horizontal	水平的
parallel to	平行于
vertex	顶点
dimension	维度
length	长度
width	宽度
diameter	直径
perimeter	周长
area	面积
surface area	表面积
volume	体积
rectangle	矩形
trapezoid	梯形
semicircle	半圆
ellipse	椭圆
parabola	抛物线
cubic	立方体的
cylindrical	圆柱形的
hypotenuse	斜边
right triangle	直角三角形
equilateral triangle	等边三角形