普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学
学习指导教程

郑州轻工业大学数学学院　编著

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学学习指导教程

郑州轻工业大学数学学院　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书为同济大学数学系编写的《高等数学（第七版）》（高等教育出版社出版）的配套辅导教材，共分 12 章，章节的划分与《高等数学（第七版）》教材完全一致．每章内容由六部分组成：基本概念、性质与结论，典型例题分析，疑难问题解答，同步训练题，自测题，以及参考答案与提示．

本书可作为高等院校理工科“高等数学”课程学习的辅导读物，也可作为教师教学的参考书，同时也是一本同步指导与训练教程，还可作为学生考研的系统复习与基础训练用书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导教程/郑州轻工业大学数学学院编著．—北京：科学出版社，2019.8

（普通高等教育“十三五”规划教材）

ISBN 978-7-03-061792-7

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①郑…　Ⅲ. ① 高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 129513 号

责任编辑：宋　丽　袁星星 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京鑫丰华彩印有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 8 月第 一 版　开本：787×1092　1/16
2019 年 8 月第一次印刷　印张：23 1/2
字数：633 000

定价：58.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈鑫丰华〉）
销售部电话 010-62136230　编辑部电话 010-62135120-2047

前 言

本书共 12 章，每章内容由六部分组成：第一部分基本概念、性质与结论，主要对本章内容进行精练总结和归纳，既简洁又翔实. 第二部分典型例题分析，对每节内容的知识点进行逐个剖析，同时注重方法技巧的指导和归纳. 精心选编和命制的例题，有介绍基本概念和基本运算的计算题或证明题，有初学者容易在计算中出现错误或不易理解的澄清题，有一题多解的开拓思路题，也有较为灵活的综合题. 本书题型多，覆盖面广，基本涵盖了本章各节典型的重、难点内容，旨在让读者深化对数学知识的理解，增长见识，并把它们内化成自己的解题能力. 第三部分疑难问题解答，对每节的疑难问题给出了详细的解答. 第四部分同步训练题，旨在帮助读者通过训练，巩固基础，掌握基本知识、解题方法与技巧. 建议读者独立完成这些精选出的试题，这样既可检验自己的学习成果，又可培养自己独立解题的能力. 其中带“*”的习题多为综合试题和近年来的考研试题，供学有余力和有志于考研的读者练习使用，旨在帮助读者在学习的同时备战考研，达到考研的能力和要求. 第五部分自测题，重在覆盖面，基本涵盖了本章的每一个知识点，难度略高于期中、期末试题，这样有助于检验读者对本章内容的掌握情况，且能够查漏补缺，从而为完成全部课程的学习奠定基础. 第六部分参考答案与提示，包括同步训练题和自测题的答案或提示，较难的试题给出了解题的思路及方法.

本书一大特色是对多数典型例题作了详细的评注：或对问题进行深入分析，或指出问题的源与流，或揭示问题的实质，或提出问题并进一步推广和研究，或阐明问题的意义，或就容易产生的错误问题给出忠告等. 这些精心撰写的评注以及第三部分的疑难问题解答，都是编者多年来教学的经验和体会.

本书结构严谨，条理清晰，综合性强，并有较强的针对性和可操作性，深入浅出，便于自学，本书可作为高等院校理工科本科生学习“高等数学”课程的辅导读物和同步训练教程. 对青年教师来说，本书是一本较好的教学参考书；对报考研究生的大学生来说，本书也是一本较好的系统复习用书和基础训练教程.

本书由郑州轻工业大学数学学院的王霞、张新敬主持编写. 参加编写工作的还有（排名不分先后）：黄士国、黄守佳、职桂珍、朱云、赵玲玲、周永安、李春. 在编写的过程中，编者融入了许多近年来的教育教学研究成果，博采众长，汲取了多本参考书的精华，在此向各位作者表示感谢. 另外，郭卫华先生认真审阅了书稿，并提出了一些建设性的意见，在此一并致谢.

鉴于编者水平有限，加之编写时间仓促，本书不足之处在所难免，殷切希望读者提出宝贵意见，以便改进和修正.

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、基本概念、性质与结论

1. 函数

1）映射（单射、满射、双射）、函数的概念.

2）函数的几种特性（函数性、奇偶性、周期性、有界性）.

3）反函数、复合函数、基本初等函数、初等函数.

4）几种特殊函数（分段函数、符号函数、绝对值函数、取整函数）.

2. 极限

（1）数列极限的性质与结论

1）收敛数列极限的唯一性：数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

2）收敛数列的有界性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

3）收敛数列的保号性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

4）收敛数列与其子数列间的关系：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

（2）函数极限的性质与结论（以 $x\to x_0$ 为例）

1）函数极限的唯一性：如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么极限唯一.

2）函数极限的局部有界性：如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

3）函数极限的局部保号性：如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

如果 $f(x)\to A(x\to x_0)(A\neq 0)$，那么存在点 x_0 的某一去心邻域，在该邻域内，有 $|f(x)|>\dfrac{1}{2}|A|$.

4）函数极限与数列极限的关系：如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

5）极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

（3）求极限的方法

1）四则运算法则：略.

2）单侧极限：略.

3）夹逼准则：

① 数列形式：若 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

② 函数形式：若在 x_0 的某去心邻域（或 $|x|>M>0$）内，满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

4）单调有界准则：

① 单调有界数列必有极限；

② 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左（或右）邻域内单调并且有界，则 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$（或右极限 $f(x_0^+)$）必存在.

5）两个重要极限：

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

变形形式：$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$，$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$.

3. 无穷小

（1）无穷小的阶

1）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

2）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

3）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小，记作 $\beta=O(\alpha)$.

4）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小，记作 $\beta=O(\alpha^k)$.

5）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$.

（2）性质与结论

1）有限个无穷小的和（或积）也是无穷小.

2）有界函数（或常数）与无穷小的乘积是无穷小.

3）非零无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

4）β与 α 是等价无穷小的充分必要条件为$\beta=\alpha+o(\alpha)$.

5）若$\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

4. 函数的连续性

（1）连续的概念

1）函数在 x_0 处连续的概念：设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一个邻域内有定义，如果当自变量的增量$\Delta x=x-x_0\to 0$ 时，对应的函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

2）左连续：如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处左连续.

右连续：如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处右连续.

左、右连续与连续的关系：函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$在点 x_0 处左连续且右连续.

3）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续：函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点处连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续.

4）初等函数的连续性：基本初等函数在它们的定义域内都是连续的．一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

（2）函数 $f(x)$ 的间断点的类型

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，且左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的其他间断点，称为第二类间断点．在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点．无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

（3）闭区间上连续函数的性质

1）最大值和最小值定理：在闭区间上，连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值 M 和最小值 m.

2）有界性定理：在闭区间上，连续的函数一定在该区间上有界.

3）零点定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，那么在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使 $f(\xi)=0$.

4）介值定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，那么，对于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得 $f(\xi)=C$.

二、典型例题分析

1．函数及其性质

例 1.1　（1）求函数 $y=\arcsin(\ln x)+\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ 的定义域.

（2）函数 $f(x)=\sin(\arcsin x)$ 与 $g(x)=\arcsin(\sin x)$ 是否表示同一个函数？为什么？

（3）设 $f(x)$ 对一切实数 x_1,x_2 成立，$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(0)\neq 0, f(1)=a$，求 $f(0)$ 及 $f(n)$（n 为正整数）.

解　（1）由 $\begin{cases}-1\leqslant \ln x\leqslant 1\\ x^2-3x+2\neq 0\end{cases}$ 解得 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}, x\neq 1, x\neq 2$．故函数 $y=\arcsin(\ln x)+\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)\cup(1,2)\cup(2,\mathrm{e}]$.

（2）$f(x)=\sin(\arcsin x)=x$ 的定义域为 $[-1,1]$，$g(x)=\arcsin(\sin x)=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$．二者定义域不同，所以不能表示同一个函数.

（3）取 $x_1=x_2=0$，可得 $f(0)=f(0)\cdot f(0)=f^2(0)$，由 $f(0)\neq 0$ 得 $f(0)=1$．取 $x_1=x_2=1$ 得 $f(2)=f^2(1)=a^2$，取 $x_1=1,x_2=2$ 得 $f(3)=f(1)\cdot f(2)=a^3$.

设 $f(k)=a^k$，取 $x_1=1,x_2=k$，得 $f(k+1)=f(1)f(k)=a^{k+1}$，由数学归纳法可知

$$f(n)=a^n.$$

评注 （1）求初等函数的定义域有以下原则：

① 分式的分母不能为零；

② 根式中负数不能开偶次方；

③ 对数的真数不能为零和负数；

④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$； $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$； $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$；

⑤ 通常将复合函数看成一系列初等函数的复合，从外向里逐步求定义域；由多个函数经过四则运算组合成的函数通过联立不等式组求定义域；

⑥ 对于应用问题中的函数，其定义域由实际问题的具体含义确定.

（2）两个函数表示同一个函数的充要条件是这两个函数定义域与对应法则（或值域）分别相同.

（3）由所给等式求 $f(n)$（n 为正整数），常用数学归纳法.

例 1.2 把下列函数分解为最简单的函数：

（1） $y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$； （2） $y=3^{\arcsin^2(1+2x)}$.

解 由外向里进行分解：

（1） $y=u^2,u=\sin v,v=w^{-\frac{1}{2}},w=x^2+1$；

（2） $y=3^u,u=v^2,v=\arcsin w,w=1+2x$.

例 1.3 问函数 $y=\sqrt{1-u}$ 与 $u=2+\mathrm{e}^x$ 能否构成复合函数？为什么？

解 两个函数能否构成复合函数，取决于外层函数的定义域和内层函数的值域有没有公共部分．这里外层函数 $y=\sqrt{1-u}$ 的定义域为 $D_f=\{u\,|\,u\leqslant 1\}$，内层函数 $u=2+\mathrm{e}^x$ 的值域为 $R_u=\{u\,|\,2<u<+\infty\}$，由于交集为空集，即 $D_f\cap R_u=\varnothing$，所以函数 $y=\sqrt{1-u}$ 与 $u=2+\mathrm{e}^x$ 不能构成复合函数.

例 1.4 求 $y=f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解 当 $x<1$ 时， $y=x$，得 $x=y,y<1$.

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时， $y=x^2$，得到 $x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$.

当 $x>4$ 时， $y=2^x$，得到 $x=\log_2 y,y>16$.

对换 x,y 的位置，得反函数 $y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & x>16\end{cases}$.

评注 反函数的求解方法比较固定，由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，对换自变量与因变量的位置，即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$．对分段函数要注意所求函数表达式所在的区间.

例 1.5　函数 $f(x)$ 满足 $4f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

解　因为 $\begin{cases}4f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\\ 2f\left(\dfrac{1}{x}\right)-f(x)=\dfrac{x}{2}\end{cases}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}\right), f(-x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{-x}+\dfrac{-x}{2}\right)=-f(x)$，显然 $f(x)$ 为奇函数.

评注　判定函数奇偶性的方法:

（1）根据奇偶性的定义或利用奇偶函数的运算性质，如奇（偶）函数的代数和仍为奇（偶）函数；奇（偶）函数的积为偶函数；奇函数与偶函数的积为奇函数等.

（2）证明 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$.

例 1.6　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x^2-1, & x\geqslant 1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

解　（1）画出 $g(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图形，如图 1.1 所示.

（2）将 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x^2-1, & x\geqslant 1\end{cases}$ 广义化为 $f(u)=\begin{cases}e^u, & u<1\\ u^2-1, & u\geqslant 1\end{cases}$，用边界线 $u=1$ 将 $g(x)$ 的图形划分为四段，对于①和③，即当 $x<-1$ 或者 $0\leqslant x<\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 处于边界线 $u=1$ 下方，$g(x)<1$，此时 $f(u)=e^u$；对于②和④，即当 $-1\leqslant x<0$ 或者 $x\geqslant\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 处于边界线 $u=1$ 上方，$g(x)\geqslant 1$，此时 $f(u)=u^2-1$.

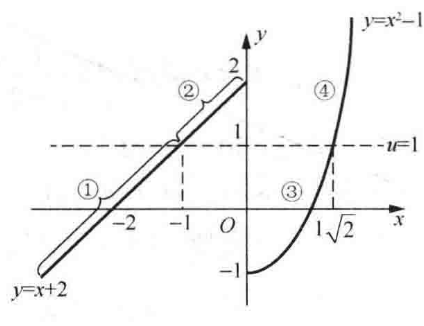

图 1.1

（3）于是

$$f[g(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ (x+2)^2-1, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ (x^2-1)^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}.$$

评注　此类问题利用数形结合方法求解一目了然，仅用解析法比较麻烦.

2. 用定义证明极限

例 1.7　利用定义证明下列数列极限:

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{5n+2}=\dfrac{2}{5}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-a^2}}{n}=1, a\neq 0$.

证　（1）对于任给的 $\varepsilon>0$，为使

$$\left|\frac{2n-1}{5n+2}-\frac{2}{5}\right|=\frac{9}{5(5n+2)}<\frac{2}{5n+2}<\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可，故对于任给的 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），可取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$ 时，恒

有$\left|\dfrac{2n-1}{5n+2}-\dfrac{2}{5}\right|<\varepsilon$成立，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{5n+2}=\dfrac{2}{5}$.

（2）对于任给的$\varepsilon>0$，为使

$$\left|\frac{\sqrt{n^2-a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2-a^2}-n}{n}\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2-a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon,$$

只要$n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$．故取$N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，$\left|\dfrac{\sqrt{n^2-a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$恒成立，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-a^2}}{n}=1$.

评注　用定义证明数列的极限时，关键是对任给的$\varepsilon>0$，寻找N，但不必找最小的N，即N等于多少并不重要，重要的是是否存在N. 找N的方法有以下两种（以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$为例）：

（1）直接解不等式$|x_n-A|<\varepsilon$，得$n>\varphi(\varepsilon)$, 取$N\geqslant[\varphi(\varepsilon)]$.

（2）将$|x_n-A|$适当放大，即$|x_n-A|\leqslant\cdots\leqslant g(n)$，其中$g(n)$为一个较简单的无穷小量，然后解不等式$g(n)<\varepsilon$，得$n>\varphi(\varepsilon)$, 取$N\geqslant[\varphi(\varepsilon)]$.

例 1.8　设数列$\{x_n\}$的一般项$x_n=\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 求出$N$，使当$n>N$时，$x_n$与其极限之差的绝对值小于正数$10^{-5}$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，对于$\varepsilon=10^{-5}$，由于

$$|x_n-0|=\left|\frac{n+2}{n^2-2}\sin n\right|\leqslant\frac{n+2}{n^2-2}<\frac{n+2}{n^2-4}=\frac{1}{n-2},$$

所以只要$|x_n-0|<\varepsilon$即可，即$\dfrac{1}{n-2}<\varepsilon, n>\dfrac{1}{\varepsilon}+2$，故取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+2\right]=10^5+2$. 当$n>N$时，$x_n$与0的差的绝对值小于$10^{-5}$.

例 1.9　设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，那么（　　）.

A．若$\{x_n\}$发散，则$\{y_n\}$必发散　　B．若$\{x_n\}$无界，则$\{y_n\}$必有界

C．若$\{x_n\}$有界，则$\{y_n\}$必为无穷小　　D．若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，则$\{y_n\}$必为无穷小

解　本题运用排除法．若令$x_n=n, y_n=\dfrac{1}{n^2}$，则排除 A.

若令$x_n=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ n, & n=2k\end{cases}, y_n=\begin{cases}n, & n=2k+1\\ 0, & n=2k\end{cases}$，则排除 B.

若$\{x_n\}$有界，且y_n为无穷小，则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但反过来却未必成立.

若取$x_n=\dfrac{1}{n^2}, y_n=n$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则排除 C.

综上所述应选 D，若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，事实上，$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}\to0$（$n\to\infty$）.

评注　解选择题切忌一一进行求证，应运用排除法．例如，本例中运用了举反例排除、特殊值法、反证法等.

例 1.10　利用定义证明下列函数极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

证　（1）考查$|x^2-9|=|x-3||x+3|$，在$x\to 3$的过程中，x只在 3 附近取值，不妨设$|x-3|<1$，于是$2<x<4$，$|x+3|<7$，因此$|x^2-9|=|x-3||x+3|<7|x-3|$.

对于任给的$\varepsilon>0$，欲使$|x^2-9|<\varepsilon$，只要$7|x-3|<\varepsilon$，即$|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{7}$. 取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$，当$0<|x-3|<\delta$时，有$|x^2-9|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$.

（2）任给$\varepsilon>0$，要证$\exists X>0$，当$|x|>X$时，有

$$\left|\frac{2x+3}{3x}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2x+3-2x}{3x}\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon,$$

只须$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$,取$X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则对$\forall\varepsilon>0$，当$|x|>X$时，有$\left|\dfrac{2x+3}{3x}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}.$$

评注　证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$）的关键在于：对于任给的$\varepsilon>0$，找相应的$\delta>0$（或$X>0$），使得当$0<|x-x_0|<\delta$（或$|x|>X$）时，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立. 因此找$\delta$（或$X$）时，一般从解$|f(x)-A|<\varepsilon$入手，尽量将上述不等式转化为关于$|x-x_0|$（或$|x|$）的不等式，将$|x-x_0|$（或$|x|$）视为未知数来解.

注意：切莫在解不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$的过程中，将x视为未知数来解，否则将无法找到相应的δ（或X）.

在上述（1）中，用了这样的手法：当$x\to x_0$时，可将x限制在x_0的一个邻域内，即限制x满足$|x-x_0|<r$［在（1）中$r=1$］. 在此限制条件下，可推出$|f(x)-A|<c|x-x_0|$（其中，c为某一确定的常数），于是由$c|x-x_0|<\varepsilon$，就可保证$|f(x)-A|<\varepsilon$.

3. 利用四则运算法则求极限

例 1.11　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n+x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^{2n}+2)^2-(x^{2n}-2)^2}{(x^n+1)^2+(x^n-1)^2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{2n}}$，其中$|a|<1,|b|<1$.

解　（1）原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1+x^{n-1}-1+\cdots+x^2-1+x-1}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}+\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+\cdots+\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}\right).$$

因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}=n$，所以

$$原式=n+n-1+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

（2）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^{2n}+2+x^{2n}-2)(x^{2n}+2-x^{2n}+2)}{x^{2n}+2x^n+1+x^{2n}-2x^n+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^{2n}}{2(x^{2n}+1)}=4$.

（3）由于“乘积的极限等于极限的乘积”这一法则只对有限个因子的乘积成立，因此，求解本题时，先用求积公式将其变形，由于

$$\begin{aligned}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})&=\frac{1}{1-a}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\\&=\frac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}}).\end{aligned}$$

当$n\to\infty$时，$2^{n+1}\to+\infty$，而$|a|<1$，故$a^{2^{n+1}}\to0^+$，从而原式$=\dfrac{1}{1-a}$.

（4）由于分子、分母均为n（$n\to\infty$）项的和，应当先求出其和，再求极限，利用等比数列求和公式，有

$1+a+a^2+\cdots+a^n=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}=0$；

$1+b+b^2+\cdots+b^{2n}=\dfrac{1-b^{2n+1}}{1-b}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}b^{n+1}=0$，所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)\Bigg/\left(\frac{1-b^{2n+1}}{1-b}\right)=\left(\frac{1}{1-a}\right)\Bigg/\left(\frac{1}{1-b}\right)=\frac{1-b}{1-a}.$$

评注　（1）对于有理函数或无理函数的$\dfrac{0}{0}$型极限，可通过分解因式及分子或分母有理化找出零因子并消去，再求极限.

（2）对于有理函数或无理函数及相应数列的$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，应采取“抓大放小”原则，关注分子、分母的最高次项．当分子与分母次数相同时，极限为分子与分母最高次项的系数之商；当分子的次数低于分母的次数时，极限为 0；当分子的次数高于分母的次数时，极限为∞.

4. 利用“无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量”求极限

例 1.12　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+x}(3+\cos x)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

解　（1）当$x\to0$时，$\dfrac{x^2+1}{x^3+x}$是无穷小量，$|3+\cos x|\leqslant4$，因此有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+x}(3+\cos x)=0.$$

（2）$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$.

因为$\left|-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2$，故$2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$为有界函数，而

$$0\leqslant\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to 0,\quad x\to+\infty .$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0,$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)=0.$$

评注　本题（1）易犯的错误是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+x}(3+\cos x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+x}\cdot\lim_{x\to\infty}(3+\cos x)=0 .$$

错误在于，因为$\lim\limits_{x\to\infty}(3+\cos x)$不存在，所以不能运用极限的四则运算法则.

5. 利用函数极限与数列极限的关系求极限

例 1.13　求$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{1}{2^n}$.

解　利用求函数极限的方法求数列的极限.

由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，取$x_n=\dfrac{1}{2^n}$，则当$x_n\to 0$（$n\to\infty$）时，有

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1 .$$

例 1.14　证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在.

证　取$x_n^{(1)}=2n\pi$, $x_n^{(2)}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则当$n\to\infty$时，$x_n^{(1)}\to+\infty$, $x_n^{(2)}\to+\infty$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0，\quad \lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1 .$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)}$，故$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在.

例 1.15　证明$f(x)=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内无界，但当$x\to\infty$时，$f(x)$并不是无穷大.

证　$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界是指，$\forall M>0$，总存在$x_0\in(-\infty,+\infty)$使$|f(x_0)|>M$.

事实上，$\forall M>0$（设$M>1$），取$x_0=2[M]\pi$，则$|f(x_0)|=2[M]\pi>M$，这说明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界.

当$x\to\infty$时，$f(x)$是无穷大是指，$\forall M>0$，总存在$Z_0>0$，使当$|x|>Z_0$时，恒有$|f(x)|>M$. 因此当$x\to\infty$时，$f(x)$不是无穷大则是指，存在$M>0$使对于$\forall Z_0>0$，总有x_0满足条件$|x_0|>Z_0$，但$|f(x_0)|\leqslant M$.

事实上，取$M=1$，$\forall Z_0>0$（设$Z_0>1$），记$x_0=2[Z_0]\pi+\dfrac{\pi}{2}>Z_0$，而$|f(x_0)|=0<1$，利

用极限的归并性可将上述过程简化如下：

取 $x_n = 2n\pi \to +\infty$，则 $f(x_n) = 2n\pi\cos 2n\pi \to +\infty$；

取 $y_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \to +\infty$，则 $f(y_n) = \left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) \to 0$.

这说明 $f(x) = x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 并不是无穷大.

评注　(1) 为证明极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在，只要寻找两个趋于 a 的数列 $\left\{x_n^{(1)}\right\}$ 和 $\left\{x_n^{(2)}\right\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right)$ 即可.

(2) 为证明 $f(x)$ 当 $x_n \to a$ 时不是无穷大，即证 $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \infty$，只要寻找一个趋近于 a 的数列 $\left\{x_n^*\right\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^*\right) \neq \infty$ 即可.

6. 利用极限存在的两个准则求极限

例 1.16　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解　(1) 因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$，所以原式 $=1$.

(2) 因为 $0 < \left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{-\frac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{n}} = 0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right| = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1} = 0$.

例 1.17　求 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x \geqslant 0)$ 的表达式.

解　(1) 当 $x \in [0,1)$ 时，$\max\left\{1, x^n, \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right\} = 1$，则

$$1 \leqslant 1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n < 3,\ 1 \leqslant \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} < \sqrt[n]{3}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$，所以由夹逼准则，得