JINBANG BOOKS·SINCE 1997
金榜图书
北京时代巨流文化有限公司

2020 全国各大考研辅导机构通用教材
李永乐·王式安 考研数学系列

数学基础过关660题·数学一

答案册

主编◎李永乐 王式安 武忠祥

编委◎李永乐 王式安 武忠祥 李正元 蔡燧林 章纪民 胡金德 刘西垣 姜晓千

核心搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》+《330题》

互联网可视化版本
微信扫书中二维码
观看重难点讲解视频
(详见封二使用说明)

2020全新升级：习题与答案分册 更便携实用

·一线名师强强联手 ·实力打造考研精品
·先填空后选择编排 ·无须过渡直接做题
·解答精准评注点睛 ·全面指导解题思路
·循序渐进稳步提升 ·基础过关举一反三

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

2020 全国各大考研辅导机构**通用教材**

李永乐·王式安考研数学系列

数学基础过关660题·数学一

答案册

主编◎李永乐 王式安 武忠祥

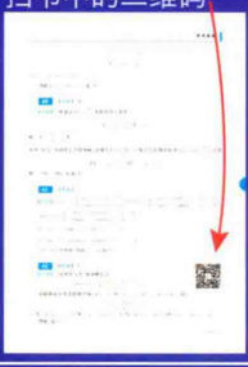
编委◎李永乐 王式安 武忠祥 李正元 蔡燧林 章纪民 胡金德 刘西垣 姜晓千

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

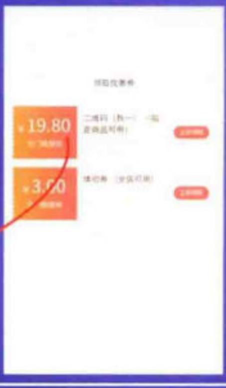
本书**二维码扫码**使用说明

V研客独创扫码解答，扫难题，求问答
助你制胜考研，**使用步骤**如下：

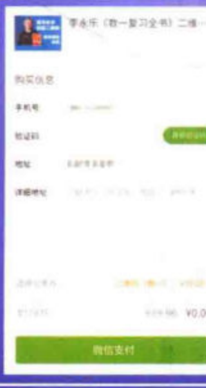
1. 打开【微信】扫一扫
扫书中的二维码



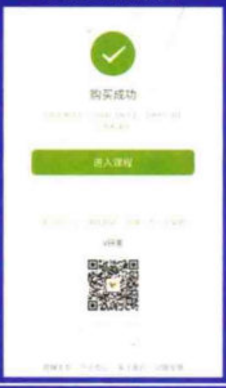
2. 领取专属优惠券



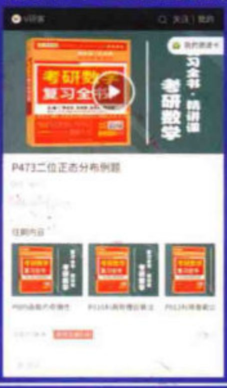
3. 注册验证→0元购



4. 关注V研客



5. 微信扫描书中二维码观看课程



小V特别提醒

关注V研客，
点击【分享】
有考研新人
礼包哦~

温馨提示：V研客最新推出专属“超级会员”

会员可享有：
①**原价1698元**的“数英政全程班”（总课时：338+）
②专属答疑服务
现持本书专享价：**68元**
扫描右侧二维码成为超级会员，专业课信息请关注公众号：V研客考研

本页所有服务由微客兄弟网络科技（北京）有限公司提供，如有变更恕不另行通知
联系方式 微信公众号：V研客考研 电话：010-51906235 QQ：3053326262

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

第1部分　填空题

第2部分　选择题

第1部分

填空题

参考答案

高等数学

1 【答案】 2

【分析 1】 先求出 $g(f(x))$

$$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ 2+f(x), & f(x)>0,\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知,当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$;当 $x>0$ 时,$f(x)=-x<0$;当 $x=0$ 时,$f(x)=0$. 于是

$$g(f(x))=\begin{cases}2+x^2, & x\leqslant 0\\ 2-(-x), & x>0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}g(f(x))=\lim_{x\to 0^+}(2+x)=2,$$

$$\lim_{x\to 0^-}g(f(x))=\lim_{x\to 0^-}(2+x^2)=2,$$

因此, $\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))=2.$

【分析 2】 不必求出 $g(f(x))$.

$$\lim_{x\to 0^+}g(f(x))=\lim_{x\to 0^+}g(-x)=\lim_{x\to 0^+}(2-(-x))=2,$$

$$\lim_{x\to 0^-}g(f(x))=\lim_{x\to 0^-}g(x^2)=\lim_{x\to 0^-}(2+x^2)=2.$$

因此,$\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))=2.$

2 【答案】 0

【分析】 用相消法结合洛必达法则求这个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限,分子、分母同除以 $(e^x)^3$.

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3e^{-x}(3+e^{-x})}{[e^{-2x}+(1+e^{-x})^2](e^{-x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{3+e^{-x}}{[e^{-2x}+(1+e^{-x})^2](e^{-x}+1)}=0\times 3=0$$

其中用洛必达法则易知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0.$

【评注】 求 $\frac{\infty}{\infty}\left(\text{或}\frac{0}{0}\right)$ 型极限的一个重要方法是:先约去分子、分母中极限为 ∞(或 0)的因子,然后可用四则运算法则 .

3 【答案】 0

【分析】
$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}\right)^{\alpha}$$

用洛必达法则求得$\frac{\infty}{\infty}$型极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}=0$$

$\Rightarrow I=0.$

【评注】（1）同理可证：设 $\alpha>0,\beta>0,a>1$ 为常数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{\beta x}}=0$. 再由函数极限与数列极限关系可得数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}=0.$$

（2）由该题结论可得：

设 $\alpha>0,\beta>0$ 为常数，则 $I=\lim\limits_{x\to0^{+}}x^{\alpha}\mid\ln x\mid^{\beta}=0.$

（作变量替换，令 $t=\mid\ln x\mid=-\ln x$（不妨设 $0<x<1$）$\Rightarrow x=e^{-t}\Rightarrow I=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{\beta}e^{-\alpha t}=0.$）

（3）由该题结论还可得：

设 $\alpha>0,\beta>0$ 为常数，则 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\beta}x}{x^{\alpha}}=0$

（作变量替换. 令 $t=\ln x\Rightarrow x=e^{t},I=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\beta}}{e^{\alpha t}}=0.$）

（4）题中用到了一个简单的结论：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Rightarrow$ 对 $\forall$ 常数 $\alpha>0$ 有

$$\lim_{x\to x_0}\mid f(x)\mid^{\alpha}=0.$$

4 【答案】 e^2

【分析】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}=\cos0=1$，所以只须求

$$J=\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$$

【分析 1】 这是指数型（1^{∞}）极限，用求指数型极限的一般方法：

$$J=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}$$

转化为求

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^{+}}\frac{\ln(\sin2t+\cos t)}{t}$$
$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{t\to0^{+}}\frac{2\cos2t-\sin t}{\sin2t+\cos t}=2$$

$\Rightarrow J=e^2,I=(e^2)^1=e^2.$

【分析 2】 用求 1^{∞} 型极限的方法：

$$J=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)+1\right]^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right) \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin 2t+\cos t-1}{t}$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{t\to0^+}(2\cos 2t-\sin t)=2$$

$\Rightarrow J=e^2, I=(e^2)^1=e^2.$

5 【答案】 1

【分析】 $\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}dt \xlongequal{xt=s} \int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin s}{s}ds$

$$\Rightarrow I=\lim_{x\to0}\frac{\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin s}{s}ds}{x^2} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}\times 2x-\frac{\sin x^3}{x^3}\times 3x^2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{3}{2}\times\frac{\sin x^3}{x^3}\times x=1-\frac{3}{2}\times1\times0=1.$$

6 【答案】 $\dfrac{1}{n!}$

【分析 1】 用等价无穷小因子替换

$$\sqrt[m]{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{m}}-1\sim\frac{x}{m}(x\to0)$$

得 $\sqrt[m]{\cos x}-1=\sqrt[m]{1+\cos x-1}-1\sim\dfrac{\cos x-1}{m}(x\to0)$，于是

$$I=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{(\cos x-1)+1})(1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1})\cdots(1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1})}{(1-\cos x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{(\cos x-1)+1}-1}{\cos x-1}\right)\times\left(\frac{\sqrt[3]{(\cos x-1)+1}-1}{\cos x-1}\right)\times\cdots\times\left(\frac{\sqrt[n]{(\cos x-1)+1}-1}{\cos x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{\cos x-1}\times\frac{\frac{1}{3}(\cos x-1)}{\cos x-1}\cdots\frac{\frac{1}{n}(\cos x-1)}{\cos x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

【分析 2】 用等价无穷小因子替换：

$t\sim\ln(1+t)\quad(t\to0)$

$(\cos x)^{\frac{1}{m}}-1\sim\ln[(\cos x)^{\frac{1}{m}}-1+1]=\dfrac{1}{m}\ln\cos x\quad(x\to0)$

因此

$$I=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{\cos x}-1)(\sqrt[3]{\cos x}-1)\cdots(\sqrt[n]{\cos x}-1)}{(\cos x-1)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\sqrt{\cos x}\ln\sqrt[3]{\cos x}\cdots\ln\sqrt[n]{\cos x}}{(\cos x-1)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{\ln^{n-1}\cos x}{(\cos x-1)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln[(\cos x-1)+1]}{\cos x-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{n!}.$$

【分析 3】 用极限的四则运算法则，这是 $n-1$ 个极限的乘积，分别求每个 $\frac{0}{0}$ 型极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[m]{\cos x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{m}(\cos x)^{\frac{1}{m}-1}\sin x}{\sin x} = \frac{1}{m},(m=2,3,\cdots,n).$$

于是

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{1-\cos x}\cdots\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos x}}{1-\cos x}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

7 【答案】 2

【分析 1】 先作恒等变形后，用等价无穷小因子替换：

$a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1) = a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)$

当 $x\to+\infty$，$a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\sim\frac{\ln a}{x(x+1)}$

因此 $I = \lim\limits_{x\to+\infty}x^p a^{\frac{1}{x+1}}\frac{\ln a}{x(x+1)} = \ln a\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(x+1)}$

$= \ln a$ （当 $p=2$ 时）.

【评注】 容易看出：当 $p<2$ 时，$I=0$，当 $p>2$ 时，$I=+\infty$.

【分析 2】 当 $p\leqslant 0$ 时，显然

$$I = \lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}) = 0.$$

当 $p>0$ 时这是 $\infty\cdot 0$ 型极限，先转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限，然后用洛必达法则

$$I = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}}{x^{-p}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)\ln a}{-px^{-p-1}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}(2x+1)\ln a}{px^2(x+1)^2} = \begin{cases}+\infty & (p>2)\\ 0 & (0<p<2)\\ \ln a & (p=2)\end{cases}$$

8 【答案】 -1

【分析】 $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}}{\ln(1-x^2)\sin\dfrac{x}{1+x}}$

用等价无穷小因子替换：$x\to 0$ 时

$e^{x^2}-1\sim x^2$，$\ln(1-x^2)\sim -x^2$，$\sin\frac{x}{1+x}\sim\frac{x}{1+x}\sim x$

得

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\cdot 2x}{-x^2\cdot x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=-1.$$

【评注】 在计算极限时,正确利用等价无穷小因子的代换定理能简化计算.
常遇到的等价无穷小有:

当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,

$a^x-1\sim x\ln a\ (a>0)$, $\ln(1+x)\sim x$.

9 【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析 1】 $\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-1\right)-x\left(\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}-1\right)$

$$I=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-1\right)-\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to+\infty}\left(x\times\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

【评注】 这里先作恒等变形后利用了等价无穷小因子替换:

$$(1+t)^\alpha-1\sim\alpha t\quad(t\to 0).$$

【分析 2】 这是求 $\infty-\infty$ 型的极限,先转化为$\frac{0}{0}$ 型极限,然后再用洛必达法则.

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{6}}-(1-t)^{\frac{1}{6}}}{t}=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{6}(1+t)^{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{6}(1-t)^{-\frac{5}{6}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

10 【答案】 2

【分析】 由 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3 \qquad (1)$$

当 $x\to 0$ 时,分母为无穷小,所以分子也为无穷小,进一步有$\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)=0$.

因此,当 $x\to 0$ 时

$$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)\sim x+\frac{f(x)}{x},\text{所以(1) 可写为}\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2.$$

11 【答案】 2

【分析】 $\frac{2}{x}-1<\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant\frac{2}{x}$

因此，当 $x>0$ $\quad 2-x<x\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant 2$

当 $x<0$ $\quad 2\leqslant x\left[\frac{2}{x}\right]<2-x$

又 $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2.$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{2}{x}\right]=2.$

【评注】 本题利用了夹逼定理求极限，解这一类题的关键是要找出两个特殊的数列(或函数)，这要求我们熟练掌握一些常用的数列(或函数)的极限.

12 【答案】 0

【分析】 这是$\frac{0}{0}$型极限，先作如下变形：

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^2-2\sin x+\sin 2x}{x^4}$$

可用的方法是洛必达法则(计算较繁)与泰勒公式.

注意泰勒公式

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\quad(x\to 0)\quad(x^4\text{ 项系数为 }0)$$

$$\Rightarrow\qquad x\sin x^2=x(x^2+o(x^4))=x^3+o(x^4)$$

$$-2\sin x=-2\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)=-2x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

$$\sin 2x=2x-\frac{1}{6}(2x)^3+o(x^4)=2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^4)$$

相加得

$$x\sin x^2-2\sin x+\sin 2x=0+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

因此 $$I=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}=0.$$

【评注】 如果求

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^2-2\sin x+\sin 2x}{x^5}$$

就要把 $\sin x$ 展开到 x^5 项：

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\quad(x\to 0)$$

然后可得

$$x\sin x^2-2\sin x+\sin 2x=\frac{1}{4}x^5+o(x^5)\quad(x\to 0)$$

于是

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}.$$

13 【答案】 $\frac{4}{3}$

【分析】 将 x_n 化简

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

$$=\cdots=1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{4}{3}\times\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)=\frac{4}{3}.$$

【评注】 通过恒等变形转化为可以用四则运算法则求的极限,这是求数列极限的重要情形.

14 【答案】 0

【分析 1】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$,由极限的不等式性质 $\Rightarrow\exists N$,当 $n>N$ 时,$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$,即 $|a_{n+1}|<|a_n|$,所以不妨认为数列 $|a_n|$ 是单调减少的,又 $|a_n|\geqslant 0$,由单调有界数列收敛定理推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=a$,则 $a=0$,若不然,$a\neq 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{a}{a}=1$,这与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$ 矛盾.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

【分析 2】 取 q_0 满足 $|q|<q_0<1$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<q_0$ 及极限不等式性质 $\Rightarrow\exists N$,当 $n\geqslant N$ 时

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<q_0\quad 即\quad |a_{n+1}|<q_0|a_n|\ (n\geqslant N)$$

$$\Rightarrow\quad\begin{aligned}&|a_{N+1}|<q_0|a_N|,\\&|a_{N+2}|<q_0{}^2|a_N|\\&\cdots\cdots\\&|a_n|<q_0{}^{n-N}|a_N|\qquad(n>N)\end{aligned}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}q_0^{n-N}|a_N|=0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

【评注】(1) 注意，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

(2) 运用该题结果，可求出以下数列的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{n!}=0$ 等.

(3)【分析 1】与【分析 2】的方法均是在所设条件下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ∃ 且为零的方法. 作为填空题，实质上已告知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\xlongequal{记}a$ ∃，所以可用反证法求出该极限 a 的值. 若 $a\neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a}{a}=1$$

与题设 $|q|<1$ 矛盾，因此 $a=0$.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为数列，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q,|q|>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

15 【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【分析】 先用等价无穷小因子替换，

$$e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1\sim\ln\left[1+e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1\right]=1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}n\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

【分析 1】 转化为函数极限后再用洛必达法则.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\dfrac{\ln(1+t)}{t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}.$$

【分析 2】 用泰勒公式：$\ln(1+t)=t-\dfrac{1}{2}t^2+o(t^2)\ (t\to0)$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}n\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+n^2o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

【分析 3】 若不会用上述等价无穷小因子替换，我们可直接把 $\infty\cdot0$ 型数列极限转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型的函数极限，然后用洛必达法则求解.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}-1}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{x\to0}\frac{e(1+x)^{-\frac{1}{x}}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)}-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)}\frac{-\left[\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right]}{x^2}$$

$$=-\mathrm{e}\mathrm{e}^{-1}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\frac{1}{2}.$$

16 【答案】 2

【分析1】 这是 $\infty\cdot 0$ 型的数列极限，转化为求 $\frac{0}{0}$ 型的函数极限，然后用洛必达法则.

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\dfrac{2}{n}-\arctan\dfrac{2}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}}{\dfrac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan 2x-\arctan\dfrac{2x}{1+x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{2}{1+4x^2}-\dfrac{1}{1+\dfrac{4x^2}{(1+x)^2}}\cdot\dfrac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)^2-1}{x(1+4x^2)((1+x)^2+4x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+x}{(1+4x^2)((1+x)^2+4x^2)}=2.$$

【分析2】 这是 $\infty\cdot 0$ 型极限，为简化计算设法寻求 $\arctan\frac{2}{n}-\arctan\frac{2}{n+1}$ 的等价无穷小，它是 $f(x)=\arctan x$ 的改变量 $f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n+1}\right)$. 由拉格朗日中值定理，它可改写成

$$\arctan\frac{2}{n}-\arctan\frac{2}{n+1}=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n+1}\right)=f'(\xi)\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\xi^2}\cdot\frac{2}{n(n+1)}\sim\frac{2}{n(n+1)}\quad(n\to\infty)$$

其中 $\frac{2}{n+1}<\xi<\frac{2}{n}$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{1+\xi^2}\to 1$.

因此，$I=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{2}{n(n+1)}=2.$

【评注】 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a.$

求形如

$$I=\lim_{n\to\infty}x_n[f(y_n)-f(z_n)]$$

的数列极限($\infty\cdot 0$ 型)，可考虑用拉格朗日中值定理，转化为求

$$I=\lim_{n\to\infty}x_n(y_n-z_n)\cdot f'(\xi)$$

其中 ξ 在 y_n 与 z_n 之间.

17 【答案】 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

【分析 1】 恒等变形后用幂指数运算法则. 不妨设 a_1 为最大值

$$I=a_1\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_m}{a_1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=a_1\times 1=a_1.$$

【分析 2】 用适当放大缩小法. 不妨设 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=a_1$

则 $\quad a_1\leqslant(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant a_1m^{\frac{1}{n}}$

令 $n\to\infty,m^{\frac{1}{n}}\to 1$,由夹逼定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=a_1$(即 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$).

18 【答案】 $\ln 3$

【分析】 先求出 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

由函数的连续性得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x^{\frac{1}{x}})=f(1)=1,\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=\ln 3$.

19 【答案】 $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\ln 2$

【分析】 设 $f(x)=\begin{cases}g(x), & (a\leqslant x\leqslant x_0)\\ h(x), & (x_0<x\leqslant b)\end{cases}$,其中 $g(x),h(x)$ 分别在$[a,x_0]$,$(x_0,b]$ 是初等函数,因而连续. 于是 $f(x)$ 在$[a,x_0]$,$(x_0,b]$ 连续,又 $h(x)$ 在$[x_0,b]$ 连续,于是 $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow g(x_0)=h(x_0)$.

对于该 $f(x)$,对 $\forall$ 常数 A,显然 $x\neq 1$ 时 $f(x)$ 连续. 仅当

$$Ae^{\arctan x}\Big|_{x=1}=\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\Big|_{x=1}$$

时 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续. 因此,仅当

$$A=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\ln 2$$

时 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续.

20 【答案】 $a=-1,b=\ln 2$

【分析】 先分别考察 $f(x),g(x)$ 的连续性.

对 $\forall a,x\neq 0$ 时 $f(x)$ 连续,$x=0$ 时 $f(x)$ 左连续,$f(0)=6$,

又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$$

$$\xlongequal{t=\arcsin x}\lim_{t\to0^+}\frac{a\sin^3 t}{\sin t-t}=a\lim_{t\to0^+}\frac{t^3}{\sin t-t}=a\lim_{t\to0^+}\frac{3t^2}{\cos t-1}=-6a$$

仅当 $a=-1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 右连续. 因此,仅当 $a=-1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

对 $\forall b,x\neq 1$ 时 $g(x)$ 连续,$x=1$ 时 $g(x)$ 右连续,$g(1)=e^b+1$,又

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3\sin(x-1)}{x-1}=3,$$

仅当 $e^b+1=3$，即 $e^b=2$，$b=\ln 2$ 时 $g(x)$ 在 $x=1$ 左连续. 因此，仅当 $b=\ln 2$ 时 $g(x)$ 在 $x=1$ 连续.

现由连续性运算法则知，$b=\ln 2$，$a=-1$ 时 $f(x)+g(x)$ 处处连续.

$a\neq -1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 不连续，$g(x)$ 在 $x=0$ 连续

$\Rightarrow f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 不连续.

$b\neq \ln 2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 连续，$g(x)$ 在 $x=1$ 不连续

$\Rightarrow f(x)+g(x)$ 在 $x=1$ 不连续.

因此，仅当 $a=-1$，$b=\ln 2$ 时 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处连续.

21 【答案】$\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}(2xe^{x^2-1}-1), & x>1.\end{cases}$

【分析】 注意在 $x=1$ 处 $\arctan x=\dfrac{1}{2}(e^{x^2-1}-x)+\dfrac{\pi}{4}$ 易得

$$f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},x\leqslant 1,$$

其中 $x=1$ 处是 $f'_+(1)=\left.\dfrac{1}{1+x^2}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{2}.$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}(e^{x^2-1}-x)+\frac{\pi}{4}\right)'=\frac{1}{2}(2xe^{x^2-1}-1),x\geqslant 1.$$

其中 $x=1$ 处是 $f'_-(1)=\left.\dfrac{1}{2}(2xe^{x^2-1}-1)\right|_{x=1}=\dfrac{1}{2}.$

因为 $f'_+(1)=f'_-(1)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{2}$

因此 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}(2xe^{x^2-1}-1), & x>1.\end{cases}$

22 【答案】$\begin{cases}\dfrac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & -\infty<x<1,x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

【分析】 首先由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续确定 b 值：

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{bx}{x}=b=f(0)=-1$$

$\Rightarrow b=-1.$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & -\infty<x<1,x\neq 0,\\ -1, & x=0,\end{cases}$$

$x\neq 0$ 时

$$f'(x)=\frac{\dfrac{-x}{1-x}-\ln(1-x)}{x^2}=\frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}(-\infty<x<1,x\neq 0)$$

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com