



精品课程·名师讲堂丛书

考研数学
指定教材

精析考点

知识脉络 紧循考纲

结构清晰

重点难点 一语道破

夯实基础

讲练结合 理清思路

提升技巧

综合拓展 一题多解

高等数学 辅导讲案

—— 主讲教材《高等数学》

〔同济第四版〕

符丽珍 刘克轩 主编

高等院校
教材同步辅导

西北工业大学出版社



精品课程·名师讲堂丛书

高等数学 辅导讲案

——主讲教材《高等数学》(同济·第四版)

符丽珍 刘克轩 主编

西北工业大学出版社

西安

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导讲案/符丽珍,刘克轩主编. —西安:西北工业大学出版社,2019.8

(精品课程·名师讲堂丛书)

ISBN 978-7-5612-6530-7

I. ①高… II. ①符… ②刘… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 169306 号

GAODENG SHUXUE FUDAO JIANGAN

高等数学辅导讲案

责任编辑:孙倩李萌

策划编辑:李萌

责任校对:王蓁

装帧设计:李飞

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号

邮编:710072

电话:(029)88491757, 88493844

网址:www.nwpup.com

印刷者:陕西金德佳印务有限公司

开本:850 mm×1168 mm

1/32

印张:19.3125

字数:644千字

版次:2019年8月第1版

2019年8月第1次印刷

定价:62.00元

如有印装问题请与出版社联系调换

前 言

高等数学是变量数学，它是研究运动、无限过程、高维空间和多因素作用的科学。高等数学课程是理工科院校的一门非常重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者学好高等数学课程，满足读者学习和考研的需要，我们根据多年的教学经验编写了本书。

本书参考了同济大学编写的《高等数学》（第四版）的章节顺序，分为 12 讲，每讲均设计了 4 个板块。

1. 内容聚焦

一、内容要点精讲 列出了基本概念、重要定理和公式，突出考点的核心知识。

二、知识脉络图解 用框图形式列出，并指出各知识点间的有机联系。

三、重点、难点点击 突出重点，剖析难点，强调考点。

2. 典型例题精选

从历年本科生期末试题和全国硕士研究生入学试题中精选出典型题目，进行分析解答。

3. 课后作业

4. 主讲教材课后习题精选详解及检测真题

附录中对同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第四版)的课后习题做了详细解答。因篇幅所限,对超出教学基本要求标“*”号的内容,仅对欧拉方程一节的习题做了解答。每一讲编入了课后检测真题,并附有参考答案。

本书通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答,揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧。这对于提高读者分析问题的能力,理解基本概念和理论,开拓解题思路、全面增强数学素质,可以起到良好的效果。

参加本书编写的有符丽珍、刘克轩、肖亚兰、王雪芳、杨月茜和陆全。本书由符丽珍、刘克轩统稿并担任主编。

由于水平有限,书中疏漏和不妥之处在所难免,恳请读者指正。

编者

2019年3月

于西北工业大学

目 录

第 1 讲 函数与极限	1
1.1 本讲内容聚焦	1
1.2 典型例题精选	4
1.3 课后作业.....	12
1.4 检测真题.....	13
第 2 讲 导数与微分	16
2.1 本讲内容聚焦.....	16
2.2 典型例题精选.....	20
2.3 课后作业.....	27
2.4 检测真题.....	28
第 3 讲 中值定理与导数的应用	31
3.1 本讲内容聚焦.....	31
3.2 典型例题精选.....	34
3.3 课后作业.....	46
3.4 检测真题.....	48
第 4 讲 不定积分	50
4.1 本讲内容聚焦.....	50
4.2 典型例题精选.....	54
4.3 课后作业.....	62
4.4 检测真题.....	64
第 5 讲 定积分	66
5.1 本讲内容聚焦.....	66
5.2 典型例题精选.....	70
5.3 课后作业.....	79

5.4	检测真题	81
第6讲	定积分的应用	84
6.1	本讲内容聚焦	84
6.2	典型例题精选	87
6.3	课后作业	97
6.4	检测真题	99
第7讲	空间解析几何与向量代数	101
7.1	本讲内容聚焦	101
7.2	典型例题精选	108
7.3	课后作业	114
7.4	检测真题	115
第8讲	多元函数微分法及其应用	116
8.1	本讲内容聚焦	116
8.2	典型例题精选	121
8.3	课后作业	129
8.4	检测真题	130
第9讲	重积分	133
9.1	本讲内容聚焦	133
9.2	典型例题精选	136
9.3	课后作业	144
9.4	检测真题	146
第10讲	曲线积分与曲面积分	148
10.1	本讲内容聚焦	148
10.2	典型例题精选	152
10.3	课后作业	160
10.4	检测真题	161
第11讲	无穷级数	163
11.1	本讲内容聚焦	163
11.2	典型例题精选	168

11.3	课后作业	178
11.4	检测真题	180
第 12 讲	微分方程	181
12.1	本讲内容聚焦	181
12.2	典型例题精选	183
12.3	课后作业	192
12.4	检测真题	193
附录	课后真题精选详解	195

第 1 讲

函数与极限

本讲涵盖了主讲教材第 1 章的内容.

1.1 本讲内容聚焦



一、内容要点精讲

(一) 函数概念

1. 函数的几种特性

(1) 有界性: $|f(x)| \leq M, \forall x \in X \subset D$.

(2) 单调性: $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D$.

(3) 奇偶性: $f(-x) = \pm f(x), \forall x, -x \in D$.

(4) 周期性: $f(x+L) = f(x), \forall x, x+L \in D$.

2. 基本初等函数, 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

(二) 数列极限

1. 数列极限的定义

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N, \text{当 } n > N \text{ 时, 恒有 } |x_n - a| < \epsilon$.

2. 收敛数列的性质

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限必唯一.

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

(3) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则它的任一子数列也收敛于 a .

3. 数列收敛性的判别定理

- (1) 夹逼定理.
- (2) 单调有界数列必有极限.

(三) 函数极限

1. 函数极限的定义

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$

2. 左极限、右极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

3. 极限的局部保号性

(四) 无穷小与无穷大

1. 无穷小

- (1) 定义: 以零为极限的变量称做无穷小量.
- (2) 无穷小的阶: 设 $\alpha(x), \beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小, 且 $\alpha \neq 0$,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小, 记作 } \beta = o(\alpha) \\ \infty & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 低阶的无穷小} \\ c \neq 0 & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是同阶无穷小} \\ 1 & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是等价无穷小, 记作 } \alpha \sim \beta \end{cases}$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(3) 无穷小的运算性质: 有限个无穷小的和仍为无穷小, 有限个无穷小的乘积仍为无穷小. 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小. 求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母可用等价无穷小来代替.

2. 无穷大

绝对值无限增大的变量叫无穷大. 无穷小(不取零值)的倒数为无穷大, 反之无穷大的倒数为无穷小.

(五) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e).$$

(六) 函数的连续性

1. 定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

初等函数在其定义区间内都是连续的.

2. 闭区间上连续函数的性质

① 有界性; ② 最值定理; ③ 介值定理; ④ 零点存在定理.

3. 函数的间断点

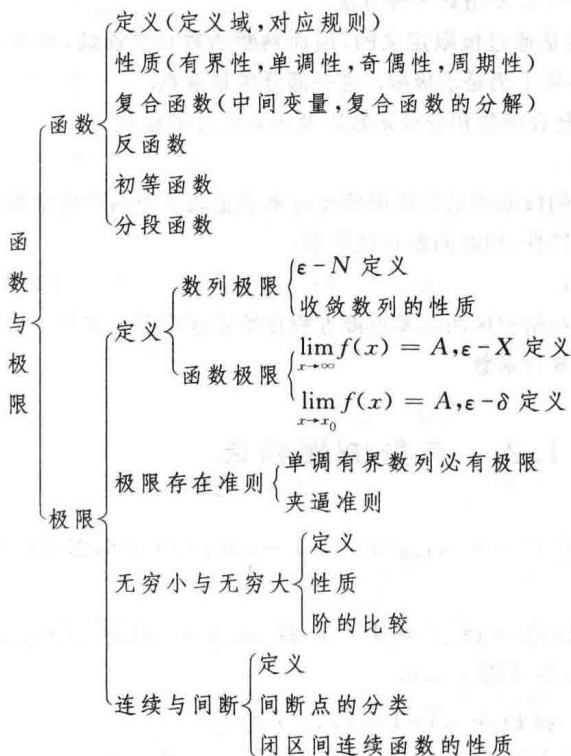
(1) 第一类间断点: 左、右极限都存在的间断点. 有可去间断点及跳跃间断点.

(2) 第二类间断点: 左、右极限不都存在的间断点. 有无穷间断点及振荡间

断点.



二、知识脉络图解





三、重点、难点点击

本讲的重点内容是极限. 既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件, 又要能正确求出各种极限. 求极限的方法很多, 主要有:

- (1) 利用极限的四则运算法则;
- (2) 利用连续函数;
- (3) 利用两个重要极限;
- (4) 利用等价无穷小代换(常会使运算化简);
- (5) 利用夹逼定理;

(6) 先证明数列的极限存在(通常用“单调有界数列必有极限”的准则), 再利用关系式求出极限.

有时在一个题目中往往要用到多种方法.

由于函数的连续性是通过极限定义的, 因而判断函数是否连续, 判断函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 这一部分也是重点.

函数部分, 重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.

本讲常见的题型有:

- (1) 直接计算给定的极限或给定极限值反过来确定式子中的待定常数;
- (2) 讨论函数的连续性, 判断间断点的类型;
- (3) 无穷小的比较;
- (4) 讨论连续函数在给定区间的零点或方程在给定区间有无实根;
- (5) 求分段函数的复合函数.

1.2 典型例题精选

【例 1-1】 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【解】 因为 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)^2} = 1 - x$, 故 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 再由 $\ln(1-x) \geq 0$, 得 $1-x \geq 1$ 即 $x \leq 0$.

所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$, $x \leq 0$

【例 1-2】 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$ ($-\infty < x < +\infty$) 是().

- (A) 有界函数 (B) 单调函数

(C) 周期函数 (D) 偶函数

【解】 应选(D). 因 $f(x) = f(-x)$.

【例 1-3】 函数 $f(x) = x \sin x$ ().

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大 (B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 (D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限

【解】 应选(C).

【例 1-4】 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\cos \ln(1+x) - \cos \ln x]$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{x}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{n^3} [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$$

【解】 (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\cos \ln(1+x) - \cos \ln x] =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \ln (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} \right] = 0$$

这是因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$, 而 $|\sin \ln (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}| \leq 1$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos^2 x}{x(\sqrt{1+x \sin x} + \cos x)} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + \sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} (x + \sin x) = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{n^3} [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^2}{3}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n}{n^4}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2 + \cos x}{3})} - 1}{x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(\frac{2 + \cos x}{3})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\cos x - 1}{3})}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{-x^2}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

【例 1-5】 设 $x_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$, 求

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} \right] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ 1 + 2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = 2$$

【例 1-6】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right]$.

【解】 因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right] = 2 - 1 = 1$$

故原式 = 1.

【例 1-7】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x}$.

【解法 1】 令 $x = \frac{1}{t}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3+5t^2}{5+3t} \cdot \frac{\sin 2t}{t} = \frac{6}{5}$$

【解法 2】 因为当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{2}{x} \sim \frac{2}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \cdot \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+10}{5x^2+3x} = \frac{6}{5}$$

【例 1-8】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$.

【解】 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}] =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

【例 1-9】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n})$.

【解】 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} < \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots +$

$$\frac{n}{n^2+n+n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \frac{1}{2}$$

由夹逼准则, 从而原极限 = $\frac{1}{2}$.

【例 1-10】 设 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$$

【解】 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[a^1 a^2 \cdots a^n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln a^{\frac{n(n+1)}{2}} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \ln a = \frac{1}{2} \ln a$$

【例 1-11】 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ().

- (A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定为零
(C) 一定不存在 (D) 不一定存在

【解】 应选(D). 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 不一定存在.

【例 1-12】 设 $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的().

- (A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点
(C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

【解】 应选(B). 因 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{3}$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 且为跳跃间断点.

【例 1-13】 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$, 求常数 a .

【解】 因为 $9 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right]^x = \frac{e^a}{e^{-a}} = e^{2a}$

即 $e^{2a} = 9$, 从而 $a = \ln 3$.

【例 1-14】 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n=1, 2, \dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

【解】 由 $0 < x_1 < 3$ 知 $x_1, 3-x_1$ 均为正数, 故

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2}(x_1+3-x_1) = \frac{3}{2}$$

设 $0 < x_k \leq \frac{3}{2}$ ($k > 1$), 则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2} \quad [11]$$

由数学归纳法知,对任意正整数 $n > 1$ 均有 $0 < x_n \leq \frac{3}{2}$,因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

又当 $n > 1$ 时,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \\ &= \sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n} - \sqrt{x_n}) = \frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n} + \sqrt{x_n}} \geq 0 \end{aligned} \quad [12]$$

因而有 $x_{n+1} \geq x_n (n > 1)$,即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由单调有界数列必有极限知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,在 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限,得

$$a = \sqrt{a(3-a)}$$

解之得 $a = \frac{3}{2}, a = 0$ (舍去).

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$$

【例 1-15】 求 $f(x) = (1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点,并判断其类型.

【解】 $f(x)$ 的间断点为 $\tan(x-\frac{\pi}{4}) = 0$ 的点及 $\tan(x-\frac{\pi}{4})$ 不存在的点,

故 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 的间断点为 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处, $f(\frac{\pi}{4}+0) = +\infty$; 在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 处, $f(\frac{5\pi}{4}+0) = +\infty$. 故 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点(无穷间断点).

在 $x = \frac{3\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = 1$; 在 $x = \frac{7\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}} f(x) = 1$. 故 $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 为第一类间断点(可去间断点).

【例 1-16】 当 $x \rightarrow 1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限().

(A) 等于 2

(B) 等于 0

(C) 为 ∞

(D) 不存在但不为 ∞