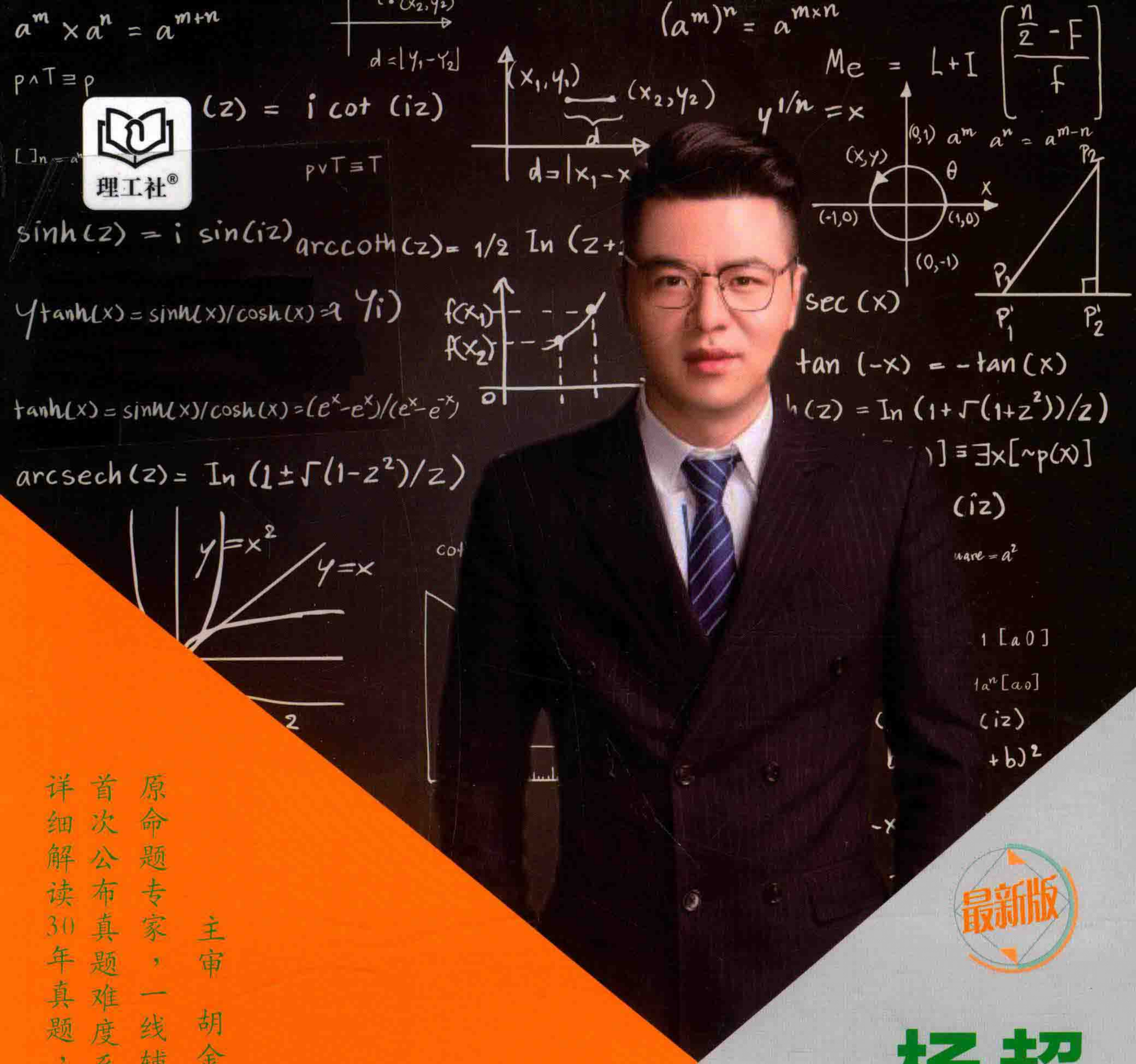


最新版

杨超

考研数学真题超解读

（数学二）

主审 胡金德

原命题专家，一线辅导专家

首次公布真题难度系数，指出常见错误

详细解读30年真题，试卷与专题完美结合

主 编 杨超
副主编 靳阳 姜晓千

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

杨超
考研数学真题超解读

（数学二）

主　编 杨超　　副主编 靳阳 姜晓千

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

杨超考研数学真题超解读．数学二 / 杨超主编．—北京：北京理工大学出版社，2018.7

ISBN 978-7-5682-5877-7

Ⅰ.①杨…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第145417号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市宇通印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 20
字　　数 / 490千字
版　　次 / 2018年7月第1版　2018年7月第1次印刷
定　　价 / 52.90元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

一、前言

本书收集了近30多年的真题，并将1987年到2007年的具有代表性的重点题目单独整理出来，以便于同学们在有限的时间里做到真题的精华部分，少走弯路，其中重点把近10年的真题做了详细具体的分析，并在以前版本的基础上从不同的角度给出试题的数据分析(特别是对真题的每个题目增加了区分度和难度值的数据)，内容更加丰富，解法更加全面，希望广大考生能充分利用好这套资料，最终取得满意的成绩！

二、真题特点

考研数学从1987年到现在实行的是全国统一考试的形式，考研数学的命题因此也逐步走向成熟，而现在的考研数学有以下几个特点：

①考察全面、注重基础

近几年的考研数学真题考察的均是相关课程的主干知识，而且都是核心概念、理论基础和常用方法(特别是三大计算能力的考察)，都是需在课程中重点强调的内容。

②强调重点、注重能力

真题在考察基础知识的内容上，试卷依然坚持能力立意的命题原则，注重科学内容的内在联系和知识的综合运用，对课程的重点内容、核心概念、重点方法进行重点考察。

③控制难度、有利选拔

从历年的真题来看，考研数学的整体难度趋于平稳，一般不会有特别大的起伏，其中中等和中等难度以下的试题占到了70%以上，选择题和填空题大部分都是基础题，解答题中的基本题也几乎占一半，即使在综合性较强的试题中，在设问上也会做处理，为考生作答铺了路(例如中值定理的证明题就是一个典型)。

三、试题的评价与指标

1. 试题的评价指标

①试题难度是反映试题难易程度的指标，它是考生在该题上的得分率，即考生在该题上的平均得分与该题满分比，通常用小写的p表示，取值范围在0与1之间．对于数学考试而言，难度值在0.3以下为难题，难度值在0.3～0.8的视为中等难度的试题，难度值在0.8以上的视为易题．试卷难度一般控制在0.5左右，一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例．

②试题区分度是指题目对不同水平考生加以区分的程度或鉴别能力．区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数，用D表示，一般$-1<D<1$.

一般试题区分度在0.3以上的试题为合格，0.2～0.3的试题应予以修正，0.2以下的试题为不合格，应予以淘汰．

区分度与难度有一定的关系，难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小，难度中等的试题区分度通常较大，为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价，我们通常将试

题分为六类，如下表所示．

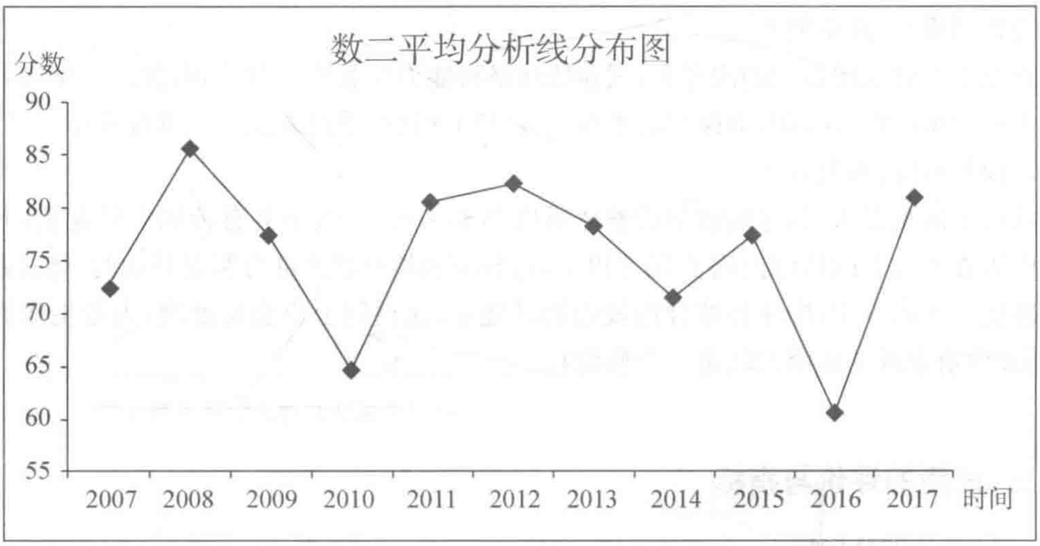
试题的六大类型分类表

特征 类型	p	D	试题特征
Ⅰ	(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
Ⅱ	[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
Ⅲ	(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
Ⅳ	(0.0.3)	(0.3,1)	难度大但区分能力强
Ⅴ	[0.3,0.8]	(0.3,1)	难度适中且区分能力强
Ⅵ	(0,0.3)	(0.3,1)	难度小且区分能力强

在历年真题中，第Ⅴ类试题是测试效果较好的试题，在试卷中应占较大比例(达 80%以上)；第Ⅰ类试题属于“题太难谁都不会做”；第Ⅲ类试题属于“题太易谁都会做”；而第Ⅳ类试题往往对区分中、高水平的考生很有效，这类试题往往是考察考生综合应用能力的试题．

2. 近 10 年平均分分布

数二平均分分布											
年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
平均分	72.28	85.86	77.59	64.74	80.66	82.34	78.49	71.65	77.43	60.56	81.07



目　录

高等数学部分

第一章　极限

一、极限的定义与性质

(1998) 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列选项正确的是　(　　)

(A) 若$\{x_n\}$发散,则$\{y_n\}$必发散

(B) 若$\{x_n\}$无界,则$\{y_n\}$必有界

(C) 若$\{x_n\}$有界,则当$n\to\infty$时y_n必为无穷小

(D) 当$n\to\infty$时,若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷大,则y_n必为无穷小

解:选(D).

分析:$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\cdot x_ny_n=0$.

(1999)"对任意给定的$\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数N,当$n\geqslant N$时,恒有$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于$a$的　(　　)

(A) 充分但非必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

解:选(C).

(2003) 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有　(　　)

(A)$a_n<b_n$对任意n成立　　(B)$b_n<c_n$对任意n成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

解:选(D).

分析:假设极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$存在,等于$k$,则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}=k$,与题设矛盾,故$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

二、无穷小的性质与无穷小的阶

(1997) 设$x\to 0$时,$e^{\tan x}-e^x$与x^n是同阶无穷小,则n为　(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解:选(C).

分析:$e^{\tan x}-e^x=e^x(e^{\tan x-x}-1)\sim e^x(\tan x-x)$,由泰勒公式,当$x\to 0$时,

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3,$$

故 $n = 3$.

(2000) 若$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$，则$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6 + f(x)}{x^2}$ 为 ( )

(A)0 (B)6 (C)36 (D)∞

解：选(C).

分析：**方法一**，由无穷小的阶的概念，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$，

则当 $x \to 0$ 时，$\sin 6x + xf(x) = o(x^3)$，

$$\lim_{x \to 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{6x - \sin 6x + \sin 6x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36.$$

方法二，由泰勒公式，当 $x \to 0$ 时，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3) + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} - 36 = 0,$$

故$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6 + f(x)}{x^2} = 36$.

(2001) 设当 $x \to 0$ 时，$(1 - \cos x)\ln(1 + x^2)$ 比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于 ( )

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

解：选(B).

分析：$(1 - \cos x)\ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2}x^4$，$e^{x^2} - 1 \sim x^2$，故 $x\sin x^n$ 是 x 的 3 阶无穷小，$n = 2$.

(2005) 当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k =$ ________.

解：填$\frac{3}{4}$.

分析：$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x\arcsin x}{kx^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x\arcsin x} + \sqrt{\cos x}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{x\arcsin x}{kx^2} + \frac{1 - \cos x}{kx^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k} \right) = 1,$$

故 $k=\frac{3}{4}$.

(2006) 确定 A,B,C 的值,使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

解:$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$,

$$\begin{aligned}e^x(1+Bx+Cx^2)&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)(1+Bx+Cx^2)\\&=1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3+o(x^3)\\&=1+Ax+o(x^3),\end{aligned}$$

可得$\begin{cases}1+B=A\\ \frac{1}{2}+B+C=0\\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0\end{cases}$,解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.

(2007) 当 $x\to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$ 等价的无穷小是 ( )

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$

(B)$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$

(D)$1-\cos\sqrt{x}$

解:选(B).

分析:当 $x\to 0^+$ 时,$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$,$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$,$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$,因 $\ln(1+x)\sim x$,$-\ln(1-\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$,低阶加高阶等价低阶,故

$$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})\sim\sqrt{x}.$$

三、函数极限的计算

1. 分侧讨论计算极限

(1992) 当 $x\to 1$ 时,函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ( )

(A) 等于 2

(B) 等于 0

(C) 为 ∞

(D) 不存在但不为 ∞

解:选(D).

分析:本题见特殊标志 $e^{\frac{1}{x-1}}$,需要分侧讨论.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

故选(D).

2. $\frac{0}{0}$ 型极限计算

(1994) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,则 ( )

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　(B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　(D) $a=1,b=-2$

解: 选(A).

分析: 由泰勒公式,当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-ax-bx^2}{x^2}=2,$$

故 $1-a=0,-\dfrac{1}{2}-b=2$,可得 $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.

(1995) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\dfrac{1}{2}x}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\dfrac{1}{2}$.

(1998) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

解: 填 $-\dfrac{1}{4}$.

分析: 由泰勒公式,当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)$,

$$\sqrt{1-x}=1+\frac{1}{2}(-x)-\frac{1}{8}(-x)^2+o(x^2),$$

故
$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\sim-\frac{1}{4}x^2,$$

故原极限结果 $-\dfrac{1}{4}$.

(1999) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^2}{-\dfrac{1}{2}x^2}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2000) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} =$ ________.

解:填 $-\dfrac{1}{6}$.

分析:由泰勒公式,当 $x\to 0$ 时,$\arctan x - x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{3}x^3}{2x^3} = -\frac{1}{6}.$$

(2001) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} =$ ________.

解:填 $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

分析:$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

(2008) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x[\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4}$.

解:由泰勒公式,当 $x\to 0$ 时,$\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$,故 $x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$,同理,

$$\sin x - \sin(\sin x) \sim \frac{1}{6}(\sin x)^3 \sim \frac{1}{6}x^3,$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x[\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{6}x^3}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

3. 1^∞ 型极限计算

(1989) 求$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(2\sin x + \cos x - 1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x}} = e^2$.

(1990) 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$,求常数 a.

解:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{2a}{x-a}} = e^{2a} = 9$,

故 $a = \ln 3$.

(2004) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right]$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}} - 1}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{2+\cos x}{3}}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x - 1}{3}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x - 1}{3}}{x^2} = -\frac{1}{6}.$$

4. $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限计算

(1991) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ ________.

解: 填 -1.

分析: $x\to0^+$, $\dfrac{1}{x}\to+\infty$, $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$,

故
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=-1.$$

(1997) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解: 上下同时除以 $-x$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

5. $\infty-\infty$ 型极限计算

(1987) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解: $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(1990) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则 ( )

(A) $a=1,b=1$ (B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$ (D) $a=-1,b=-1$

解: 选(C).

分析:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(ax+b)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0,$$

故 $1-a=0$, $a+b=0$,可得 $a=1,b=-1$.

6. $0\cdot\infty$ 型极限计算

(1989) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=$ ________.

解: 填 $\dfrac{1}{2}$.

分析: $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 2x}\cdot\cos 2x=\dfrac{1}{2}$.

(1993) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$ ________.

解: 填 0.

分析: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 0.$

(1993) 求 $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解: $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x) = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+100}+\dfrac{1}{t}}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{-\sqrt{1+100t^2}+1}{t^2}$

$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{-\dfrac{1}{2}\cdot 100t^2}{t^2} = -50.$$

(1996) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] =$ ________.

解: 填 2.

分析: 当 $x\to\infty$ 时, $\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\sim\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\sim\dfrac{3}{x}$,

$$\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x},$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{3}{x} - \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{x} = 2.$$

7. ∞^0, 0^0 型极限计算

(1988) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} =$ ________.

解: 填 1.

分析:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{x}}},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} x\ln\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} = 1.$

四、数列极限的计算

1. 利用函数极限方法计算数列极限

(1987) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n =$ ________.

解: 填 e^{-3}.

分析: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{-3}{n+1}} = e^{-3}.$

2. 利用夹逼准则计算数列极限

(1995) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots\dfrac{n}{n^2+n+n}\right) =$ ________.

解：填$\frac{1}{2}$.

分析：$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$.

3. 利用单调有界准则计算数列极限

(1999) 设 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

证：由积分中值定理，$\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$，$k<\xi<k+1$，则

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k),$$

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant 0,\end{aligned}$$

数列$\{a_n\}$有下界，又

$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

故$\{a_n\}$单调递减.

由单调有界准则，数列$\{a_n\}$极限存在.

(2002) 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限.

解：由 $0<x_1<3$，$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}$,

$$0<x_3=\sqrt{x_2(3-x_2)}\leqslant\frac{1}{2}(x_2+3-x_2)=\frac{3}{2},$$

假设当 $k>1$ 时，$0<x_k\leqslant\frac{3}{2}$,

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

由数学归纳法，对任意正整数 $n>1$，$0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$，数列$\{x_n\}$有界，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}\left(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n}\right)\geqslant 0,$$

数列$\{x_n\}$单调递增.

由单调有界准则,数列$\{x_n\}$极限存在,

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对$x_{n+1}=\sqrt{x_n(x_n+3)}$两侧同时取极限,$a=\sqrt{a(3-a)}$,解得

$$a=\frac{3}{2}\text{ 或 }a=0(\text{舍去}),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

(2006) 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求该极限;

(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解:(1)$0<x_1<\pi$,且$x_{n+1}=\sin x_n$,故有$x_n>0$.

又对于任意的$x>0$,有$0<\sin x<x$,故$0<x_{n+1}<\pi$,且$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$,数列$\{x_n\}$单调递减且有下界,极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则对$x_{n+1}=\sin x_n$两侧同时取极限,得$A=\sin A$,解得$A=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{\lim\limits_{x_n\to0}\frac{1}{x_n^2}\cdot\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)}=e^{-\frac{1}{6}}$.

(2008) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$为数列,下列命题正确的是 ( )

(A) 若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{f(x_n)\}$收敛

(B) 若数列$\{x_n\}$单调,则数列$\{f(x_n)\}$收敛

(C) 若数列$\{f(x_n)\}$收敛,则数列$\{x_n\}$收敛

(D) 若数列$\{f(x_n)\}$单调,则数列$\{x_n\}$收敛

解:选(B).

分析:对于选项(B),$f(x)$为单调有界函数,若数列$\{x_n\}$单调,则数列$\{f(x_n)\}$也单调,满足单调有界准则,极限存在,必收敛.

五、连续与间断

(1997) 已知函数$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续,则$a=$________.

解:填$e^{-\frac{1}{2}}$.

分析:$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$,故$a=e^{-\frac{1}{2}}$.

(1998) 求函数$f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

解:$f(x)$在区间$(0,2\pi)$内的间断点为$\dfrac{1}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$的无定义点,即$x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=+\infty,\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}f(x)=+\infty,$$

故 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，无穷间断点.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1,\lim_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1,$$

故 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，可去间断点.

(2000) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求函数 $f(x)$ 的间断点及其类型.

解： $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$，则 $x=0,k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的间断点.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e,$$

故 $x=0$ 为函数的可去间断点，$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为函数的无穷间断点.

(2002) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

解： 填 -2.

分析： $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=-2$,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}ae^{2x}=a,$$

故 $a=-2$.

(2003) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？a 为何值时，$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点？

解： $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^3}{-\frac{1}{6}x^3}=-6a$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}=4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{2}=2a^2+4.$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有 $-6a=2a^2+4=6$，$a=-1$；

若 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，则有 $-6a=2a^2+4\neq6$，$a\neq-1$.

(2004) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ________.