时滞生物动力系统的
稳定性和 Hopf 分支研究

张子振 / 著

中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

时滞生物动力系统的
稳定性和 Hopf 分支研究

张子振／著

中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

时滞生物动力系统的稳定性和 Hopf 分支研究/张子振著. —北京：经济科学出版社，2019.2
ISBN 978-7-5218-0323-5

Ⅰ. ①时… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①生物数学-动力系统（数学）-研究 Ⅳ. ①Q-332

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 038577 号

责任编辑：周国强
责任校对：刘 昕
责任印制：邱 天

时滞生物动力系统的稳定性和 Hopf 分支研究
张子振 著
经济科学出版社出版、发行 新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编：100142
总编部电话：010-88191217 发行部电话：010-88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
固安华明印业有限公司印装
710×1000 16 开 9.5 印张 160000 字
2019 年 2 月第 1 版 2019 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5218-0323-5 定价：58.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010-88191510）

序　言

生物动力系统在演化过程中受到各种环境因素的影响，尤其是时滞因素广泛存在于生物动力系统的演化过程中。时滞生物动力系统稳定性和分支的研究，长期以来受到系统生物学领域广大学者的关注。其中，稳定性体现了结构平衡性，在无穷维空间上对系统进行稳定性研究，会全面和深入地展示系统的动力学性质。所谓分支，是指当参数发生变化并经过某些临界值时，系统的某些特性发生突变的现象。Hopf 分支是一种常见而重要的分支，它主要研究当参数变化时，平衡点的稳定性发生变化，从而在平衡点附近产生小振幅周期解的现象。研究时滞生物动力系统的动力学性质，不仅具有重要的理论意义，而且还可以更好地揭示生物动力系统的实际运动规律，具有重要的现实意义。

有鉴于此，本书借助于动力系统稳定性理论、分支理论以及中心流形定理和规范型理论等，研究时滞生物动力系统的稳定性和 Hopf 分支问题，是对现有的生物动力系统研究工作的适当补充，为生物动力系统研究同行提供借鉴性参考价值。具体工作如下：

（1）研究了一类具有常数输入率和非线性治愈率的时滞传染病系统的稳定性和 Hopf 分支问题。以疾病的潜伏期时滞为分支参数，通过分析系统相应的特征超越方程根的分布情况，发现随着时滞的增大，系统出现稳定开关和 Hopf 分支现象。进而，利用中心流形定理和规范型理论给出了确定分支方向和分支周期解稳定性计算公式的显式算法。最后，利用仿真算例验证了理论分析结果的正确性。

（2）研究了具有两个时滞的三种群食物链系统的稳定性和Hopf分支问题。在两个时滞相等和不相等的情况下，通过分析系统特征方程根的分布情况，讨论了系统局部渐近稳定性和Hopf分支存在性。并利用中心流形定理和规范型理论研究了Hopf分支方向和分支周期解稳定性。最后，利用仿真算例验证了理论分析结果的正确性。

（3）研究了食饵种群、捕食者种群均具有阶段结构的时滞捕食系统的稳定性和Hopf分支问题。以系统两个时滞的不同组合为分支参数，得到正平衡点局部渐近稳定和Hopf分支存在的充分条件。并给出了确定Hopf分支方向和分支周期解稳定性的具体计算公式。最后，利用仿真算例验证了理论分析结果的正确性。

（4）研究了具有两个时滞和隔离策略的计算机网络病毒传播模型——SEIQRS模型的稳定性和Hopf分支问题。选取反病毒软件查杀病毒周期和已清除病毒计算机的临时免疫期时滞的不同组合为分支参数，讨论随着分支参数的变化，系统正平衡点的稳定性情况，以及Hopf分支的存在性。并对Hopf分支的性质进行了研究。最后，利用仿真算例验证了理论分析结果的正确性。

最后，笔者想说，由于能力和条件有限，错误和不当之处在所难免，敬请同行专家和广大读者批评指正，并提出宝贵的建议。在本书出版之际，衷心感谢对本书顺利出版给予大量支持和帮助的安徽财经大学和经济科学出版社。

安徽财经大学　张子振

2018年12月

目录
CONTENTS

第1章 绪论

1.1 问题提出与研究意义

由于生物动力系统在自然界中的广泛存在性，生物动力系统已经受到国内外研究学者的极大关注。尤其是利用微分方程建模方法，研究传染病动力系统、种群动力系统以及药物动力系统等，已经取得了很多研究成果。孙成军等（2007）研究了一类具有非线性发生率的 SEIR（susceptible-exposed-infectious-recovered）传染病模型的全局稳定性；蔡礼明和李学志（2009）研究了一类具有非线性发生率和免疫的 SEIV（susceptible-exposed-infectious-vaccinated）传染病模型的全局稳定性；刘兴波和杨丽娟（2012）研究了一类同时具有免疫和隔离策略的 SEIQV（susceptible-exposed-infectious-quarantined-vaccinated）传染病模型的稳定性；杨青山等（2012）研究了一类具有非线性发生率的随机 SIR（susceptible-infectious-recovered）和 SEIR 传染病模型的遍历性和灭绝性；刘振杰（2013）研究了一类具有非线性发生率的 SIR 和 SEIR 传染病模型的周期解；胡增云和腾志东研究了一类离散 SIR 传染病模型的局部稳定性和 Flip 分支以及 Hopf 分支；王倩等（2003）研究了一类半比率依赖型捕食系统模型的有界性、持久性以及周期解；李一龙和肖冬梅（2007）、宋新宇和李永凤（2008）、田艳玲和翁佩萱（2011）分别研究了具有 Holling 型和 Leslie 型功能性反应的捕食系统模型；伊托瓦和卢梭（Etoua & Rousseau，2010）研究了一类高斯型捕食系统模型的鞍节点分支、Hopf 分支、异宿分支和幂零鞍分支；马来亚·班纳吉和桑托·班纳吉（Malay Banerjee & Santo Banerjee，2012）研究了一类具有反应扩散项的比率依赖型捕食系统模型的图灵不稳定性；萨沃迪等（Sarwardi et al.，2012）研究了一类食饵具有庇护的竞争捕食系统模型的局部和全局稳定性以及分支周期解；刘蒙和王克（2013）研究了一类具有利维跳跃和 Leslie – Gower 型功能性反应的 Holling – Ⅱ类捕食系统模型的稳定性和灭绝性。

对于传染病动力系统的研究，是基于传染病的发病机理和疾病在种群内部的传播规律，建立微分方程模型。通过对模型的动力学性质进行研究，预测疾病的发展变化趋势，为疾病的预防和控制提供可靠的理论基础。对于种群动力系统，主要是利用微分方程模型，研究种群之间以及种群与环境之间的关系，并进一步对这些生态关系进行控制。另外，基于传染病在人与人之间的传播和计算机网络病毒在计算机与计算机之间的传播具有相似的特征，国内外研究学者将传染病动力学模型的构建思想，移植到计算机网络病毒传播模型的构建上，提出了不同的计算机网络病毒传播模型，并取得了一定的研究成果。邹长春等（2006）构建了一类蠕虫传播模型，并分析了不同的扫描策略对蠕虫传播的影响；皮奎特和阿劳霍（Piqueira & Araujo，2009）提出了一类改进的 SIR 计算机网络病毒传播模型，并研究了模型的稳定性；米什拉和贾哈（Mishra & Jha，2007）、韩燮和谭秋林（2010）、任建国等（2012）分别研究了一类 SIRS 计算机网络病毒传播模型的稳定性；袁华和陈国清（2008）、彭梅等（2013）提出了不同形式的具有潜伏期的 SEIR 计算机网络病毒传播模型，并研究了模型的稳定性；米什拉和潘迪（Mishra & Pandey，2011）、米什拉和贾哈（Mishra & Jha，2010）分别提出了 SEIRS 计算机网络病毒传播模型和具有隔离策略的 SEIQRS 计算机网络病毒传播模型；随后，米什拉和潘迪（Mishra & Pandey，2012）再次提出考虑反病毒软件影响的计算机网络病毒传播模型，并利用数值仿真给出如何利用反病毒软件有效控制计算机网络病毒传播的建议和策略；杨橹星等（2013）提出了具有分级治愈率的计算机网络病毒传播模型，并研究了模型的局部稳定性和全局稳定性；黄春源等（2013）提出了一类基于资源限制和交互成本的计算机网络病毒模型；米什拉和凯斯里（Mishra & Keshri，2013）研究了一类具有免疫策略的

无线传感网络蠕虫传播模型；茱莉娅（Jullia，2014）基于马尔科夫链研究了一类随机 SIRA（susceptible-infected-removed-antidotal）计算机网络病毒传播模型。

以上提到的都是不具有时滞因素的生物动力系统。众所周知，时滞因素在生物动力系统中是广泛存在的。对于传染病动力系统，在传染病传播过程中，常常伴随着一个潜伏期。即当易感者与染病者接触感染以后，首先携带有病毒，但是病毒并不是立即爆发，而是经过一段时间以后才发病。同时，对于染病者，治疗痊愈以后，有可能会经过一段时间的临时免疫期后再次被感染。对于种群动力系统，捕食者种群对食饵种群的捕捉、消化以及种群后代的繁衍，都是需要一个时间周期。对于计算机网络病毒传播模型，由于计算机病毒具有一定的潜伏期，计算机网络系统中病毒数量的变化对于增长率的影响不是瞬间发生的，而是与其过去的活动状态有关。并且计算机杀毒软件在对病毒进行查杀的时候，也是需要一定的时间周期。另外，对于已经感染病毒的计算机，其中的计算机病毒被清理之后，由于安装有杀毒软件很可能具有一定的临时免疫期。

因此，生物动力系统的演化，不仅仅和系统当前的状态有关，而且还依赖于过去某个时刻的历史状态。即，时滞因素对生物动力系统的动力学性质有着很大的影响。尤其是会使得生物动力系统的稳定性发生翻转，并在系统的平衡点附近出现周期解。这种现象就是 Hopf 分支。Hopf 分支是一种重要的非线性现象，与其他的非线性现象（如混沌、突变等）有着密切的联系，可能对生物动力系统本身造成难以估计的有害影响。研究时滞生物动力系统的 Hopf 分支，对于更好地反映生物动力系统的变化规律以及如何改变或者控制 Hopf 分支的发生，具有重要的理论指导和现实意义。

本书主要借助动力系统稳定性理论、分支理论、中心流形定理和规范型理论，对具有时滞的传染病动力系统、时滞捕食系统以及具有时滞的计算机网络病毒传播模型的稳定性、Hopf 分支的存在性以及 Hopf 分支的性质进行深入的研究。因此，本书对揭示生物动力系统的变化规律、预测系统的发展趋势，具有理论指导意义。

1.2 时滞传染病动力系统稳定性和 Hopf 分支研究综述

早在 1911 年，罗斯（Ross，1911）博士就已经利用微分方程建立传染病动力系统模型来研究疟疾病的传播机制通过研究系统模型的动力学行为，确定了有效控制疟疾病流行的有效措施。在 1926 年，克迈克和麦肯德里克（Kermack & McKendrick，1926）提出了经典的 SIR 模型。1932 年，克迈克和麦肯德里克（Kermack & McKendrick，1932）又提出了经典的 SIS 模型，并提出了著名的控制疾病传播的阈值理论。从 20 世纪中叶开始，越来越多的研究学者利用不同的数学模型研究各种传染病的传播机制。但是，过去的多数传染病动力系统模型是不考虑时滞因素的。而疾病的爆发、疾病的治愈均需要一个时间周期，并且感染疾病的个体被治愈后，也会具有一定的临时免疫期。因此，近年来，时滞传染病动力系统模型受到了国内外研究学者的关注。

在传染病动力系统建模中，疾病的发生率起着重要的作用。基于不同的疾病发生率，传染病动力系统可以分为三类：双线性发生率系统、标准发生率系统和非线性发生率系统。而对于时滞传染病动力系统稳定性和 Hopf 分支的研究，主要集中于双线性发生率系统和非线性发生率系统。下面针对这两类不同的时滞传染病动力系统，在稳定性和 Hopf 分支方面的研究情况进行综述。

1.2.1 双线性发生率系统

所谓双线性发生率，即假设单位时间内一个疾病患者与他人有效接触的次数（传染率），和人口总数成正比。这一假设在一定程度上也是符合实际的。因为易感人群规模越大，疾病患者与易感人群接触的机会越大，疾病的传染程度也就越大。因此，传统的传染病动力系统，大多采用双线性发生率。王建军等（2010）研究了如下时滞 SIR 传染病动力系统模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta S(t)I(t-\tau) + r\left(1 - \dfrac{S(t)}{K}\right)S(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \beta S(t)I(t-\tau) - \mu_1 I(t) - \gamma I(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma I(t) - \mu_2 R(t).
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

其中，$S(t)$、$I(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示易感者、染病者和恢复者在时刻 t 的数量，τ 表示疾病的潜伏期。王建军等（2010）以疾病的潜伏期 τ 为分支参数，得到系统模型（1.1）正平衡点局部渐近稳定和 Hopf 分支存在的充分条件。并利用哈萨德等（Hassard et al.，1981）介绍的中心流形定理和规范型理论给出确定 Hopf 分支的方向、分支周期解的稳定性以及周期大小的计算公式。但是，王建军等（2010）假设恢复者具有永久免疫力。这在现实世界中是不符合实际的。因为对于有些传染病，患病者被治愈后只有临时免疫力，过了临时免疫期之后，可能再次被感染。张太雷等（2010）提出了具有阶段结构的时滞 SIRS 传染病动力系统模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{A}{S(t)} + B\right)S(t) - (\omega + \mu_0)X(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \omega X(t) - \mu S(t) - \sigma S(t)I(t-\tau) + \delta R(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma S(t)I(t-\tau) - (\mu + \varepsilon + \gamma)I(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma I(t) - (\mu + \delta)R(t).
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

其中，$X(t)$、$S(t)$、$I(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示幼年易感者、成年易感者、染病者和恢复者在时刻 t 的数量。系统模型（1.2）是假设疾病只是在成年易感者之间流行。τ 表示疾病的潜伏期。张太雷等（2010）同样是以 τ 为分支参数，研究了系统模型（1.2）正平衡点的局部渐近稳定性和 Hopf 分支的存在性以及分支的性质。另外，也有一些研究学者将种群动力学与传染病动力学相结合，构建具有时滞的生态传染病动力系统，并对系统的稳定性和 Hopf 分支问题进行了研究。张嘉防等（2008）提出了一类捕食者具有疾病的时滞生态流行病模型，并以易感染捕食者种群的妊娠时滞为分支参数，研究了模型的局部稳定性和 Hopf 分支的存在性，进而利用中心流行定理和规范型理论研究了

分支周期解的稳定性。孙成军等（2006）、胡广平和李小玲（2012）分别研究了一类食饵具有疾病的时滞生态流行病模型的局部稳定性和 Hopf 分支。

1.2.2 非线性发生率系统

基于双线性发生率或者标准发生率建立的传染病动力系统模型，都是假设疾病的感染人数是线性增长的。但是，易感者人数再多，一个疾病感染者在单位时间内所接触的易感者却是有限的。因此，卡帕索和赛里奥（Capasso & Serio，1978）、刘为民等（1986）、阮世贵和王稳地（2003）、肖冬梅和阮世贵（2007）等研究学者又提出了具有非线性发生率的传染病模型。在王建军等（2010）研究工作的基础之上，恩腾冶一等（Enatsu et al.，2012）研究了一类具有非线性发生率的时滞 SIR 传染病动力系统模型，给出了模型有疾病平衡点存在的条件，并研究了无疾病平衡点的全局稳定性和有疾病平衡点的局部稳定性，以及模型的持久性。薛亚奎和李甜甜（2013）则在王建军等（2010）研究工作的基础上提出了如下具有非线性发生率的时滞 SIR 传染病动力系统模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS(t)}{dt} = -\dfrac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1+\alpha I(t-\tau)} + r\left(1-\dfrac{S(t)}{K}\right)S(t), \\
\dfrac{dI(t)}{dt} = \dfrac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1+\alpha I(t-\tau)} - (\mu+\alpha_1+v)I(t), \\
\dfrac{dR(t)}{dt} = vI(t) - \mu R(t).
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

其中，τ 表示疾病的潜伏期，$\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}$ 为非线性发生率。薛亚奎和李甜甜（2013）仍然是以疾病的潜伏时滞 τ 为分支参数研究了系统模型的局部渐近稳定性和 Hopf 分支的存在性及其性质。张寅颖和贾建文（2014）提出了一类具有非线性发生率的时滞 SIRS 传染病动力系统模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS(t)}{dt} = A-(\mu_1-B)S(t)+BqI(t)+BR(t)-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}+\gamma e^{-\mu_3\tau}I(t-\tau), \\
\dfrac{dI(t)}{dt} = \dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} - BqI(t)-(\gamma+\mu_2)I(t), \\
\dfrac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)-\mu_3 R(t)-\gamma e^{-\mu_3\tau}I(t-\tau).
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

其中，τ 表示恢复个体对疾病的临时免疫期。张寅颖和贾建文（2014）以 τ 为分支参数，研究了系统模型（1.4）正平衡点的局部渐近稳定性和 Hopf 分支的存在性以及性质。基于张太雷等（2010）的研究工作，陈方方和洪灵（2014）提出了如下具有非线性发生率和阶段结构的时滞 SIRS 传染病动力系统模型，并研究了该系统的局部稳定性和 Hopf 分支问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{A}{S(t)}+B\right)S(t)-(\omega+\mu_0)X(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\omega X(t)-\mu S(t)-\dfrac{\sigma S(t)I(t-\tau)}{1+\alpha I(t-\tau)}+\delta R(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sigma S(t)I(t-\tau)}{1+\alpha I(t-\tau)}-(\mu+\varepsilon+\gamma)I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=\gamma I(t)-(\mu+\delta)R(t).\end{cases}\tag{1.5}$$

另外，徐瑞和马知恩（2010）、周艳丽和张卫国（2014）分别研究了一类具有非线性发生率$\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}$和非线性发生率$\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I^2(t)}$的时滞 SEIRS 传染病动力系统的全局稳定性。索沃吉特和卡尔（Soovoojeet & Kar，2013）则研究了一类具有非线性发生率的时滞生态传染病动力系统的稳定性和 Hopf 分支问题。

1.3　时滞捕食系统稳定性和 Hopf 分支研究综述

由于个体攻击与被攻击——捕食现象在自然界中的普遍存在性，捕食系统，尤其是时滞捕食系统一直是种群动力学领域中的研究主题。对于捕食系统的研究，根据捕食系统中种群的结构，主要体现在以下三类系统：两种群时滞捕食系统、多种群时滞捕食系统以及具有阶段结构的时滞捕食系统。下面就这三类时滞捕食系统的稳定性和 Hopf 分支的研究现状进行综述。

1.3.1　两种群时滞捕食系统

早在 1973 年，澳大利亚生物学家罗伯特·梅（May，1973）在洛特卡

（Lotka，1925）和沃尔特拉（Volterra，2006）所提出的经典 Lotka - Volterra 捕食系统模型的基础上，考虑到种群的密度变化对增长率影响的非瞬时性，首次提出了具有时滞的捕食系统模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(r_1-a_{11}x(t-\tau)-a_{12}y(t)),\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)(-r_2+a_{21}x(t)-a_{22}y(t)).\end{cases}\tag{1.6}$$

其中，$x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示食饵种群和捕食者种群在时刻 t 的密度；τ 表示食饵种群的消极负反馈时滞，r_1 表示食饵种群的内秉增长率，r_2 表示捕食者种群的死亡率；$a_{ii}(i=1,2)$ 分别表示食饵种群和捕食者种群种内竞争率；$a_{ij}(i,j=1,2,i\neq j)$ 表示食饵种群和捕食者种群种间作用率。通过对系统模型（1.6）的稳定性进行研究，罗伯特·梅（May，1973）发现时滞因素会影响系统模型（1.6）正平衡点的稳定性并引起周期振荡。随后，宋永利和魏俊杰（2005）以时滞 τ 为分支参数，通过分析特征方程根的分布，讨论了系统模型（1.6）的局部 Hopf 分支的存在性，并利用哈萨德等（Hassard et al.，1981）提出的研究方法确定了 Hopf 分支的方向、分支周期解的稳定性和周期大小的计算公式。颜向平和李万同（2006）考虑到捕食者种群的消极负反馈时滞，在系统模型（1.6）的基础上提出了如下时滞捕食系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(r_1-a_{11}x(t-\tau)-a_{12}y(t)),\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)(-r_2+a_{21}x(t)-a_{22}y(t-\tau)).\end{cases}\tag{1.7}$$

颜向平和李万同（2006）以时滞 τ 为分支参数，讨论了 Hopf 分支的存在性，并利用法里亚和安文思（Faria & Magalhaes，1995）所提出的方法研究了 Hopf 分支的方向和分支周期解的稳定性。在系统模型（1.6）的基础上，法里亚（Faria，2001）、颜向平和褚衍东（2006）考虑到捕食者种群对食饵种群的捕捉时间以及捕食者种群繁殖后代所需的妊娠周期，研究了具有两个时滞的捕食系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(r_1-a_{11}x(t)-a_{12}y(t-\tau_1)),\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)(-r_2+a_{21}x(t-\tau_2)-a_{22}y(t)).\end{cases}\tag{1.8}$$

法里亚（Faria，2001）是以其中一个时滞 τ_2 为分支参数，讨论了系统模型（1.8）的 Hopf 分支问题。颜向平和褚衍东（2006）则以两个时滞的和为分支参数，讨论了系统的 Hopf 分支问题。

在上述经典的 Lotka－Volterra 捕食系统模型中，假设捕食者种群与食饵种群之间是线性的密度制约关系。霍林（Holling，1965）通过实验证明，这种假设在许多情况下是不合理的。为了更准确地描述捕食者种群和食饵种群之间的捕食关系，各种功能性反应函数被陆续提出。霍林（Holling，1965）提出了 Holling－Ⅰ类、Holling－Ⅱ类、Holling－Ⅲ类和 Holling－Ⅳ类功能性反应函数，贝丁顿（Beddington，1975）、贝丁顿和迪安吉里斯（Beddington & DeAngelis，1975）提出了 Beddington－DeAngelis 功能性反应函数，克劳利和马丁（Crowley & Martin，1989）提出了 Crowley－Martin 功能性反应函数，肖冬梅和阮世贵（2001）提出了非单调泛函功能性反应函数。此外，安德鲁斯（Andrews，1968）、柯林斯（Collings，1997）、沃尔金德和洛根（Wollkind & Logan，1978）、沃尔金德等（Wollkind et al.，1988）也分别提出了不同的功能性反应函数。原三领和宋永利（2009）、宋永利等（2009）分别研究了具有 Holling－Ⅰ类功能性反应函数的时滞捕食系统的稳定性和 Hopf 分支。分别以食饵种群和捕食者种群的消极负反馈时滞为分支参数，讨论了系统正平衡点的局部渐近稳定性和 Hopf 分支的存在性，并利用中心流形定理和规范型理论研究了 Hopf 分支的性质。卡尔和古莱（Kar & Ghorai，2011）、连福云和徐远通（2009）分别研究了具有 Holling－Ⅱ类和 Holling－Ⅳ类功能性反应函数的时滞捕食系统，并均以捕食者的消极负反馈时滞为分支参数，研究了系统正平衡点的局部渐近稳定性 Hopf 分支问题。张嘉防（2012）则以捕食者的消极负反馈时滞为参数，研究了具有 Beddington－DeAngelis 功能性反应的时滞捕食系统的 Hopf 分支问题。但是，上述具有功能性反应函数的时滞捕食系统均是只考虑了单个种群的消极负反馈时滞因素。在张嘉防（2012）研究工作的基础上，张子振等（2012）进一步考虑了食饵的消极负反馈时滞，提出了如下具有 Beddington－DeAngelis 功能性反应和两个时滞的捕食系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\left(1-\dfrac{x(t-\tau_1)}{K}\right)-\dfrac{\alpha x(t)y(t)}{a+bx(t)+cy(t)},\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)\left(1-h\dfrac{y(t-\tau_2)}{x(t-\tau_2)}\right).\end{cases}\tag{1.9}$$

其中，τ_1 表示捕食者种群的消极负反馈时滞，τ_2 表示食饵种群的消极负反馈时滞。张子振等（2012）在 τ_1 和 τ_2 相等、不相等的情况下，以两个时滞的不同组合为分支参数，研究了系统模型（1.9）平衡点的局部渐近稳定性和 Hopf 分支的存在性以及性质。

1.3.2 多种群时滞捕食系统

在现实自然界中，一个栖息地往往生存着多个种群。因此，研究多种群捕食系统对于理解现实世界具有更加实际的意义。目前，对于多种群时滞捕食系统的研究，主要集中于时滞竞争系统和时滞食物链系统。在阮世贵等（2007）研究工作的基础上，杨瑜（2009）进一步考虑了捕食者的妊娠时滞，提出如下时滞竞争系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\left(1-\dfrac{x(t)}{K}\right)-\dfrac{ax(t)y(t)}{1+bx(t)}-\dfrac{Ax(t)z(t)}{1+Bx(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)\left(-d+\dfrac{ex(t-\tau)}{1+bx(t-\tau)}\right),\\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=z(t)\left(-D-Gz(t)+\dfrac{Ex(t-\tau)}{1+Bx(t-\tau)}\right).\end{cases}\tag{1.10}$$

其中，$x(t)$、$y(t)$ 和 $z(t)$ 分别表示食饵种群和两个捕食者种群在时刻 t 的密度，τ 表示两个捕食者种群的妊娠时滞。杨瑜（2009）以两个捕食者种群的妊娠时滞 τ 为分支参数，讨论了系统模型（1.10）正平衡点的局部渐近稳定性和 Hopf 分支的存在性，并利用中心流形定理和规范型理论研究了 Hopf 分支的性质。随后，孟新友等（2011）在系统模型（1.10）中进一步引入第二个捕食者种群的消极负反馈时滞，得到具有两个时滞的竞争系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\left(1-\dfrac{x(t)}{K}\right)-\dfrac{ax(t)y(t)}{1+bx(t)}-\dfrac{Ax(t)z(t)}{1+Bx(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)\left(-d+\dfrac{ex(t-\tau_1)}{1+bx(t-\tau_1)}\right),\\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=z(t)\left(-D-Gz(t-\tau_2)+\dfrac{Ex(t-\tau_1)}{1+Bx(t-\tau_1)}\right).\end{cases}\tag{1.11}$$

其中，τ_1 表示两个捕食者种群的妊娠时滞，τ_2 表示第二个捕食者种群的消极