高等数学习题课教程

主　编　陈晓江
主　审　王卫华

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

高等数学习题课教程

主　编　陈晓江
副主编　宗志雄　薛　琼　毛树华
主　审　王卫华

武汉理工大学出版社
·武　汉·

内容提要

本书按照高等数学教材的顺序编写了24讲的习题课教学内容。根据理论与实践结合、讲解与练习结合、基础训练与综合提高结合的原则，每讲由知识要点、疑难解析、典型例题、基础训练及综合提高五个部分组成，并附答案。

本书可作为高等理工科院校的高等数学习题课教材，也可作为理工科大学生学习高等数学的参考书，还可作为讲授高等数学的教师的备课参考书，同时对于准备报考硕士研究生的广大考生，本书也是理想的应考复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/陈晓江主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2018.9
ISBN 978-7-5629-5840-6

Ⅰ.① 高… Ⅱ.① 陈… Ⅲ.① 高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ. ① O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 191340 号

项目负责人：陈军东　徐　扬　彭佳佳　　责任编辑：彭佳佳
责 任 校 对：张　晨　　封面设计：付　群
出 版 发 行：武汉理工大学出版社
社　　址：武汉市洪山区珞狮路122号
邮　　编：430070
网　　址：http://www.wutp.com.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：荆州市鸿盛印务有限公司
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：26.5
字　　数：680千字
版　　次：2018年9月第1版
印　　次：2018年9月第1次印刷
印　　数：6000册
定　　价：40.00元

前　言

高等数学习题课是高等数学课程的重要组成部分,加强高等数学习题课的教学是提高高等数学课程教学质量的重要环节。根据教育部批准制定的《高等数学课程教学基本要求》的精神,我们结合教学中的实践经验,在大量收集资料的基础上,集众多数学教师多年教学研究的成果编成此书。

本书按照高等数学教材的顺序编写了24讲的习题课教学内容。根据理论与实践结合、讲解与练习结合、基础训练与综合提高结合的原则,每讲由知识要点、疑难解析、典型例题、基础训练及综合提高五个部分组成,并附答案。

1.“知识要点”中对每讲的重点内容及方法作了小结，给出了知识要点结构图,理顺了各知识点之间的关系,并指出了课程考试重点;

2.通过“疑难解析”,对初学者难以理解、不易掌握以及容易混淆的各种问题,进行分析、推理和演算,力求使读者建立起准确无误的概念;

3.所选“典型例题”,既具有广泛性又有代表性,解题方法力求灵活多样,部分例题能够一题多解,注重解题过程的分析和解题方法的总结,富于启发性;

4.“基础训练”练习题的选取,主要着眼于培养学生基本的解题技能,使学生通过练习能更好地掌握基本概念和基本方法;

5.“综合提高”练习题的选取,部分采用数学考研试题,具有一定的难度,主要侧重于培养学生综合运用所学知识独立解决问题的能力。

按照教学进度,安排高等数学期中模拟试卷、高等数学期末模拟试卷,推动学生自主学习、努力提高学习成绩,起到督促的作用。

本书由陈晓江任主编,宗志雄、薛琼、毛树华任副主编。田书英编写第1、2、15讲;薛琼编写第3、4、5讲;胡荣编写第6、7、8讲;姜伟峰编写第9、10、11讲;宗志雄编写第12、13、14讲;毛树华编写第16、17、18讲;黄明芳编写第19、20、21讲;陈晓江编写第22、23、24讲;陈晓江负责全书的统稿。

本书由王卫华教授主审,赵维锐教授、楚杨杰副教授、杨爱芳副教授审阅了全稿,并提出了许多宝贵的意见;武汉理工大学出版社对本书的编审、出版给予了热情的支持。在此一并致谢!

由于编者水平所限,加之时间比较仓促,书中难免有不妥之处,诚请专家、同行、读者批评指正。

编　者
2018.06

目　录

第1讲 极限的概念与计算

1.1 知识要点

1.1.1 极限的概念

(1)数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 $N > 0$,当 $n > N$ 时,总有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

(2) 函数的极限

① $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

② $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,当 $|x| > X$ 时,总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(3) 单侧极值

① 左极限:$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$(或 $f(x_0 - 0) = A$)$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

② 右极限:$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$(或 $f(x_0 + 0) = A$)$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

1.1.2 极限的性质

(1)(极限的局部保号性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,而且 $A > 0$(或 $A < 0$),那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域,当 x 在该邻域内时,就有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

(2) 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$),而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,那么 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

1.1.3 极限的运算法则

(1) 极限的四则运算法则

如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则

① $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

② $\lim[f(x) \cdot g(x)] = AB = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.

③ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (B \neq 0)$.

(2) 复合函数的极限运算法则

设函数 $u = \varphi(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在且等于 a,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a$,但在点 x_0 的某去心

邻域内 $\varphi(x) \neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a} f(u) = A$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x \to x_0$ 时的极限也存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to a} f(u) = A$.

1.1.4 极限存在准则

准则 Ⅰ(夹逼准则) 设在点 x_0 的某邻域内(或 $|x| > M$)，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim g(x) = A$，$\lim h(x) = A$，那么 $\lim f(x)$ 存在且等于 A.

准则 Ⅱ(单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

1.1.5 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

1.1.6 无穷小(量)与无穷大(量)

无穷小量是以零为极限的变量，但不能说无穷小量是很小的数，不能将变量混同于常数. 非零无穷小量的倒数为无穷大量，要注意无穷大量是没有极限的. $\lim f(x) = \infty$($+\infty$ 或 $-\infty$) 并不意味极限存在，只是一种记号.

1.1.7 函数极限与无穷小的关系

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，其中 α 是无穷小.

1.1.8 无穷小的运算性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

(3) 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

1.1.9 无穷小的比较

设 α, β 都是自变量同一变化过程中的无穷小.

(1) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha = o(\beta)$.

(2) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c \neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小. 特别地，当 $c = 1$ 时，称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

(4) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta^k} = c \neq 0$($k$ 为常数)，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

1.1.10　等价无穷小的代换

设 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

常用的等价无穷小（当 $x \to 0$ 时）：

(1) $\sin x \sim x$；　(2) $\arcsin x \sim x$；

(3) $\tan x \sim x$；　(4) $\arctan x \sim x$；

(5) $\ln(1+x) \sim x$；　(6) $e^x - 1 \sim x$；

(7) $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$；　(8) $(1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x (\lambda \neq 0)$.

1.1.11　知识要点结构图

- 极限
  - 定义
    - 数列极限
      - ε-N 定义
      - 收敛数列的性质
    - 函数极限
      - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的 ε-δ 定义
      - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的 ε-X 定义
    - 运算法则
  - 存在准则
    - 单调有界数列必有极限
    - 夹逼准则
  - 两个重要极限
    - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
    - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$；$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
  - 无穷小与无穷大
    - 定义
    - 无穷小的比较
      - 高阶
      - 低阶
      - 同阶
      - 等阶
    - 无穷小的性质
    - 关系

1.1.12　课程考试重点

判断函数的特性（单调、奇偶、有界、周期）；求函数在一点处的左、右极限，函数在一点处极限存在的充要条件；利用极限的性质、运算法则、存在准则和重要极限求极限.

1.2　疑 难 解 析

【问题 1.1】　函数 $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$ 与 $y = 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ 是相同的函数吗？

【答】　不同；函数 $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$ 的定义域为 $D_1 = \{x \mid x \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$，而函数

$y=2\ln(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x})$ 的定义域为 $D_2=\{x\,|\,x>0,x\in\mathbf{R}\}$.

判断两个函数是否相同的原则，应考虑是否存在相同的定义域以及对应法则，这是函数定义的两要素. 以上两个函数的定义域不同，因此它们是不同的函数.

如果应用下面方法判断则是错误的：

由初等数学的运算性质知：$\ln(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1})=\ln\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}\right]=2\ln(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x})$，所以它们是相同的函数.

【问题 1.2】 在数列极限的定义中正整数 N 与正数 ε 是什么关系？N 是不是 ε 的函数？

【答】 在数列极限定义中，正整数 N 是根据不等式 $|x_n-a|<\varepsilon(\forall n>N)$ 确定的，所以 N 与 ε 有关，但不能说 N 是 ε 的函数. 这是因为，如果 N 是 ε 的函数：$N=f(\varepsilon)$，那么任意给定一个 ε，至多有有限个 N 满足不等式 $|x_n-a|<\varepsilon(\forall n\in\mathbf{N})$. 但实际上不是这样的. 因为如果 N 使得不等式 $|x_n-a|<\varepsilon(\forall n\in\mathbf{N})$ 成立，那么对于所有大于 N 的自然数 N_1，都有 $|x_n-a|<\varepsilon(\forall n>N_1)$ 成立.

类似地，可以理解函数极限中正数 δ 与 ε 之间的关系.

【问题 1.3】 发散的数列是否一定无界？有界的数列是否一定收敛？

【答】 发散的数列不一定无界，例如：$1,-1,1,-1,\cdots,1,-1,\cdots$ 这个数列是发散的，但它有界；同时，它也说明有界的数列不一定收敛.

【问题 1.4】 数列极限与函数极限有什么关系？

【答】 数列极限与函数极限既有区别又有联系.

(1) 数列 $x_n=f(n)$ 的极限与函数 $y=f(x)$ 的极限是有区别的. 它们之间的区别在于：数列 $x_n=f(n)$ 的自变量 n 的变化过程是间断的（只取正整数），且只有一种变化过程 $n\to\infty$（即 $n\to+\infty$）；而函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有六种：$x\to x_0$，$x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

(2) 数列极限与函数极限之间也有一定的联系：

① 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 必定存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 但当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 可以存在；

②（海涅定理）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任意数列 x_n，当 $x_n\to x_0$ 时都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

【问题 1.5】 无界量与无穷大量有什么区别？

【答】 首先指出，这里的无界量和无穷大量都是处在同一变化过程中的变量. 无穷大量一定是无界的，但无界变量不一定是无穷大量. 下面以数列为例解释这个问题.

称数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量，是指对于任意大的正数 M，都能够找到正整数 N，使得对于所有满足 $n>N$ 的正整数 n，$|x_n|>M$ 都成立. 也就是说，当 $n>N$ 之后，不可能再有任何的 n，使得 $|x_n|\leqslant M$.

称数列 $\{x_n\}$ 是无界的，则是另一种含义：对于任意大的正数 M，都存在正整数 n_0，使得 $|x_{n_0}|>M$. 但是在 $n>n_0$ 之后，还可能出现 $|x_n|\leqslant M$ 的情况.

例如，数列 $\{n+(-1)^n n+1\}$ 是无界数列，但不是无穷大量.

【问题 1.6】 无穷多个无穷小之和是否仍是无穷小？

【答】 我们知道,有限多个无穷小之和仍然是无穷小,但是,把"有限多个"改为"无穷多个",结论就不一定成立了.我们可以从以下的三个例子中看出这一点.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[1+2+\cdots+(n-1)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n-1}{n^3})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[1+2+\cdots+(n-1)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=0.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{n-1}{n^{\frac{3}{2}}})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}[1+2+\cdots+(n-1)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=+\infty.$

【问题1.7】 在求极限时,作为加减项的无穷小能否用等价无穷小代换?

【答】 首先指出,在求极限的过程中乘、除因子可以用与其等价的无穷小代替,这是以极限运算法则作为依据的.但是,作为加减项的无穷小是不能随意用等价无穷小来代换的.例如考察$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$,分子中的两项$\tan x$,$\sin x$都是与$x$等价的无穷小,但不能用$x$代替,否则就会出现错误的结果.事实上,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

【问题1.8】 无穷小的倒数是否一定是无穷大?

【答】 否,非零无穷小的倒数才是无穷大.而0是可以作为无穷小的常数,但其倒数不存在.

【问题1.9】 是否所有的无穷小均可进行比较?

【答】 否,例如:当$x\to\infty$时,$f(x)=\frac{1}{x}\to0$,$g(x)=\frac{\sin x}{x}\to0$.但$\frac{g(x)}{f(x)}=\sin x$无极限且$\neq\infty$.故无穷小$f(x)$和$g(x)$无法进行比较.

1.3 典型例题

1.3.1 求极限的基本方法

【例1.1】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

【分析】 此极限为$\frac{0}{0}$型未定式,须对分子有理化.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}.$$

【例 1.2】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\arctan x}{x-\cos x}$.

【分析】 此极限为$\dfrac{\infty}{\infty}$型,须先消去分子分母中的无穷大量,即将分子分母同除以 x.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}\arctan x}{1-\dfrac{1}{x}\cos x}=1$

★注 解题过程中用到了无穷小的性质,即"有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小".

【例 1.3】 求极限$\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

【分析】 此极限为 $\infty-\infty$ 型,将它化成$\dfrac{0}{0}$ 型再作处理.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=-1.$

【例 1.4】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$,其中 $|a|<1$.

【分析】 由于积的极限等于极限的积这一法则只对有限个因子成立,因此要先用求积公式将其变形.

【解】 多次使用恒等式 $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$

化简 $(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$$=\frac{1}{1-a}\cdot(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{1-a}\cdot(1-a^{2^{n+1}}).$$

当 $n\to\infty$ 时,$2^{n+1}\to+\infty$,而 $|a|<1$,故 $a^{2^{n+1}}\to 0$,从而原式 $=\dfrac{1}{1-a}$.

★小结 利用极限四则运算法则求极限.

极限四则运算法则本身比较简单,但在使用这些法则时首先要注意法则适用的条件. 即法则中参加运算的函数的极限都必须存在;其次要对函数作某些恒等变形或化简. 采用怎样的变形或化简,要根据具体的算式确定. 常用的方法有分式的约分或通分,分式的分解,分子或分母的有理化,三角函数的恒等变形,某些求和公式以及适当的变量替换等.

常见函数的极限:

① $\lim\limits_{x\to+\infty}a^{\frac{1}{x}}=1\ (a>0)$; ② $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0\ (a>1)$;

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty\ (a>1)$; ④ $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0\ (0<a<1)$;

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$; ⑥ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$;

⑦ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\dfrac{\pi}{2}$; ⑧ $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{k}{n}}=1$ (k 为常数,$k>0$).

【例 1.5】 求极限 $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$.

【分析】　极限中含有反三角函数，由于反三角函数的变形较不方便，故先作变量替换将其化成三角函数，再利用重要极限.

【解】　令 $\arccos x = t$，则 $x = \cos t$；当 $x \to -1^-$ 时，$t \to \pi^-$

$$原式 = \lim_{t \to \pi^-} \frac{(\pi - t)^2}{1 + \cos t} = \lim_{t \to \pi^-} \frac{(\pi - t)^2}{1 - \cos^2 t} \cdot (1 - \cos t)$$

$$= 2\lim_{t \to \pi^-} \frac{(\pi - t)^2}{\sin^2 t} = 2\lim_{t \to \pi^-} \frac{1}{\left[\dfrac{\sin(\pi - t)}{\pi - t}\right]^2} = 2.$$

★ 注　这里用到了 $\lim\limits_{t \to \pi^-} \cos t = \cos\pi = -1$.

【例 1.6】　求极限 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1}$.

【分析】　先将函数变形，然后利用幂的极限等于极限的幂及重要极限计算.

【解】　$$原式 = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2(x+1)-3}$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{x+1}\right)^3} = e^2.$$

★ 小结　利用两个重要极限求极限.

重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，而 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ 属于 1^∞ 型. 利用它们求极限时，最重要的是对所给函数或数列作适当变形，使之具有相应的形式. 有时也可以通过变量替换使问题简化.

【例 1.7】　证明：$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$.

【证】　设 $\sqrt[n]{a} - 1 = r$.

当 $a > 1$ 时，$r > 0$. $a = (1+r)^n > 1 + nr$，则 $0 < r < \dfrac{a-1}{n}$. 由于 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a-1}{n} = 0$. 据夹逼准则，有 $\lim\limits_{n \to \infty} r = 0$，从而 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时，$\dfrac{1}{a} > 1$. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = 1$.

当 $a = 1$ 时，$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

综上所述，当 $a > 0$ 时，$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

★ 注　本例的结论可以推广为 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

【例 1.8】　求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

【解】　设 $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$，则 $3 < x_n < 3 \cdot \sqrt[n]{2}$，由于 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1$，据夹逼准则知，$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

★ 注　本例的结论可以推广为：

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. 其中 $a_k > 0 (k = 1, 2, \cdots, m)$.