



# 数字信号处理原理及应用

◎陈友兴 桂志国 张权 张鹏程 编 著



中国工信出版集团



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

# 数字信号处理原理及应用

陈友兴 桂志国 张 权 张鹏程 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书系统地讨论了数字信号处理的基本理论、基本分析方法、基本算法和实现方法。全书共 10 章。第 1~4 章介绍了离散时间信号与系统的时域分析、Z 域分析和离散傅里叶变换及其快速算法；第 5~7 章介绍了数字滤波器的结构和设计方法；第 8~10 章介绍了数字信号处理的相关问题，包括常用的特殊滤波器、有限字长效应和多抽样率转换。

本书内容围绕信号分析方法和离散时间系统的分析与设计方法两条主线展开，在内容上充分体现了理论知识、工程应用实例和实现方法的结合。本书可作为普通高等院校相关专业的教材使用，还可作为工程技术人员参考资料使用。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有，侵权必究。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

数字信号处理原理及应用/陈友兴等编著. —北京: 电子工业出版社, 2019.9

ISBN 978-7-121-36857-8

I. ①数… II. ①陈… III. ①数字信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 118170 号

责任编辑: 刘小琳 文字编辑: 崔 峰

印 刷: 北京虎彩文化传播有限公司

装 订: 北京虎彩文化传播有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 24.5 字数: 612 千字

版 次: 2019 年 9 月第 1 版

印 次: 2019 年 10 月第 2 次印刷

定 价: 79.00 元



凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn)，盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

本书咨询联系方式: [liuxl@phei.com.cn](mailto:liuxl@phei.com.cn), (010) 88254538。

# 前言

数字信号处理是高等院校电子信息工程、电子信息科学与技术、通信工程、自动化、生物医学工程、测控技术与仪器、电子科学与技术、计算机科学与技术等专业的一门重要的专业基础课程。随着信息时代的发展，数字信号处理理论与技术日益完善，已成为一门重要的学科与技术领域，其应用领域日益扩大，几乎遍及各工程技术领域。

作者根据当前数字信号处理技术的发展动态，结合十几年教学实践中的经验和教学需求对本书内容进行了精心编排，以期能够更好地为高校“数字信号处理”教学服务。本书系统地讨论了数字信号处理的基本理论、基本分析方法、基本算法和实现方法。全书共 10 章，第 1~3 章是离散时间信号与系统的基本理论，即离散时间信号与系统、 $Z$  变换及离散傅里叶变换；第 4 章讨论傅里叶变换的快速算法；第 5~7 章是数字滤波器的结构、理论和设计方法；第 8 章介绍了常用特殊滤波器的设计；第 9 章是数字信号处理的有限字长效应；第 10 章讨论了多抽样率转换。通过本书的学习，读者可以为进一步学习有关信号方面的课程打下良好的理论基础。

本书的编写分工如下：陈友兴编写第 7、8、10 章，桂志国编写第 4 章和第 9 章，张鹏程编写第 1、2、3 章，张权编写第 5、6 章。全书由陈友兴教授统稿，桂志国教授审核。

电子工业出版社有限公司刘小琳编辑的热情帮助与支持，为本书的顺利出版创造了有利条件，在此表示深深的谢意！

由于水平有限，本书难免有不妥或错误之处，恳请广大读者给予批评与指正。

作者

2019 年 3 月

# 目 录

第 1 章 离散时间信号与系统的时域分析	1
1.1 离散时间信号——序列	1
1.1.1 几种常用序列	1
1.1.2 序列的基本运算	9
1.2 序列的卷积和与相关	14
1.2.1 序列的卷积和	14
1.2.2 序列的线性相关	16
1.3 线性移不变系统	20
1.3.1 线性系统	21
1.3.2 移不变系统	22
1.3.3 单位抽样响应与卷积和	22
1.3.4 因果系统	23
1.3.5 稳定系统	24
1.3.6 卷积和的性质及 LTI 系统的互连	26
1.4 线性常系数差分方程	28
1.4.1 线性常系数差分方程的描述	29
1.4.2 线性常系数差分方程的求解	30
1.5 连续时间信号的抽样及抽样定理	32
1.5.1 理想抽样	33
1.5.2 实际抽样	36
1.5.3 带通信号的抽样	37
习题	38
第 2 章 离散时间信号与系统的 Z 域分析	40
2.1 Z 变换的定义及收敛域	40
2.1.1 Z 变换的定义	40
2.1.2 Z 变换的收敛域	40
2.1.3 常用序列的 Z 变换	45
2.1.4 Z 变换收敛域的性质	48
2.2 Z 反变换	48
2.2.1 部分分式展开法	48
2.2.2 幂级数展开法	51
2.2.3 围线积分法 (留数法)	53

2.3	$Z$ 变换的性质与定理	56
2.4	$Z$ 变换与连续信号拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系	64
2.4.1	$Z$ 变换与拉普拉斯变换的关系	64
2.4.2	序列的 $Z$ 变换和傅里叶变换的关系	66
2.5	序列傅里叶变换及性质	67
2.5.1	非周期序列傅里叶变换	67
2.5.2	序列傅里叶变换的性质与定理	69
2.5.3	常用序列的傅里叶变换	73
2.6	离散时间系统的系统函数和频率响应	77
2.6.1	系统函数的定义	77
2.6.2	系统函数与差分方程的关系	77
2.6.3	系统的频率响应	78
2.6.4	利用 $H(z)$ 的零、极点分析系统	81
2.6.5	无限长单位抽样响应系统与有限长单位抽样响应系统	84
	习题	86
<b>第 3 章</b>	<b>离散傅里叶变换</b>	<b>89</b>
3.1	傅里叶变换的几种形式	89
3.1.1	非周期连续时间信号的傅里叶变换——时域连续、频域连续	89
3.1.2	周期连续时间信号的傅里叶级数——时域连续、频域离散	90
3.1.3	非周期离散时间信号(序列)的傅里叶变换——时域离散、频域连续	90
3.1.4	周期离散时间信号的傅里叶级数——时域离散、频域离散	91
3.2	周期序列的离散傅里叶级数及性质	92
3.2.1	周期序列的离散傅里叶级数	93
3.2.2	周期序列离散傅里叶级数的性质	96
3.2.3	周期序列的傅里叶变换	98
3.3	离散傅里叶变换	101
3.3.1	离散傅里叶变换的定义	101
3.3.2	DFT 与 $Z$ 变换及 DTFT 之间的关系	103
3.3.3	几种频率的关系	104
3.4	离散傅里叶变换的性质	104
3.4.1	离散傅里叶变换隐含的周期性	104
3.4.2	离散傅里叶变换的性质	105
3.5	有限长序列的循环卷积定理和循环相关定理	112
3.5.1	有限长序列的循环卷积	112
3.5.2	循环卷积定理	113
3.5.3	有限长序列的线性卷积和循环卷积	115
3.5.4	有限长序列的循环相关与循环相关定理	117
3.6	频域抽样理论	118

3.6.1	由 $X(k)$ 不失真地恢复 $x(n)$ 的条件	118
3.6.2	频率抽样的内插公式	120
3.7	基于 DFT 技术的频谱分析技术	122
3.7.1	利用 DFT 对连续非周期信号进行频谱分析	122
3.7.2	利用 DFT 对连续信号进行频谱分析中的问题及其解决方法	124
3.7.3	频率分辨率	129
	习题	136
<b>第 4 章</b>	<b>快速傅里叶变换</b>	<b>139</b>
4.1	DFT 运算量分析及改善途径	139
4.1.1	直接计算 DFT 的运算量	139
4.1.2	改善 DFT 运算效率的基本途径	140
4.2	按时间抽取的基-2 FFT 算法	142
4.2.1	算法原理	142
4.2.2	算法运算量分析	146
4.2.3	算法特点分析	147
4.2.4	按时间抽取的其他形式流图	151
4.2.5	DIT 基-2 FFT 的软件编程思想	152
4.3	按频率抽取的基-2 FFT 算法	153
4.3.1	算法的基本原理	153
4.3.2	按频率抽取的 FFT 算法特点分析	155
4.3.3	时间抽取法与频率抽取法的比较	156
4.4	快速傅里叶反变换	157
4.4.1	稍微变动 FFT 程序和参数实现 IFFT	157
4.4.2	不改变 FFT 的程序直接实现 IFFT	158
4.5	FFT 算法的 MATLAB 实现	158
4.6	实数序列的 FFT 算法	161
4.6.1	利用频谱对称性推导实数序列的 FFT	161
4.6.2	离散哈特莱变换	162
4.7	基于 FFT 的线性卷积与线性相关快速算法	166
4.7.1	基于 FFT 的有限长序列线性卷积算法	166
4.7.2	基于 FFT 的有限长序列和无限长序列卷积算法	168
4.7.3	基于 FFT 的线性相关算法	172
	习题	174
<b>第 5 章</b>	<b>数字滤波器的基本结构</b>	<b>176</b>
5.1	数字滤波器结构的表示方法	176
5.2	无限长单位抽样响应 (IIR) 滤波器的结构	178
5.2.1	直接 I 型	178

5.2.2	直接 II 型 (典范型、正准型)	179
5.2.3	级联型	180
5.2.4	并联型	182
5.2.5	转置定理	184
5.3	有限长单位抽样响应 (FIR) 滤波器的基本结构	184
5.3.1	直接型 (横截型、卷积型)	184
5.3.2	级联型	185
5.3.3	快速卷积型	186
5.3.4	频率抽样型	187
5.3.5	梳状滤波器	191
5.4	格型滤波器的基本结构	193
5.4.1	全零点 (FIR) 格型滤波器	193
5.4.2	全极点 (IIR) 格型滤波器	196
5.4.3	零、极点 (IIR) 格型滤波器	197
	习题	199
<b>第 6 章</b>	<b>无限长单位抽样响应数字滤波器的设计</b>	<b>201</b>
6.1	滤波器的基本概念	201
6.1.1	滤波器的分类	201
6.1.2	滤波器的技术指标	202
6.1.3	滤波器的设计步骤	203
6.2	模拟低通滤波器的设计	204
6.2.1	由幅度平方函数来确定系统函数	204
6.2.2	巴特沃思模拟低通滤波器的设计	206
6.2.3	切比雪夫模拟低通滤波器的设计	212
6.2.4	椭圆模拟低通滤波器的设计	221
6.2.5	贝塞尔模拟低通滤波器的设计	223
6.2.6	归一化原型滤波器的设计数据	224
6.2.7	常用模拟滤波器的比较	226
6.3	基于模拟滤波器的 IIR 数字滤波器设计	227
6.3.1	抽样响应不变法	227
6.3.2	双线性变换法	235
6.4	数字高通、带通和带阻 IIR 滤波器的设计	243
6.4.1	模拟频带法	244
6.4.2	数字频带法	253
	习题	260
<b>第 7 章</b>	<b>FIR 数字滤波器的设计</b>	<b>262</b>
7.1	线性相位 FIR 数字滤波器及其特点	262

7.1.1	线性相位的定义	262
7.1.2	线性相位的条件	264
7.1.3	线性相位 FIR 滤波器的幅度特性	266
7.1.4	线性相位 FIR 滤波器的零点分布	269
7.2	窗函数设计法	271
7.2.1	设计方法	271
7.2.2	加窗处理对频谱性能的影响	272
7.2.3	典型窗函数	276
7.2.4	窗函数设计法举例	282
7.3	频率抽样设计法	289
7.3.1	设计方法	290
7.3.2	逼近误差	291
7.3.3	频率抽样设计法设计举例	294
7.4	等波纹最佳设计法	298
7.4.1	设计思想	298
7.4.2	交错点组定理	299
7.4.3	Parks-McClellan 算法	300
7.4.4	MATLAB 实现	303
7.5	IIR 滤波器和 FIR 滤波器的比较	305
	习题	305
<b>第 8 章</b>	<b>常用的特殊滤波器</b>	<b>308</b>
8.1	常用的特殊 IIR 滤波器	308
8.1.1	全通滤波器	308
8.1.2	最小相位滤波器	310
8.1.3	特殊零、极点二阶滤波器	315
8.2	简单整系数 FIR 滤波器	318
8.2.1	均值滤波器	318
8.2.2	平滑滤波器	320
8.2.3	基于零、极点相消的简单整系数滤波器	322
	习题	325
<b>第 9 章</b>	<b>有限字长效应</b>	<b>326</b>
9.1	问题的提出	326
9.2	二进制数的表示	327
9.2.1	定点运算与浮点运算	327
9.2.2	原码、补码和反码	329
9.3	量化误差	331
9.3.1	定点运算中的量化误差	332

9.3.2	浮点运算中的量化误差	334
9.4	系统输入信号的量化效应	335
9.4.1	信号量化误差的统计分析	336
9.4.2	量化噪声通过线性系统的响应	337
9.5	系统系数的量化效应	338
9.5.1	系数量化误差对系统零、极点的影响	338
9.5.2	系数量化对滤波器稳定性的影响	343
9.6	定点运算 FIR 滤波器的有限字长效应	344
9.6.1	FIR 滤波器的有限字长效应	344
9.6.2	FFT 算法的有限字长效应	346
9.7	定点运算 IIR 滤波器的有限字长效应	347
9.7.1	量化噪声	348
9.7.2	极限环振荡	348
9.7.3	死带效应	351
9.8	浮点运算的有限字长效应	353
	习题	354
<b>第 10 章</b>	<b>多抽样率转换</b>	<b>356</b>
10.1	按整数系数 $D$ 抽取	356
10.1.1	抽取器	356
10.1.2	抗混叠抽取器	357
10.1.3	频谱关系	360
10.2	按整数系数 $I$ 内插	361
10.2.1	插值器	361
10.2.2	插值器的频域分析	364
10.2.3	插值器的时域关系	366
10.3	按有理数系数 $I/D$ 的抽样率转换	366
10.4	多抽样率转换 FIR 滤波器的 MATLAB 实现	369
10.4.1	相关的 MATLAB 函数	369
10.4.2	FIR 整数插值举例	369
10.4.3	FIR 整数抽取举例	372
10.4.4	FIR 有理数系数的抽样率转换	373
10.5	多抽样率转换的 FIR 滤波器结构	374
10.5.1	整数系数抽取的 FIR 实现	374
10.5.2	整数系数插值的 FIR 实现	376
10.5.3	多相 FIR 结构	377
	习题	380
	参考文献	382

# 第1章 离散时间信号与系统的时域分析

信号是承载信息的工具，如古代的烽火台，它传递的信息是，“火（烟）起便是有敌人进犯。”信号可以用时间函数的方式进行表述，根据函数自变量的取值是否连续，可以将信号分为连续时间信号和离散时间信号。连续时间信号是在连续时间范围内定义的信号；离散时间信号是在离散时间范围内定义的信号。随着数字电路和计算机技术的迅猛发展，离散时间信号与系统的研究日趋丰富，其应用日益广泛。

本章首先介绍了离散时间信号的表述方法、常用的离散序列和序列的基本运算；其次介绍了序列的卷积和及其求解方法、序列的线性相关；再次着重讨论了线性移不变系统的特性和差分方程的时域解法；最后介绍了连续时间信号数字化时的抽样及抽样定理。

## 1.1 离散时间信号——序列

时间为离散变量的信号称为离散时间信号，它只在离散时间上给出函数值，是时间上不连续的序列，用  $x(n)$  表示第  $n$  个离散时间点的序列值，并用  $\{x(n)\}$  表示序列，为方便起见，序列也直接用  $x(n)$  来表示。

离散时间信号可用数的集合  $\{\cdot\}$  的形式表示。例如，一个离散时间信号可表示为  $x(n) = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0\}$ ，箭头指向的元素表示当  $n=0$  时的序列值，即  $x(0) = 1$ 。

离散时间信号也可用数学表达式来表示，如  $x(n) = 3^n$ ，这里  $n$  为整数。

另外，离散信号  $x(n)$  也常用图形来描述，如图 1.1.1 所示。纵轴线段的长短代表各序列值的大小。注意，图中横轴虽为连续直线，但只在  $n$  为整数时才有意义，而对于非整数没有定义，即此时不能认为  $x(n)$  的取值为零。

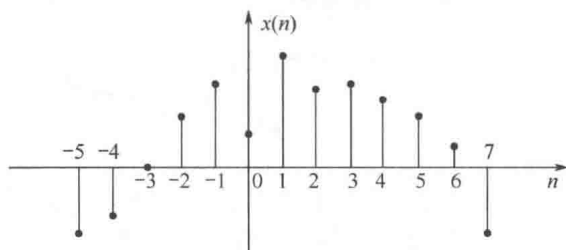


图 1.1.1 离散信号  $x(n)$  的图形描述

一个离散信号  $x(n)$  可能产生时就是离散的，例如，若  $x(n)$  表示某市每天出生的新生儿数，则  $x(n)$  本身就是离散的。离散信号  $x(n)$  也可以由一个连续时间信号  $x(t)$  的抽样得到。

若  $x(t)$  表示一个连续时间信号，以抽样间隔  $T_s$  对其进行周期抽样得到离散时间信号  $x(nT_s)$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )。  $nT_s$  作为信号的变量，表明信号在离散时间  $nT_s$  点上出现。但在很多情况下，  $nT_s$  并不代表具体的时刻而只表明离散时间信号在序列中前后位置的顺序，所以  $x(nT_s)$  可直接记为  $x(n)$ 。

### 1.1.1 几种常用序列

在离散时域中，有一些基本的离散时间信号，它们在离散时间信号与系统中起着重要的作用。下面给出一些典型的离散时间信号表达式和波形。

1. 单位抽样序列  $\delta(n)$ 

单位抽样序列  $\delta(n)$  定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其波形如图 1.1.2 (a) 所示。 $\delta(n)$  也称为单位脉冲序列或单位样值序列。这是常用重要的序列之一，它在离散时间信号与系统的分析、综合中有着重要的作用，其地位犹如连续时间信号与系统中的单位冲激信号  $\delta(t)$ 。虽然  $\delta(t)$  与  $\delta(n)$  符号上一样，形式上  $\delta(n)$  就像  $\delta(t)$

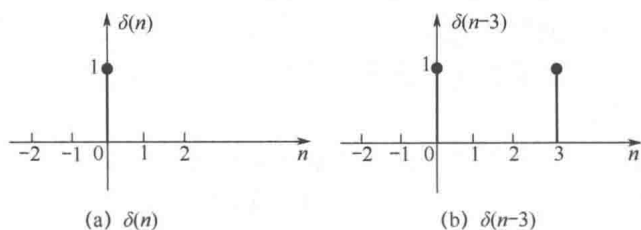


图 1.1.2 单位抽样序列及其移位

的抽样，但它们之间存在本质的区别： $\delta(t)$  在  $t=0$  时，脉宽趋于零、幅值趋于无限大、面积为 1，是极限概念的信号，是现实中不可实现的一种信号，表示在极短时间内所产生的巨大“冲激”；而  $\delta(n)$  在  $n=0$  时，值为 1，是一个现实数序列。图 1.1.2 (b) 所示为  $\delta(n)$  右移三个单位的信号  $\delta(n-3)$  的波形。

显然，任意序列可以表示成单位抽样序列的移位加权，即

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \\ &= \dots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + \dots \end{aligned}$$

例 1.1.1 已知  $x(n) = \begin{cases} 1, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ -3, & n = 1 \end{cases}$ ，该序列可用单位抽样序列信号表示为

$$x(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) - 3\delta(n-1)$$

2. 单位阶跃序列  $u(n)$ 

单位阶跃序列  $u(n)$  定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

其波形如图 1.1.3 所示。它类似于连续时间信号与系统中的单位阶跃信号  $u(t)$ 。但一般情况  $u(t)$  在  $t=0$  处没有定义，而  $u(n)$  在  $n=0$  时定义为  $u(0)=1$ 。

用  $\delta(n)$  及其移位来表示  $u(n)$ ，可得两者之间的关系为

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \quad (1.1.3)$$

反过来， $\delta(n)$  可用  $u(n)$  的后向差分来表示，即

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.1.4)$$

可见，相对于连续时间信号与系统中单位冲激信号  $\delta(t)$  与单位阶跃信号  $u(t)$  之间的微分与积分关系，在离散时间系统中，单位抽样序列  $\delta(n)$  与单位阶跃序列  $u(n)$  之间是差分和求和关系。

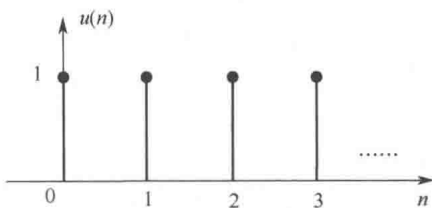


图 1.1.3 单位阶跃序列

由  $u(n)$  的定义可知, 若将序列  $x(n)$  乘以  $u(n)$ , 即  $x(n)u(n)$ , 则相当于保留  $x(n)$  序列  $n \geq 0$  的部分, 所得到的序列即为因果序列。

### 3. 矩形序列 $R_N(n)$

矩形序列  $R_N(n)$  定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.5)$$

其波形如图 1.1.4 所示。显然, 矩形序列与单位抽样序列、单位阶跃序列的关系为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (1.1.6)$$

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m) \quad (1.1.7)$$

### 4. 正弦序列

正弦序列表达式为

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \varphi) \quad (1.1.8)$$

式中,  $A$  为幅度,  $\varphi$  为初始相位,  $\omega_0$  为正弦序列的数字域频率。其波形如图 1.1.5 所示。

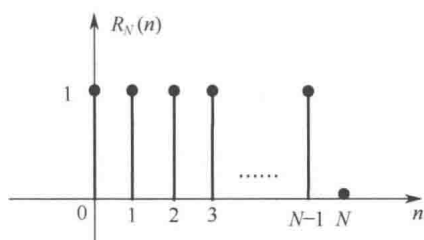


图 1.1.4 矩形序列

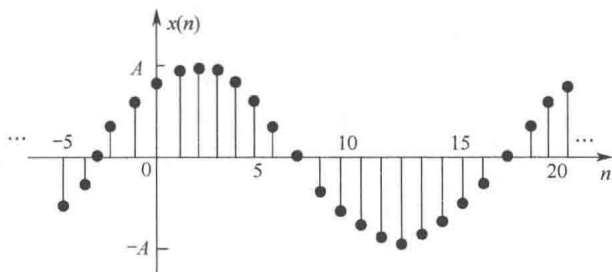


图 1.1.5 正弦序列

该信号可以看成对连续时间正弦信号进行抽样得到的。若连续正弦信号  $x(t)$  为

$$x(t) = A \sin(\Omega_0 t + \varphi) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

式中,  $f_0$  为信号 (物理) 频率,  $\Omega_0 = 2\pi f_0$  为模拟角频率, 信号的周期  $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ 。

对  $x(t)$  以抽样间隔  $T_s$  进行等间隔周期抽样得到离散信号  $x(n)$ , 即

$$x(n) = x(t)|_{t=nT_s} = A \sin(\Omega_0 n T_s + \varphi) = A \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

由上述推导过程可知

$$\omega_0 = \Omega_0 T_s = \frac{2\pi f_0}{f_s} \quad (1.1.9)$$

对于一般的信号有

$$\omega = \Omega T_s = \frac{2\pi f}{f_s} \quad (1.1.10)$$

式 (1.1.10) 便是数字信号处理中的数字角频率  $\omega$ 、模拟角频率  $\Omega$  及物理频率  $f$  三者之间的关系, 以后章节会陆续用到。下面分析与正弦序列相关的一些规律。

#### 1) 周期序列

由图 1.1.5 可见, 正弦序列的包络是周期正弦函数。但序列本身可能是周期的, 也可能

是非周期的。对于任意整数  $n$ ，若  $x(n) = x(n+N)$  ( $N$  为某一最小正整数)，则序列  $x(n)$  是周期序列， $N$  是该序列的周期。

对于正弦序列  $A\sin(\omega_0 n + \varphi)$ ，如果要满足周期序列，则对于任意的整数  $n$  有  $A\sin[\omega_0(n+N) + \varphi] = A\sin(\omega_0 n + \varphi)$ ，由此得  $\omega_0 N = 2\pi k$  ( $N, k$  为整数)，即周期为  $N = 2\pi k / \omega_0$ 。下面分几种情况对其周期性进行讨论。

(1) 当  $2\pi / \omega_0$  是整数时，只要取  $k=1$ ，则  $N = 2\pi / \omega_0$  为最小正整数，也就是说序列的周期为  $2\pi / \omega_0$ 。如  $\cos(\pi n / 5)$ ， $\omega_0 = \pi / 5$ ，所以周期为 10，如图 1.1.6 (a) 所示，此时正弦序列包络的一个周期与正弦序列的一个周期相对应。

(2) 当  $2\pi / \omega_0$  不是整数，而是一个有理数时，正弦序列具有周期性，其周期为  $N = 2\pi / \omega_0 \cdot k$ 。如  $\cos(3\pi n / 20)$ ， $\omega_0 = 3\pi / 20$ ，取  $k=3$ ， $N=40$ ，如图 1.1.6 (b) 所示，此时正弦序列包络的 3 个周期与正弦序列的 1 个周期相对应。

(3) 当  $2\pi / \omega_0$  是无理数时，则无论如何取  $k$  (整数) 值，均不能使  $N$  成为整数。所以此时正弦序列不具有周期性。如  $\cos(3n/10)$ ， $2\pi / \omega_0 = 20\pi / 3$  为无理数，所以该序列不是周期序列，如图 1.1.6 (c) 所示。

小结：如果能够取得最小正整数  $k$ ，使得  $N = 2\pi k / \omega_0$  为正整数，那么该正弦序列是周期为  $N$  的周期序列，一个周期对应其包络的  $k$  个周期；否则，正弦序列为非周期序列。

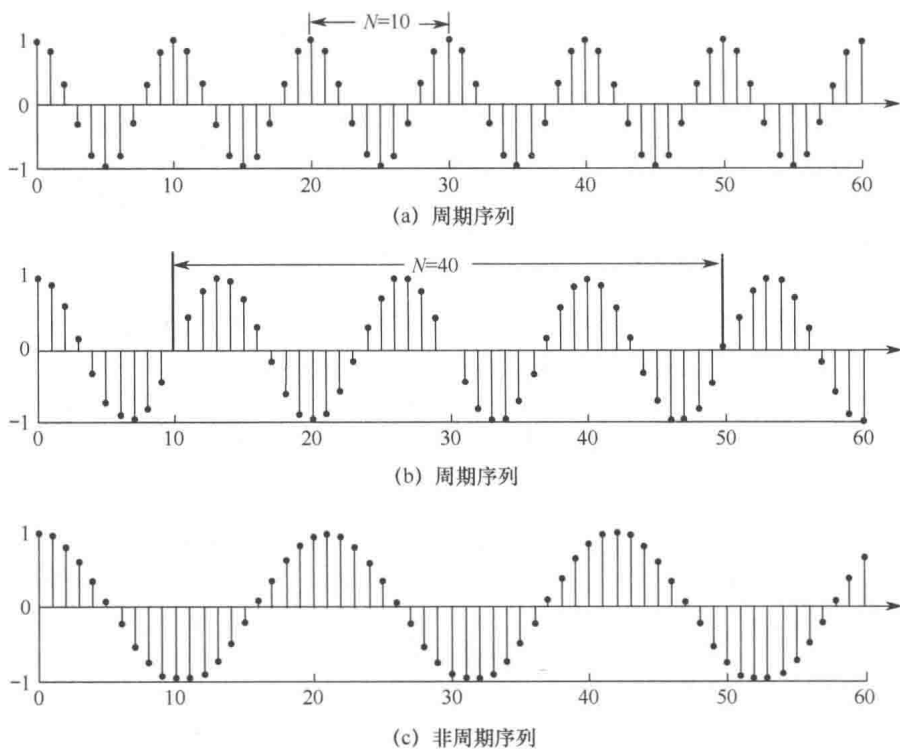


图 1.1.6 周期序列和非周期序列

## 2) 频率的周期性与对称性

(1) 正弦序列的频率以  $\omega = 2\pi$  为周期。定义两个正弦序列  $x_1(n) = \cos(\omega_1 n + \varphi)$  和  $x_2(n) = \cos(\omega_2 n + \varphi)$ ，其中  $0 \leq \omega_1 < 2\pi$  和  $2\pi k \leq \omega_2 < 2\pi(k+1)$ ， $k$  为任意正整数，若  $\omega_2 = 2\pi k + \omega_1$ ，则这两个序列在波形上是完全一样的。换言之，对于任何指数或正弦序列，

设其数字角频率为  $\omega_2$  且取值在  $[0, 2\pi)$  之外，它们都与数字角频率为  $\omega_2 \setminus 2\pi$  的指数（“\”表示取余）或正弦序列相等。

(2) 正弦序列的频率以  $\omega = \pi$  对称。考虑两个正弦函数  $x_1(n) = \cos(\omega_1 n)$  和  $x_2(n) = \cos(\omega_2 n)$ ，其中  $\omega_2 = 2\pi - \omega_1$ 。因此，可以推出  $x_2(n) = \cos(2\pi n - \omega_1 n) = \cos(\omega_1 n) = x_1(n)$ 。此时， $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  这两个序列在波形上是完全一样的。因此，若一个正弦序列的数字角频率为  $\omega_2$ ，且其满足  $\pi \leq \omega_2 < 2\pi$ ，则它在  $0 \leq \omega_1 < \pi$  内与数字角频率为  $\omega_1 = 2\pi - \omega_2$  的正弦序列相等。正弦序列的这种特性的含义如图 1.1.7 所示。随着  $\omega_0$  从 0 增加到  $\pi$ ，离散时间正弦序列  $x(n) = \cos(\omega_0 n)$  的振荡频率随着  $\omega_0$  的增加而增加，振荡得越来越快；而当  $\omega_0$  从  $\pi$  增加到  $2\pi$  时，振荡频率随着  $\omega_0$  的增加而减小，振荡得越来越慢。如果  $x_1(n) = \sin(\omega_1 n)$ 、 $x_2(n) = \sin(\omega_2 n)$ ，那么会有  $x_2(n) = \sin(2\pi n - \omega_1 n) = -\sin(\omega_1 n) = -x_1(n)$ 。因此，对于正弦序列  $\cos(\omega_0 n)$  或  $\sin(\omega_0 n)$  呈  $\omega = \pi$  偶对称或奇对称，因此称频率  $\pi$  为折叠频率。

将频率的周期性和对称性总结可以得出：任意整数  $k$ ， $\omega = 2k\pi$  的邻域内的数字角频率  $\omega_0$  与  $\omega = 0$  的邻域内的数字角频率  $\omega_0 - 2k\pi$  是不能区分的；而且  $\omega = (2k+1)\pi$  的邻域内的数字角频率  $\omega_0$  与  $\omega = \pi$  的邻域内的数字角频率  $\omega_0 - (2k+1)\pi$  也是不能区分的。因此，通常称  $\omega = 2k\pi$  的邻域内的频率为低频，而称  $\omega = (2k+1)\pi$  的邻域内的频率为高频。例如，图 1.1.7 (b) 所示的  $x_1(n) = \cos(\pi n / 8) = \cos(15\pi n / 8)$  是低频信号，而图 1.1.7 (d) 和图 1.1.7 (h) 所示的  $x_2(n) = \cos(7\pi n / 8) = \cos(9\pi n / 8)$  是高频信号。正弦信号的这两个性质也同样适用于后面介绍的信号频谱分析和数字系统，数字信号的频谱和数字系统的频率响应都以  $\omega = 2\pi$  为周期，幅度频谱和幅频特性都以  $\omega = k\pi$  呈共轭对称，即幅度呈偶对称，相位呈奇对称。第 3 章、第 6 章、第 7 章会有相应的内容。

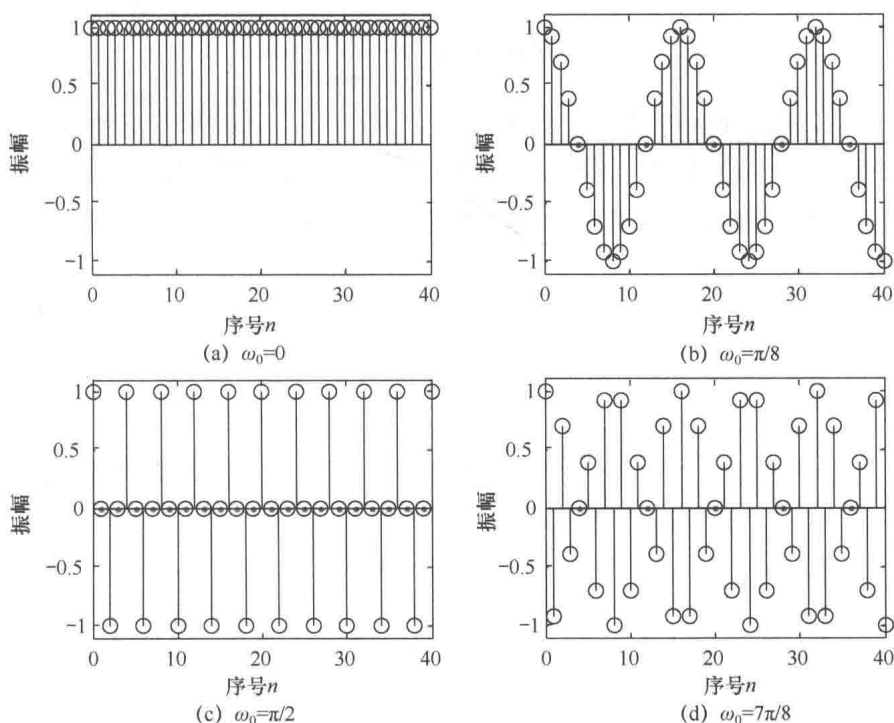
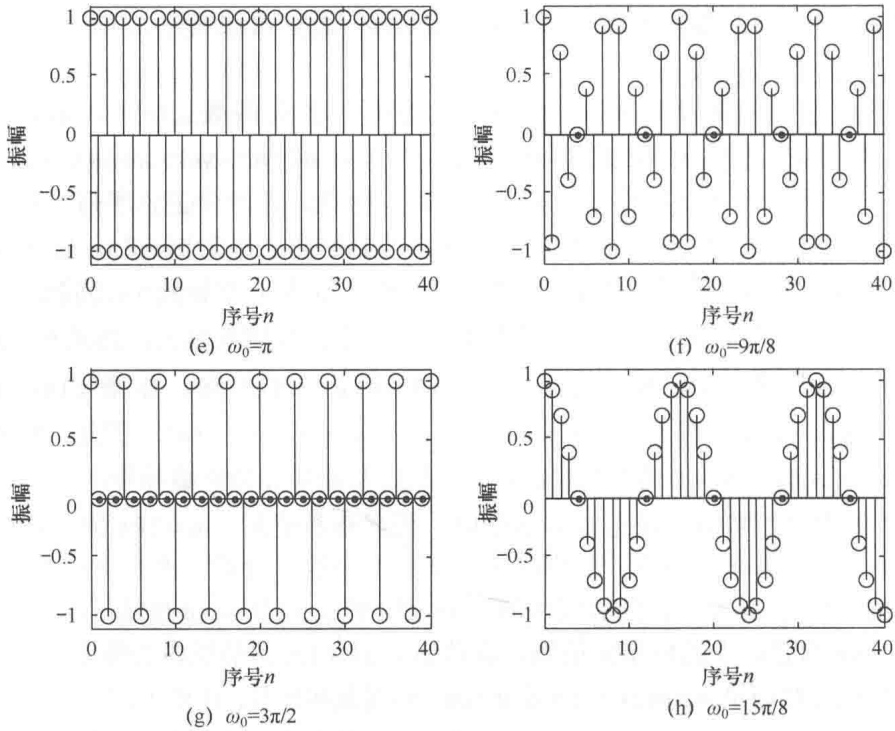


图 1.1.7 不同数字角频率的  $\cos(\omega_0 n)$  序列

图 1.1.7 不同数字角频率的  $\cos(\omega_0 n)$  序列 (续)

## 5. 实指数序列

实指数序列的表达式为

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.1.11)$$

式中,  $a$  为实数, 由于  $u(n)$  的作用, 当  $n < 0$  时,  $x(n) = 0$ 。其波形特点是: 当  $|a| < 1$  时, 序列收敛, 如图 1.1.8 (a) 和图 1.1.8 (c) 所示; 当  $|a| > 1$  时, 序列发散, 如图 1.1.8 (b) 和图 1.1.8 (d) 所示; 从图 1.1.8 (c) 和图 1.1.8 (d) 可以看出, 当  $a$  为负数时, 序列值在正负之间摆动。

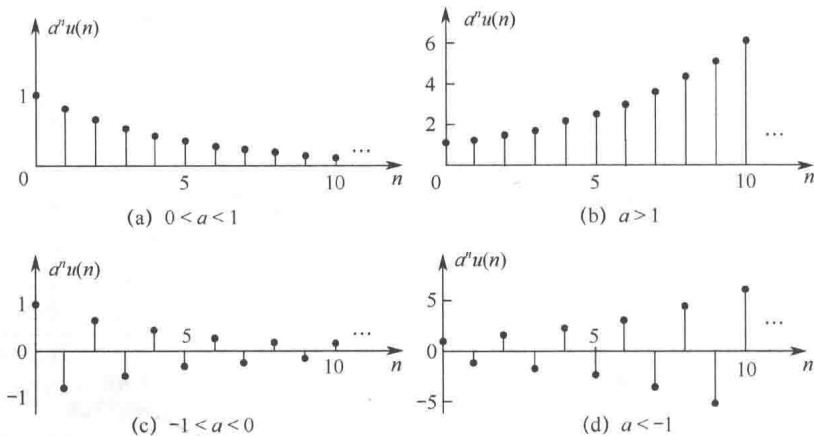


图 1.1.8 实指数序列

## 6. 复指数序列

复指数序列的表达式为

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1.1.12)$$

其指数是复数（或纯虚数），用欧拉公式展开后，得到

$$x(n) = e^{\sigma n} \cos \omega_0 n + j e^{\sigma n} \sin \omega_0 n \quad (1.1.13)$$

式中， $\omega_0$  为复正弦序列的数字域频率， $\sigma$  表征了该复正弦序列的幅度变化情况。其实部和虚部的波形如图 1.1.9 所示。

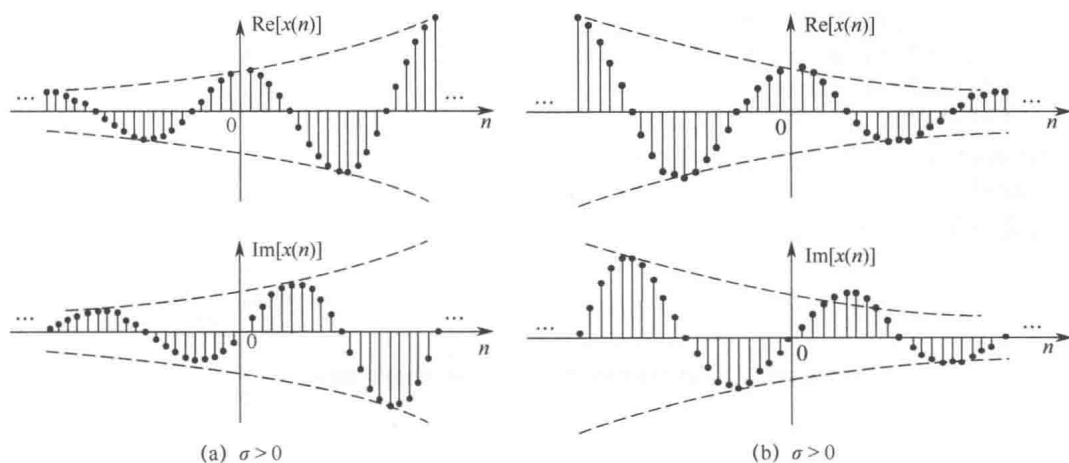


图 1.1.9 复指数序列

复指数序列表示成极坐标形式为

$$x(n) = |x(n)| e^{j \arg[x(n)]} = e^{\sigma n} e^{j \omega_0 n} \quad (1.1.14)$$

式中， $|x(n)| = e^{\sigma n}$ ， $\arg[x(n)] = \omega_0 n$ 。

MATLAB 中有许多可以用于产生信号的函数，一些比较重要的函数是 `exp`、`sin`、`cos`、`square`、`sawtooth`

用 MATLAB 产生单位抽样序列、单位阶跃序列、矩形序列、正弦序列和复指数序列的程序如下：

```

clc;close all;clear all;
n=[-30:30];
figure(1);
%单位抽样序列
x1=[n==0];
subplot(221),stem(n,x1);
xlabel('n');ylabel('\delta(n)');axis([-30,30,-1.5,1.5]);
%单位阶跃序列
x2=[n>=0];
subplot(222),stem(n,x2);
xlabel('n');ylabel('u(n)');axis([-30,30,-1.5,1.5]);
%矩形序列
N=10;
x3=[n>=-N& n<N];
subplot(223),stem(n,x3);

```