

MBA MPA MPAcc

管理类联考



2020

周洪桥 编著

数学

快速解题技巧

9种快速解题方法 45个经验公式总结 90类题型全归纳

适用于管理类专业硕士研究生入学考试：

MBA（工商管理硕士）/EMBA（高级管理人员工商管理硕士）/

MPA（公共管理硕士）/MPAcc（会计硕士）/MEM（工程管理硕士）/

MTA（旅游管理硕士）/MAud（审计硕士）/MLIS（图书情报硕士）

清华大学出版社



内 容 简 介

解题速度是 MBA、MPA、MPAcc 等管理类联考综合能力数学考试的重要因素。本书分为两个部分。第一部分以历年真题为例,介绍问题求解的 8 种快速解题法及条件充分性判断的快速解法,称为“独孤九剑”,每剑配有相应的练习,方便考生熟练解法。第二部分对 1997—2019 年的真题进行了题型的全部归纳,并给出传统解法(直接法)与快速解题法,方便考生对比学习。附录列出了作者精心总结的 45 个常用经验公式及巩固练习,供考生吸收和检验。

希望考生通过阅读本书快速有效地提高解题能力和解题速度,取得好成绩。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

2020MBA、MPA、MPAcc 管理类联考 数学快速解题技巧/周洪桥编著. —北京:清华大学出版社,2019

ISBN 978-7-302-53058-9

I. ①2… II. ①周… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 098424 号

责任编辑:高晓蔚

封面设计:李伯骥

责任校对:宋玉莲

责任印制:丛怀宇

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京嘉实印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:21.25

字 数:462千字

版 次:2019年6月第1版

印 次:2019年6月第1次印刷

定 价:49.80元

产品编号:084028-01

总序

我国自1997年开始组织工商管理硕士(MBA)研究生入学考试(以下简称MBA联考)。2010年,我国扩大了专业硕士学位招生,把MBA(工商管理硕士)、MPA(公共管理硕士)、MPAcc(会计硕士)、MEM(工程管理硕士)、MTA(旅游管理硕士)、MAud(审计硕士)、MLIS(图书情报硕士)等专业硕士的入学考试组成了管理类硕士联考。2016年12月,EMBA(高级管理工商管理硕士)也加入了这个考试,这样参加管理类硕士联考的考生数量更加庞大了。

2003年以来,笔者一直从事管理类硕士联考辅导工作,深知参加联考同学之不易。在繁忙的工作中备考,复习过程中往往要放弃许多与家人共度周末、与朋友娱乐休闲的机会。复习范围广,时间紧,丢掉书本多年,等等,这些都是备考MBA、MPA、MPAcc等联考的同学所面临的共同难题。

在管理类联考试卷中,绝大部分考生都感觉“综合能力”这张试卷时间特别紧迫,在数学、逻辑、写作三个科目中,往往顾此失彼,交卷的铃声一响,许多考生只能望卷兴叹。因此,一套能帮助广大考生在极其有限的时间内缩小复习范围、抓住考试重点、直击考试真题、提高解题速度、预测命题趋势的备考丛书对考生来说无疑是雪中送炭。为此,笔者在积累十几年一线教学经验的基础上,编写了这套管理类联考备考丛书。丛书分5个系列,分别是“考点解码”系列、“快速解题技巧”系列、“千题训练”系列、“历年真题详解”系列和“考前预测密卷”系列。

一、“考点解码”系列

“考点解码”是这套丛书的基础,着眼于帮助考生厘清基本考点、熟练基本概念、掌握基本方法。

本系列图书与市面上其他辅导书不同之处在于撇开了传统书籍按章节笼统介绍的特点,而是把各考试科目的内容按考点进行分类,逐个考点进行讲解,每个考点分为“透析”“典型例题”“巩固练习”“答案与解析”四个部分。考生在阅读过程中就像老师在身边讲解一样。而且按考点来分的好处就是把整个复习内容分解为各个微模块,方便考生查阅,哪里不懂就直接复习哪个环节,哪里不熟就练习哪个环节。

本系列图书适合在备考复习的第一阶段使用,考生应该仔细阅读每个考点的每个环节,有时间的同学可以反复阅读三遍,时间紧张的同学最好是阅读两遍。对其中每一道例题与练习题要求能独立解题,遇到不懂的地方再看解答过程。在练习题的解答过程中,有些题目给出了不止一种解法,使考生对不同的解题方法都有所了解。

二、“快速解题技巧”系列

在初步掌握联考要考的各个考点之后,要想考取比较好的成绩,还需了解真题特点与趋势,提高解题速度,“快速解题技巧”系列就着眼于此。

“快速解题技巧”在详细总结联考各科各种题型的基础上,介绍了快速解题的方法技巧,帮助考生提高解题速度,节省解题时间。在“综合能力”考试中,最宝贵的就是时间,因此每道题都需要争分抢秒来解答。传统的解题方法往往难以取得好的成效,快速而行之有效的解题方法对考生来说就极为重要。本书中的解题方法都是笔者在十几年的教学过程中逐步摸索总结出来的,有些甚至是独创。熟练掌握了这些解题方法,可以极大地提高解题速度,有些还可以达到“秒杀”的效果。比如数学部分中的“排除法”“特值法”“经验公式法”都是应用很普遍的快速解题方法。

三、千题训练系列

众所周知,要复习好数学,不经过一定量的练习,是达不到理想的效果的。我们不提倡题海战术。对在备考的考生来说,时间尤为宝贵,更难以抽出时间进行海量的练习,因此对高频考点与经典题型进行分门别类的练习,无疑是一个有效的途经。

“千题训练”系列是按照“快速解题技巧”系列的解题方法与题型归纳部分的题型编写的一本典型习题练习用书,全书共计 1000 题,按照考点题型进行分类,每个考点题型编排了 10 道习题,并配备了详细的解析过程。

四、“历年真题详解”系列

备考和考试始于真题,终于真题。真题是最好的备考材料。真题是一座宝藏,里面藏着丰富的“干货”;真题是一面镜子,可以照出考生离考试要求的差距;真题是一台测速仪,可以检测你真正的解题速度。考点是有限的,未来的真题也只是过去真题对相同的考点在不同程度上的翻版。

“历年真题详解”是价值非常之高的复习材料,应该最大可能地发挥其价值,善加利用。考生在使用时可以先独立检测,然后再对照解析明确方向、找出差距。真题可以反复研习三遍,做到对近几年的考题特点了然于胸。

五、“考前预测密卷”系列

如果仔细研究真题是为了鉴古,那么“考前预测密卷”系列就是为了测今。

“考前预测密卷”是由仿真度极高的五套模拟试卷及详细解答组成。考生在阅读完前两个系列之后,可以用这五套试卷来检测复习的效果,查漏补缺,把各种解题方法与技巧转化成得分的武器。

这五套试卷花费了笔者极大的心血,是对命题趋势的预测。考生在自测时,要按照考试的真实时间来测试,比如说上午 8:30—11:30 用来测试综合能力,下午 14:00—17:00 用来测试英语。切不可用零碎的时间来练习,也不可一天连续测试两三套,这样达不到好的效果。最好是两三天做一套,每一次测试时,都把它当作真正的考试来进行,考前一个

月完成这五套试卷。

六、丛书使用方法

情况	适合对象	学习方案	备考用书	时间规划
1	6月之前开始复习的考生	学习时间充裕,可以按部就班地学习本系列教材,循序渐进地掌握每个知识点	考点解码	7月底之前
			快速解题技巧、千题训练	8—9月
			历年真题详解	9—10月
			考前预测密卷(五套)	11—12月
2	7—9月开始复习的考生	学习时间相对充裕,可以按部就班地学习本系列教材,循序渐进地掌握每个知识点	考点解码	7—8月
			快速解题技巧、千题训练	9月
			历年真题详解	10月
			考前预测密卷(五套)	11—12月
3	10月开始复习的考生	学习时间比较紧张,可以先集中时间快速复习完考点解码,掌握考试的基本公式与概念,重点放在快速解题技巧与历年真题的学习上,最后做完五套预测试卷	考点解码	10月
			快速解题技巧、千题训练	11月
			历年真题详解	11月
			考前预测密卷(五套)	12月

III

七、辅助学习资源

为了能更好地解决部分考生在学习中的困惑,我们将免费提供网络在线答疑服务,回答考生的各种疑问。欢迎考生加入管硕联考读者交流QQ群:342254034。

在条件允许的情况下,部分考生可以选择我们的高清网络辅导课程进行学习,里面有系统的全套课程。网址为 www.szhzmba.com。

最后祝广大考生备考顺利,并以一首小词献给大家。

临江仙

百战职场终觉浅,剑收暂锁征袍。书山纵险喜登高。胸藏经世志,老骥习戎韬。
一度春犁濡汗水,东风又放新桃。鲲鹏腊月驾云涛。雄关真似铁,成败亦风骚。

周洪桥

2019年5月于深圳

前 言

制约 MBA、MPA、MPAcc 等管理类联考综合能力试卷数学成绩的最大障碍不是试题的难度,而是解题的速度。在综合能力试卷中的 25 道数学题,应在一小时左右完成,也就是平均 2~3 分钟完成一道数学题。这对很大一部分考生来说是一个极大的挑战。不少考生在考场不是不会做,而是做不快。因此,对考生来说,能够提高解题速度,哪怕平均每道题的解题时间能缩短十几秒、二十几秒,赢得时间,答完整张试卷,最后的分数也就有一个可观的提高。

本书的目的就是希望通过各种快速解题法,来提高考生的解题速度。

本书是《管理类联考数学考点解码》的姊妹篇,分为两个部分。第一部分选取了 1997—2009 年的部分真题为例,介绍问题求解的 8 种快速解题法以及条件充分性判断的快速解法,称为“独孤九剑”,每剑都配有相应的练习,方便考生熟练解法。第二部分对 1997—2019 年的真题进行了题型的全部归纳,并给出传统解法(直接法)与快速解题法,方便考生读者对比学习。尽管本书每道题均有详细的解析,但希望考生读者在使用本书时,自己先独立完成每道题,然后再去看详解,仔细研究一下自己的解法与书中的解法有什么不同,然后归纳总结,方能快速有效地提高自己的解题能力。

不过,在这里需要提醒广大考生读者两点:第一,这些快速解题法不是万能的方法,它只对一部分题目适用。很多题目还是要靠基本概念和直接法来解决,这是本,不能丢,更不能迷恋这些快速解法而抛弃对基本概念和直接法的掌握而走火入魔。第二,只有在对基本概念、直接法熟练的情况下,才能更好地利用这些快速解题法。

总之,希望考生在阅读完《管理类联考数学考点解码》的基础上,通过学习本书提供的快速解题法,再阅读《管理类联考历年真题详解 综合能力》,熟悉并运用这些解题方法,在考场上对一部分题目能“一眼而破”,吾心足矣!

本书提供读者交流群,在学习本书过程中有不明白的地方可加 QQ 群 342254034(管硕联考读者交流群),与我及其他读者朋友交流,共同提高。

最后预祝广大考生在联考中取得优异的成绩!

周洪桥

2019 年 5 月于深圳

目 录

MBA、MPA、MPAcc 管理类联考数学试题的特点与解题策略	1
---------------------------------------	---

第一部分 独孤九剑——快速解题技巧

第一剑 特值代验法	11
第二剑 数字特性法	21
第三剑 找齐比例法	29
第四剑 验证排除法	35
第五剑 图像法	43
第六剑 枚举归纳法	57
第七剑 极端法	63
第八剑 经验公式法	67
第九剑 条件充分性判断快速解法	69

VII

第二部分 题型全归纳

第一讲 算术	83
题型 1 整除与余数	83
题型 2 奇数与偶数	84

题型 3	质数与合数	86
题型 4	公约数与公倍数	87
题型 5	有理数与无理数的混合运算	88
题型 6	实数的整数部分与小数部分	89
题型 7	绝对值的定义	90
题型 8	非负数	94
题型 9	比和比例的计算	96
题型 10	其余问题	99

第二讲 整式与分式

题型 1	多项式的乘法	101
题型 2	求多项式展开式系数的代数和	102
题型 3	$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac$ 的变形及其应用	103
题型 4	因式定理和余式定理	105
题型 5	求多项式的最值	106
题型 6	分式的概念	107
题型 7	求齐次分式的值	108
题型 8	求 $x^2 + \frac{1}{x^2}, x^3 + \frac{1}{x^3}, x^4 + \frac{1}{x^4}, x^6 + \frac{1}{x^6}$ 的值	109

VIII

第三讲 函数、方程与不等式

题型 1	集合元素性的质与应用	111
题型 2	集合的关系与运算	112
题型 3	求函数的定义域	113
题型 4	一元二次函数	114
题型 5	绝对值函数的最值	116
题型 6	方程的解与解方程	118
题型 7	绝对值方程	121
题型 8	一元二次方程的判别式	123
题型 9	根与系数的关系	126
题型 10	根的正负与区间分布	132
题型 11	不等式的基本性质	136
题型 12	基本不等式	138
题型 13	一元二次不等式的解法	141
题型 14	高次不等式与分式不等式	144
题型 15	绝对值不等式的解法	147
题型 16	不等式恒成立、成立、无解问题	148

第四讲 数列	153
题型 1 S_n 与 a_n 的关系	153
题型 2 a_{n+1} 与 a_n 的关系	156
题型 3 数列的判断	158
题型 4 等差数列的通项与性质	161
题型 5 等比数列的通项与性质	162
题型 6 等差数列的前 n 项和与性质	164
题型 7 等比数列的前 n 项和	168
题型 8 等差数列与等比数列的综合	170
题型 9 特殊数列求和	173
第五讲 应用题	177
题型 1 基本比和比例问题	177
题型 2 利润及利润率问题	189
题型 3 浓度问题	195
题型 4 加权平均数	198
题型 5 容斥原理	201
题型 6 行程问题	202
题型 7 工程问题	210
题型 8 分段计算问题	217
题型 9 不定方程	218
题型 10 最值问题	220
题型 11 数列问题	223
题型 12 其他问题	225
第六讲 几何	229
题型 1 基本图形的判定与性质	229
题型 2 直角三角形、勾股定理	232
题型 3 三角形的全等与相似	234
题型 4 三角形的面积	237
题型 5 四边形与圆的面积	242
题型 6 求阴影部分的面积	246
题型 7 常见立体图形的表面积与体积	250
题型 8 图形的判断	253
题型 9 直线方程及其位置关系	256

题型 10	直线与圆相切	258
题型 11	直线与圆相交	261
题型 12	圆与圆的位置关系	262
题型 13	最值问题	264
题型 14	曲线过定点问题	265
题型 15	面积问题	267
题型 16	对称问题	270
题型 17	线性规划	274
第七讲	数据分析(排列组合、概率与数据描述)	279
题型 1	排列数与组合数公式	279
题型 2	两个基本原理	281
题型 3	简单排列问题	282
题型 4	“相邻”与“不相邻”问题	283
题型 5	基本组合问题	284
题型 6	不同元素分组与分配	287
题型 7	相同元素分组	288
题型 8	错位排列	289
题型 9	列举法计算古典概率	289
题型 10	无放回摸球问题	291
题型 11	分房问题	295
题型 12	几何概率	296
题型 13	其他类型古典概率	297
题型 14	乘法公式	299
题型 15	独立事件的概率	300
题型 16	贝努利概型	304
题型 17	平均值	308
题型 18	方差与标准差	310
附录	联考数学常用经验公式	313
后记	327

MBA、MPA、MPAcc 管理类联考 数学试题的特点与解题策略

十多年来,在管理类联考的数学试题中,一直沿用两种题型:问题求解和条件充分性判断,其中问题求解就是传统的选择题。

一、数学试题的特点与考查功能

数学试题通常是由一个题干和 5 个可供选择的选项组成,要求考生从若干个选项中选出一个符合题目要求的选项,具有如下特点。

(1) 试题比较短小,可容纳较大题量,可以扩大考查内容的覆盖面,有利于基础知识、基本技能和基本思想方法的全面考查。目前的 25 道数学题可以考查五六十个考点,还可以考查数学基本方法、数学思维方法和数学思想方法。

(2) 试题的思辨性强。由于在 5 个选项中可以设置一些似是而非的“陷阱”,所以要求考生必须概念清晰,运算准确,具备一定的观察、分析和逻辑推断能力,否则就容易掉进“陷阱”,造成解答错误。

作为具有选拔功能的联考数学,具有以下考查功能。

(1) 能在较大的知识范围内,实现对基础知识、基本技能和基本思想方法的考查。

(2) 能比较确切地测试考生对数学概念、性质、定理、法则和公式的理解、掌握和熟练程度。

(3) 能有效地考查考生演绎证明、计算求解、直觉猜想等理性思维能力以及综合运用数学知识解决问题的能力,可以考查思维水平的差异。

(4) 通过对考题的开放性、探究性、研究性和创新性设计,考查考生的学习能力。

(5) 能比较容易地考查考生的思维速度和解题速度。

二、解联考数学题的思维结构和思维训练功能

能够准确、迅速地解答联考数学试题是思维结构优化的体现。因此研究解联考数学试题的思维结构是十分有益的。

从思维结构与思维能力的角度解题,主要体现为:

- 逻辑思维与直觉思维相结合；
- 精算能力与估算能力相结合；
- 信息提供能力与处理能力相结合；
- 数的精确与形的直观相结合。

1. 逻辑思维与直觉思维的结合

在解题的思维过程中,有时不是从已知到求解一环紧扣一环,完整地、逻辑地、按部就班地进行,而是以一种简缩的思维结构来进行。这种思维往往能较快地抓住题目的本质,思维过程短,思维链少。这是一种数学思维的简缩形式,而简缩思维的极限形式就是直觉思维。

选择题对考查考生的直觉思维方面有着十分特别的作用,这是因为选择题的解答只要求结果,而不要求过程。在解答选择题过程中,以简缩的思维、直觉的思维解决问题,成为考查不同思维层次考生的一个标志。不同考生对解法的不同选择,表现出来的是时间与准确性的差异,实际上却是思维水平的差异。思维层次较低的考生只能以反复训练而机械记忆的方法来解答,虽然也能获得正确的答案,但常常是花费了大量的答题时间,影响了其他试题及其他科目的答题,实际上是一种潜在的丢分;而思维层次较高的考生,则能够直接抓住问题的实质,把简缩思维、直觉思维与逻辑思维有机地结合在一起,能够正确、迅速地解出答案,从而事半功倍。可以这样说,对于数学题解答正确而且用时较少的考生,思维水平相对较高。在他们的思维过程中,除了逻辑思维的成分之外,一定还有直觉思维的成分。而直觉思维的形成,需要靠大量的练习方能完成。

【例】 设 a, b 是满足 $ab < 0$ 的实数,那么()。

- (A) $|a+b| > |a-b|$ (B) $|a+b| < |a-b|$ (C) $|a-b| < |a| - |b|$
 (D) $|a-b| < |a| + |b|$ (E) $|a+b| < |a| - |b|$

【分析】 题干给出的实数 a, b 满足 $ab < 0$,且 5 个选项中只有一个对所有的 $ab < 0$ 都是正确的,因此该选项对特殊的满足 $ab < 0$ 的实数 a, b 也是正确的,取 $a=3, b=-2$,代入 5 个选项,只有选项(B)正确。

故选(B)。

【例】 (2010年1月)

电影开演时观众中女士与男士人数之比为 5 : 4,开演后无观众入场,放映一个小时后,女士的 20%、男士的 15%离场,则此时在场的女士与男士人数之比为()。

- (A) 4 : 5 (B) 1 : 1 (C) 5 : 4 (D) 20 : 17 (E) 85 : 64

【分析】 由于题干给出的已知条件都是比值和百分比,要求的也是比值,因此这个比值与女士和男士的具体人数没有关系。可以假设一个符合条件的比较好计算的数字来求解。设电影开演时观众中女士与男士人数分别为 50 人和 40 人,则放映一个小时以后,女士有 10 人离场,男士有 6 人离场,最后在场的女士人数为 40 人,男士为 34 人,他们的比值为 $40 : 34 = 20 : 17$ 。

故选(D)。

2. 精算能力与估算能力的结合

数学运算求解能力可以分为精算能力和估算能力两种基本形式。

精算能力主要是指依靠数字和数学运算符号,遵循一定的运算规则,按照一定的演算步骤,即根据一定的算理,得出较精确的计算结果的能力。

估算能力主要是指在利用一些估算策略的基础上,通过观察、比较、判断、推理、计算等认知过程,获得一种概括化结果的能力。

在联考数学的解题中,一般考生比较注意直接计算,注意对题目的精算,而忽视估算或不敢估算,即只是把题干作为已知条件,把整个题作为一道解答题来求解,一数不差,一丝不苟,从而小题大做。其实,有不少的数学选择题,并不必进行准确的计算,只需对其数值特点和取值范围作出适当的估计,便能作出正确的判断。因此,估算能力在解决问题中起着重要的作用,利用估算能力不仅可以节约认知步骤,提高解决问题的效率,而且可以帮助探索问题决策的策略,估计结果的正确性和合理性。

【例】 (2016年1月)

圆 $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ 上到原点距离最远的点是()。

- (A) $(-3, 2)$ (B) $(3, -2)$
 (C) $(6, 4)$ (D) $(-6, 4)$
 (E) $(6, -4)$

【分析】 $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$, 圆心为 $(3, -2)$ 且经过坐标原点。如图所示。

由图可知,圆上到原点距离最远的点在第四象限,而选项(B)的点 $(3, -2)$ 为圆心,不在圆上。

因此,本题应选(E)。

【例】 (2009年10月)

已知某车间的男工人数比女工人数多 80%,若在该车间一次技术考核中全体工人的平均成绩为 75 分,而女工平均成绩比男工平均成绩高 20%,则女工的平均成绩为()。

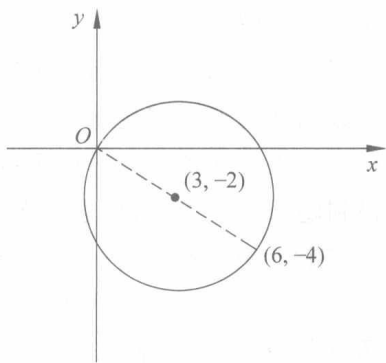
- (A) 88 分 (B) 86 分 (C) 84 分 (D) 82 分 (E) 80 分

【分析】 由女工平均成绩比男工平均成绩高 20% 可知女工平均成绩与男工平均成绩之比为 $1.2 : 1 = 6 : 5$, 即女工的平均成绩是 6 的倍数,5 个选项中只有选项(C)是 6 的倍数。

故选(C)。

3. 信息提取能力与处理能力的结合

分析和解决数学问题的思维过程,主要表现为根据题目的已知条件提供有用的信息,从题目的求解中考虑所需要的信息,从记忆储存系统中提取有关的信息,然后根据这些信息,进行联系、组合、分析、综合,因此解数学题的过程是一个信息提取与处理的过程,学会对信息的提取、加工和处理是学会解数学题的一个标志。



选择题包含了大量的信息,以 MBA 等管理类联考数学为例,提供的信息有:

- (1) 题干提供的题设条件和题目的要求;
- (2) 5 个选项,即题目结果的 5 种可能性;
- (3) 选择的要求,即在 5 个选项中有且只有一个是符合题目要求的。

在解题过程中能否在众多的信息面前寻求有用的信息和关键的信息,并且对这些信息进行观察、比较、分析判断、加工,确定问题的答案是相当关键的。在解题时,有些考生没有注意运用题目给出的全部信息尤其是隐含信息,而只是根据题干的要求进行推理和计算,而忽视了题目提供的 5 个选项及五选一的选择要求。这样解题,实质上是信息收集和处理的失误,容易造成小题大做;而在解题过程中,能够充分运用题目的全部信息,特别是把 5 个选项作为可以选择的结果以及五选一的要求,就可以用简缩的思维求解,加快解题速度,并能提高解题的准确性。

4. 数的精确与形的直观的结合

一些数学题,题干提供的信息,既具有代数特征又具有几何特征。在这种情况下,如果能够用几何图形或函数图像把题目中的信息呈现出来,往往会使题目变得直观、直接。例如求方程解的个数的题目,如果能够把方程中的函数画出图像,则求解的个数就会转化为求图像交点的个数。而对于满足条件的参数范围的题目可以研究参数的几何意义,通过参数的几何形式的变化研究参数的变化。对于求最大值、最小值问题,又可通过图像的极端位置来反映等。由于图形的直观和直接,再辅以简单精确的计算或估算,就可以快速地得到题目的解答,这种通过图形帮助解题的过程是数形结合思想的重要体现,是数与形在内容上互相联系、在方法上互相渗透、在解决问题过程中互相转化的过程。在解题过程中,注意数形结合,注意用图形帮助解题,凸显数的精确与形的直观的优越性,不仅有利于解题,也有利于思维水平的提高。

5. 解题的不同思维层次

在前面讲述逻辑思维与直觉思维的结合时,已经指出,对于选择题,不同考生对解法的不同选择,表现出来的是时间与准确性的差异,实际上却是思维水平的差异。下面,我们再通过一个具体的例题研究解题的不同层次。

【例】 若在等差数列中前 m 项和为 30,前 $2m$ 项和为 100,则它的前 $3m$ 项和为()。
 (A) 130 (B) 170 (C) 210 (D) 260 (E) 300

【解法 1】 直接运用等差数列的求和公式。

设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,公差为 d ,由题意,有

$$\begin{cases} ma_1 + \frac{m(m-1)d}{2} = 30 \\ 2ma_1 + \frac{2m(2m-1)d}{2} = 100 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a_1 + \frac{(m-1)d}{2} = \frac{30}{m} \\ a_1 + \frac{(2m-1)d}{2} = \frac{50}{m} \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = \frac{10}{m} + \frac{20}{m^2} \\ d = \frac{40}{m^2} \end{cases}.$$

把这个结果代入 $S_{3m} = 3ma_1 + \frac{3m(3m-1)d}{2} = 3m\left(\frac{10}{m} + \frac{20}{m^2}\right) + \frac{3m(3m-1)}{2} \times \frac{40}{m^2} = 210$ 。

因此选(C)。

【解法 2】 由于 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等差数列, 于是有

$$2(S_{2m} - S_m) = S_m + (S_{3m} - S_{2m})$$

即

$$2(100 - 30) = 30 + (S_{3m} - 100)$$

解得

$$S_{3m} = 210.$$

【解法 3】 把 S_m 看作 m 的二次函数, 设 $S_m = Am^2 + Bm$, 则由题设有

$$\begin{cases} S_m = Am^2 + Bm = 30 \\ S_{2m} = 4Am^2 + 2Bm = 100 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} Am^2 = 20 \\ Bm = 10 \end{cases}.$$

因此, $S_{3m} = 9Am^2 + 3Bm = 210$ 。

【解法 4】 把 $\frac{S_m}{m}$ 看作 m 的一次函数, 设 $\frac{S_m}{m} = Am + B$, 则由题设有

$$\begin{cases} \frac{S_m}{m} = Am + B = \frac{30}{m} \\ \frac{S_{2m}}{2m} = 2Am + B = \frac{100}{2m} = \frac{50}{m} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} Am = \frac{20}{m} \\ B = \frac{10}{m} \end{cases}.$$

因此, $\frac{S_{3m}}{3m} = 3Am + B = \frac{60}{m} + \frac{10}{m}$, 得 $S_{3m} = 210$ 。

【解法 5】 由选项可知, S_{3m} 的结果与 m 无关, 所以设 $m=1$, 则

$$\begin{cases} S_1 = a_1 = 30 \\ S_2 = a_1 + a_2 = 100 \end{cases}, \text{由等差数列可得 } a_3 = 110.$$

因此, $S_{3m} = S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 30 + 70 + 110 = 210$ 。

【解法 1】 是一种常规思维, 按照一般的思维规律, 由等差数列的前 n 项和公式, 建立关于 a_1 和 d 的方程组, 求出 a_1 和 d , 再求 S_{3m} 。

【解法 2】 是一种归纳思维, 由等差数列的特征可以得到 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等差数列, 概括了这一类题的通则、通法, 从而利用这一通则、通法对 S_{3m} 求解。

【解法 3】和**【解法 4】**是抽象思维, 解题时直接抓住 S_n 表达式的本质, 把 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 直接写成 $S_n = An^2 + Bn$, 而略去 $A = \frac{d}{2}$ 和 $B = a_1 - \frac{d}{2}$ 这些非本质的东西, 大大简化了运算。

【解法 5】是简缩思维, 是充分运用了题目给出的全部信息, 以 S_{3m} 的结果与 m 无关为前提, 令 $m=1$, 从而利用运算很快地得到答案。

本题是一道选择题, 只要能根据题目的要求得出应选的选项即可, 可是**【解法 1】**变成

了小题大做,小题难做;【解法 2】虽是小题小做,但是必须在已知 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等差数列的前提下才能完成,如果不知道这个结论,就变成了小题难做了;【解法 3】和【解法 4】则是小题活做,【解法 5】是小题小做,小题巧做。因此,【解法 5】体现了解选择题的特点,体现了用简缩思维进行合情推理。虽然从演绎推理的角度这种解法并不严格,但是从选择题的角度,从思维训练的角度,是完全合理的,也是应该肯定的。

6. 思维训练功能

选择题作为一种题型,以它特有的题目结构、解题要求,以及特有的解题途径、解题方法,体现了特有的思维结构,因此,对于思维训练就有着特定的功能。

首先,选择题的解法,尤其是间接解法,对于培养思维的批判性和深刻性有着重要的作用。选择题有 5 个选项,其中有一个是符合题目要求的,而另外 4 个则是陷阱,是干扰。解选择题的一个重要方法就是通过反例识别陷阱或通过逻辑分析排除干扰,这种通过构思反例、否定错误结论的思维方式是一种重要的思维方式,这种思维能力实际上是思维的批判性和深刻性的反映。

其次,选择题的解决有利于培养思维的灵活性和敏捷性,对于选择题,好的解法的选择往往需要运用简缩的思维、运用估算、运用图形、运用特例或反例否定,什么方法奏效就用什么方法。这就需要有灵活的、敏捷的思维,这样才能一下子抓住问题的实质,并且提高解题的速度。

6 此外,选择题的解法也有利于培养分析判断能力,对题目所给信息的捕捉、收集及处理能力,合情推理能力,举反例的能力,估算能力等。

三、问题求解选择题的解题方法

从以上分析,解问题求解题有一个思维选择和解法选择的问题,因此,在解题过程中,必须有合情的推理、简缩的思维、合理的策略和正确的计算。对问题求解题,解题方法的有效、合理运用是理性思维能力的集中体现。

从历年的考题分析来看,对于问题求解部分的题有以下一些解法:直接求解法、数字特性法、验证排除法、特值法、数形结合法、极端法、整体思考法、归纳猜想法、经验公式法。

直接求解法是考生运用得最多的解法,就是利用题干中所给条件,结合相关数学知识,一步一步进行严谨的推导,最终得出正确答案的过程。比如第 4 页例题中的【解法 1】就是典型的直接法。绝大部分教材上运用的都是直接求解法,也是最重要的一种解题方法,在《管理类联考数学考点解码》一书中运用的也大多是此种解题方法,因此在本书中就不再介绍了。但是有些数学题除了直接求解法以外,还可以运用其他的解题方法快速求得答案,提高解题速度,节约解题时间,比如特值代验法、数字特性法、找齐比例法、验证排除法、图像法、枚举归纳法、极端法、经验公式法。笔者把这 8 种解题方法以及条件充分性判断的快速解题法共 9 种快速解题法合称为“独孤九剑”。

四、条件充分性判断的解题说明

管理类联考中有一类条件充分性判断的题目,本书将对其快速解法做专门讲解。为

方便解题及节省篇幅,将解题说明抄录如下,后文未加说明者请参阅此处。

条件充分性判断

解题说明:本大题要求判断所给的条件(1)和条件(2)能否充分支持题干中陈述的结论。阅读条件(1)和条件(2)后选择:

- (A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分;
- (B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分;
- (C) 条件(1)和条件(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
- (D) 条件(1)充分,条件(2)也充分;
- (E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分,且条件(1)和条件(2)联合起来也不充分。