



2020^年

李正元·范培华

考研数学

数学

数学三

历年试题解析

- 主编 北京大学 范培华
北京大学 尤承业
北京大学 李正元

20年经典传承 百万考生推荐

名师全程亲自答疑 扫描二维码互动交流

双色印刷 重点突出



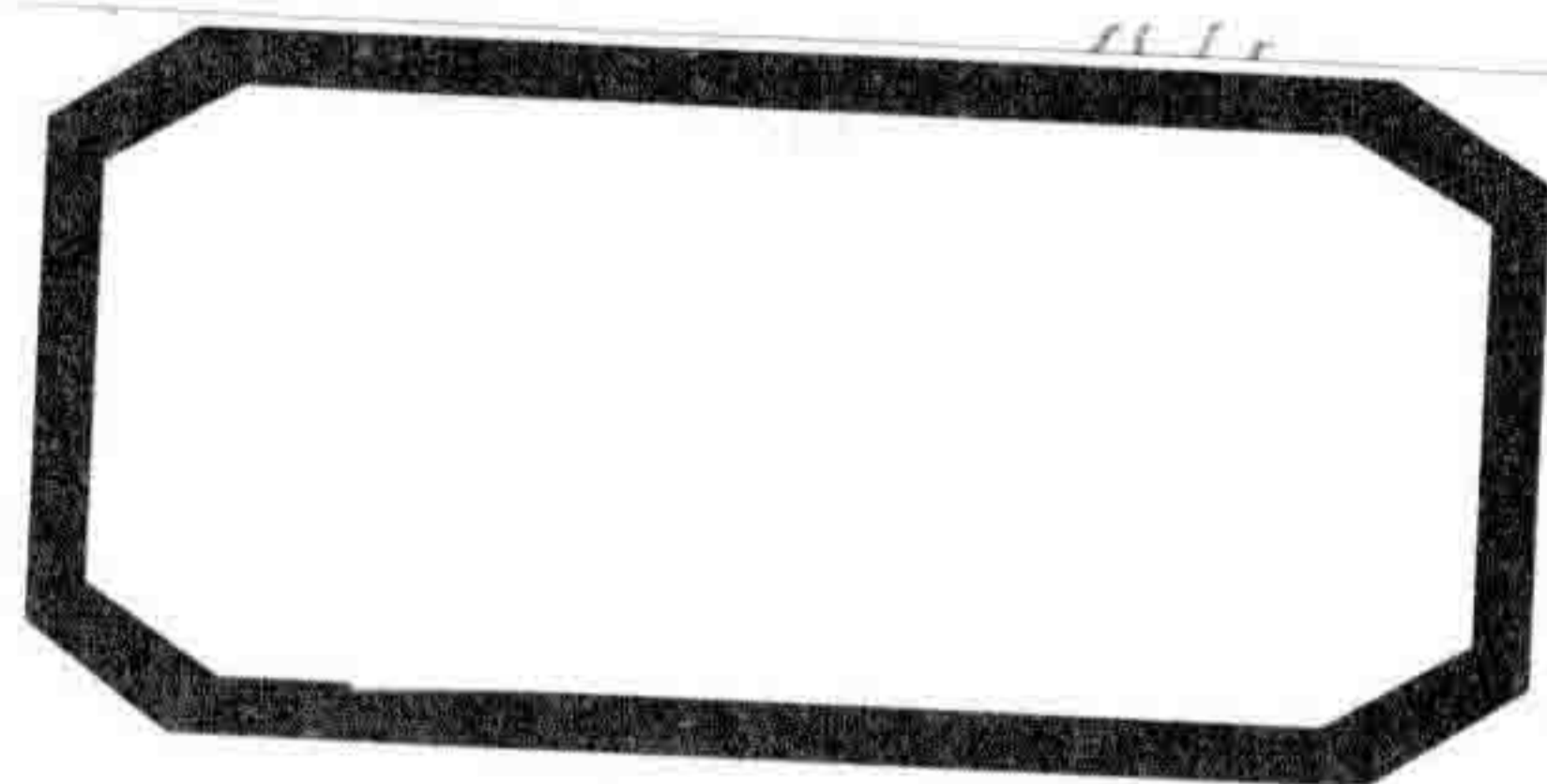
数学复习指导



中国政法大学出版社



2020 年李正元·范培华考研数学




数学

数学三

历年试题解析

主编 北 京 大 学 范培华
北 京 大 学 尤承业
北 京 大 学 李正元

 中国政法大学出版社

2019·北京

- 声 明**
1. 版权所有，侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题，由出版社负责退换。

图书在版编目 (C I P) 数据

2020 年李正元·范培华考研数学数学历年试题解析. 数学三/李正元, 尤承业, 范培华主编. —北京: 中国政法大学出版社, 2019. 1

ISBN 978-7-5620-8796-0

I. ①2… II. ①李… ②尤… ③范… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 013100 号

出版者	中国政法大学出版社
地 址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱 邮编 100088
网 址	http://www.cuplpress.com (网络实名: 中国政法大学出版社)
电 话	010-58908285 (总编室) 58908433 (编辑部) 58908334 (邮购部)
承 印	三河市燕山印刷有限公司
开 本	787mm × 1092mm 1/16
印 张	23.5
字 数	550 千字
版 次	2019 年 1 月第 1 版
印 次	2019 年 1 月第 1 次印刷
定 价	69.80 元

前 言

(一)

对于数学考试而言,试卷本身就是一份量表,它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。每一道试题,既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势,因此,对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌,便于广大考生了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,而且通过反复做历年试题,发现问题,找出差距,以便广大考生能及时查漏补缺,通过研究历年试题,也便于广大考生明确复习方向,从而从容应考,轻取高分。

(二)

本书汇集了2005年~2019年全国硕士研究生招生统考数学三试题,而且对所有试题均给出了详细解答,并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的,具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上,每题都给出了分析或评注,不仅对每题所考知识点或难点进行了分析,而且对各种题型的解法进行了归纳总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过具体试题,指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误,并点评错因,提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学三试题依据考试大纲的顺序,按试题考查内容分章,这样与考生复习数学的顺序保持一致,便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写:

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例,便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起,并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到:该内容考过什么样的题目,是从哪个角度来命制题的,并常与哪些知识点联系起来命题等等,从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度,并

在复习时能明确目标,做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起,能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系(类似或雷同),并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外,为了帮助考数学三的考生更全更好地了解相关内容的命题情况,本书精选了数学一、二及原数学四相关内容的典型考题(含解答),同时也精选了2001年(含)以前数学三相关内容的典型考题(含解答),供将要备考数学三的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧,并举例说明。

(三)

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时,应先看《数学考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的《**考研数学复习全书(数学三)**》,该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,与考研命题思路较吻合),复习完后,再来看本书的试题,以检验自己的水平。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错,可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍,直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利,考研成功!

编者

2019年1月

目 录

第一篇 2019 年考研数学三试题及答案与解析

2019 年考研数学三试题	(1)
2019 年考研数学三试题答案与解析	(3)

第二篇 2005 ~ 2018 年考研数学三试题

2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(14)
2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(17)
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(20)
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(24)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(28)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(32)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(36)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(40)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(44)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(48)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(53)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(57)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(61)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(65)

第三篇 2005 ~ 2018 年考研数学三试题分类解析

第一部分 微积分	(70)
第一章 函数 极限 连续	(70)
第二章 一元函数微分学	(96)
第三章 一元函数积分学	(137)

第四章	多元函数微积分学	(162)
第五章	无穷级数	(199)
第六章	常微分方程与差分方程	(219)
第二部分	线性代数	(232)
第一章	行列式	(232)
第二章	矩阵	(239)
第三章	向量	(250)
第四章	线性方程组	(264)
第五章	矩阵的特征值与特征向量 n 阶矩阵的相似与相似对角化	(279)
第六章	二次型	(294)
第三部分	概率论与数理统计	(306)
第一章	随机事件和概率	(306)
第二章	随机变量及其分布	(314)
第三章	多维随机变量的分布	(322)
第四章	随机变量的数字特征	(346)
第五章	大数定律和中心极限定理	(353)
第六章	数理统计的基本概念	(355)
第七章	参数估计	(360)

第一篇 2019 年考研数学三试题及答案与解析

2019 年考研数学三试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

- (1) 若 $x \rightarrow 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. 【 】
- (2) 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根,则 k 的取值范围是
(A) $(-\infty, -4)$. (B) $(4, +\infty)$.
(C) $\{-4, 4\}$. (D) $(-4, 4)$. 【 】
- (3) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$,则 a, b, c 依次为
(A) 1, 0, 1. (B) 1, 0, 2. (C) 2, 1, 3. (D) 2, 1, 4. 【 】
- (4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛,则
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 条件收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 绝对收敛.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 发散. 【 】
- (5) 设 A 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系只有 2 个向量,则 $r(A^*) =$
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】
- (6) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵,若 $A^2 + A = 2E$,且 $|A| = 4$,则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为
(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 【 】
- (7) 设 A, B 为随机事件,则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是
(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$. 【 】
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,则 $P\{|X - Y| < 1\}$
(A) 与 μ 无关,而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关,而与 σ^2 无关.
(C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关. 【 】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(\frac{-\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ 的拐点坐标为_____.

(11) 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx =$ _____.

(12) 以 P_A, P_B 分别表示 A, B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$, 则当 $P_A = 10, P_B = 20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格弹性 $\eta_{AA} (\eta_{AA} > 0)$ 为_____.

(13) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$. 若线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $a =$ _____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, EX 为 X 的数

学期望, 则 $P\{F(x) > EX - 1\} =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, 函数 $g(x, y) = xy - f(x+y, x-y)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

(18) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(19) (本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$

(I) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(20) (本题满分 11 分)

已知向量组

$$\text{I} : \alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$$

$$\text{II} : \beta_1 = (1, 1, a+3)^T, \beta_2 = (0, 2, 1-a)^T, \beta_3 = (1, 3, a^2+3)^T$$

若向量组 I 与向量组 II 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{矩阵 } A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \text{ 相似}$$

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p, P\{Y = 1\} = 1 - p (0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(III) X 与 Z 是否相互独立?

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A 的值;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.

2019 年考研数学三试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析一】 即求常数 $k > 0$ 使得极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^k}$ 存在且不为零.

由洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^k} \stackrel{k > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{kx^{k-1} \cos^2 x} = \begin{cases} \infty & (k > 3) \\ -\frac{1}{3} & (k = 3) \\ 0 & (0 < k < 3) \end{cases}$$

因此 $k = 3$. 选(C).

【分析二】 若熟知泰勒公式

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) (x \rightarrow 0)$$

则得
$$x - \tan x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) (x \rightarrow 0)$$

因此 $x \rightarrow 0$ 时 $x - \tan x$ 是 x 的 3 阶无穷小, 即 $k = 3$. 选(C).

(2)【分析】 设 $f(x) = x^5 - 5x + k$. 方程有三个实根等价于函数 $f(x)$ 有三个零点. 为此先求 $f(x)$ 的极值点.

$$f'(x) = 5x^4 - 5,$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm 1$.

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f''(-1) = -20 < 0,$$

故 $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

$$f''(1) = 20 > 0.$$

$x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

所以函数有三个零点, 必须其极大值 $f(-1)$ 大于零, 且极小值 $f(1)$ 小于零.

$$\text{即 } f(-1) = -1 + 5 + k = 4 + k > 0, \text{ 得 } k > -4,$$

$$f(1) = 1 - 5 + k = -4 + k < 0, \text{ 得 } k < 4.$$

故 k 的取值范围为 $(-4, 4)$, 应选 (D).

(3)【分析】 由二阶线性微分方程通解的结构知, $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$ 是原方程相应的齐次方程

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (*)$$

的通解, e^{-x}, xe^{-x} 是该方程的两个线性无关解, 该方程的特征根是 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (重根), 特征方程是

$$(\lambda + 1)^2 = 0, \text{ 即 } \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

而方程 (*) 的特征方程是

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

于是 $a = 2, b = 1$, 原方程为

$$y'' + 2y' + y = ce^x$$

再由通解的结构知, $y^* = e^x$ 是它的特解, 代入得

$$e^x + 2e^x + e^x = ce^x, c = 4.$$

$$\text{原方程为 } y'' + 2y' + y = 4e^x$$

因此选 (D).

(4)【分析】 由题设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = 0$, 根据收敛数列有界性, 定存在 $M > 0$, 使得

$$\left| \frac{v_n}{n} \right| \leq M.$$

$$\text{又 } |u_n v_n| = \left| nu_n \frac{v_n}{n} \right| \leq M |nu_n|.$$

由题设 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛, 故选 (B).

(5)【分析】 $AX = 0$ 的基础解系只包含 2 个解向量, 则 $4 - r(A) = 2, r(A) = 2$. 再根据 $r(A^*)$ 和 $r(A)$ 的关系得到 $r(A^*) = 0$.

选 (A).

(6)【分析】 条件 $A^2 + A = 2E$ 说明 A 的特征值都要满足 $x^2 + x = 2$, 因此只能是 1 或 -2, 又 $|A| = 4$ 说明 3 个特征值的乘积等于 4, 于是为 1, -2, -2, 从而 A 的正、负惯性指数分别是 1 和 2, 规范形 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

选 (C).

(7)【分析】 选项(A)是事件A与事件B互不相容的充要条件. 选项(B)是事件A与事件B相互独立的充要条件, 它们与事件A与B的概率是否相等没有关系. 对于(C)

$$\text{由 } P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB), P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$$

$$\text{可知 } P(A\bar{B}) = P(B\bar{A}) \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

故选(C).

(8)【分析】 由于X与Y相互独立且服从同一正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

$$X - Y \sim N(0, 2\sigma^2)$$

$$P\{|X - Y| < 1\} = P\left\{\left|\frac{X - Y}{\sqrt{2}\sigma}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1$$

所以此概率值与 σ^2 有关, 而与 μ 无关. 故选(A).

二、填空题

$$\begin{aligned} (9) \text{【分析】} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1)} \right]^{\frac{-n}{n+1}} = e^{-1} \end{aligned}$$

评注 也可用如下方法求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n+1} \right)} = e^{-1}.$$

其中用到了等价无穷小量因子替换, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1}$. 对于形如

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n+k} \right)^n$ 的极限, 应该能马上写出答案 e^a , 其中 k, a 为常数.

$$(10) \text{【分析】} \quad y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x = x \cos x - \sin x,$$

$$y'' = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x.$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 0, x = \pi, y(0) = 2, y(\pi) = -2.$$

在 $x = 0$ 的左右两侧, 均有 $y'' < 0$, 即 y'' 不变号, 所以 $(0, 2)$ 不是拐点.

在 $x = \pi$ 的左右两侧, y'' 改变符号, 故 $(\pi, -2)$ 是拐点.

评注 也可以用三阶导数来判定拐点, 即

$$y'''(\pi) = (-\sin x - x \cos x) \Big|_{x=\pi} \neq 0, \text{ 所以 } (\pi, -2) \text{ 是拐点.}$$

但 $y''(0) = 0, y'''(0) = 0$, 由此不能断定 $(0, 0)$ 是否拐点, 需进一步判断, 如用【分析】中的方法.

(11)【分析】 用分部积分法

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx^3 = \frac{1}{3} x^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 df(x)$$

$$\text{由于 } f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt, \text{ 可知 } f(1) = 0, df(x) = \sqrt{1+x^4} dx$$

$$\text{所以原式} = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 \sqrt{1+x^4} d(1+x^4)$$

$$= -\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} (1+x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{18} (1-2\sqrt{2}).$$

(12)【分析】 需求量 Q_A 对自身价格 P_A 的弹性 η_{AA} 为

$$\eta_{AA} = \frac{P_A}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial P_A}$$

当 $P_A = 10, P_B = 20$ 时, $Q_A = 500 - 100 - 200 + 800 = 1000$.

$$\frac{\partial Q_A}{\partial P_A} \Big|_{\substack{P_A=10 \\ P_B=20}} = (-2P_A - P_B) \Big|_{\substack{P_A=10 \\ P_B=20}} = -40,$$

因为 $\eta_{AA} > 0$, 所以

$$\eta_{AA} = \frac{P_A}{Q_n} \Big| \frac{\partial Q_A}{\partial P_A} \Big| = \frac{10}{1000} \times 40 = 0.4$$

(13)【分析】 $AX = \beta$ 有无穷多解, 则

$$r(A) = r(A | \beta) < 3$$

$$(A | \beta) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 & a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 \end{array} \right]$$

得 $a = 1$.

(14)【分析】 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} P\{F(x) > EX - 1\} &= P\left\{F(x) > \frac{1}{3}\right\} \\ &= P\left\{\frac{X^2}{4} > \frac{1}{3}\right\} = P\left\{X > \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{4} \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

三、解答题

(15)【分析与求解】 (1) 考察 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x \ln x} = e^0 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x + 1) = 1 = f(0)$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

(2) 求 $f'(x)$. 用求导法则分别求出 $x > 0$ 与 $x < 0$ 时的 $f'(x)$, 在连续的条件下再考察 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

$x > 0$ 时, $f'(x) = (e^{2x \ln x})' = 2e^{2x \ln x} (1 + \ln x)$

$$x < 0 \text{ 时, } f'(x) = (xe^x + 1)' = (x+1)e^x$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2e^{2x \ln x} (1 + \ln x) = -\infty$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导.

$$\text{因此 } f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(1 + \ln x), & x > 0 \\ (x+1)e^x, & x < 0. \end{cases}$$

(3) 求 $f(x)$ 的极值.

先求 $f(x)$ 的驻点.

$$x > 0 \text{ 时, } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$x < 0 \text{ 时, } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

\Rightarrow 共有两个驻点 $x = e^{-1}$ 与 $x = -1$.

进一步考察这两个驻点是否极值点.

$$f'(x) = 2e^{2x \ln x} (1 + \ln x) \begin{cases} < 0, & 0 < x < e^{-1} \\ = 0, & x = e^{-1}, \\ > 0, & x > e^{-1} \end{cases}$$

所以 $x = e^{-1}$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 取极小值 $f(e^{-1}) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

$$f'(x) = (x+1)e^x \begin{cases} < 0, & x < -1 \\ = 0, & x = -1 \\ > 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

所以 $x = -1$ 也是 $f(x)$ 的极小值点, 取极小值 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$.

还需考察 $f(x)$ 的唯一不可导点 $x = 0$ ($x = 0$ 是 $f(x)$ 的连续点), 易知

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & -1 < x < 0 \\ < 0, & 0 < x < e^{-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 取极大值 $f(0) = 1$.

评注 ① 用极值第一判别法则判别 $x = x_0$ 是否是 $f(x)$ 的极值点时, 要求 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 在 $x = x_0$ 两侧附近 $f'(x)$ 变号, 但不要求 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导.

② 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 又

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \begin{cases} A & \Rightarrow f'(x_0) = A \\ \infty & \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 不可导.} \end{cases}$$

当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 不 \exists , 也不为 ∞ 时, 由此不能判断 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的可导性, 往往要按定义求

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

③ 本题也可按定义证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = -\infty$$

$\Rightarrow f'_-(0)$ 不 $\exists \Rightarrow f'(0)$ 不 \exists .

(16)【分析与求解】 $\frac{\partial g}{\partial x} = y - f'_1 - f'_2$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -f''_{11} - f''_{12} - f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} - 2f''_{12} - f''_{22}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1 - f''_{11} + f''_{12} - f''_{21} + f''_{22} = 1 - f''_{11} + f''_{22}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x - f'_1 + f'_2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -f''_{11} + f''_{12} + f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} + 2f''_{12} - f''_{22}$$

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1 - 3f''_{11} - f''_{22}$.

(17)【分析与求解】 (I) 这是一阶线性微分方程

$$y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$$

两边乘 $\mu(x) = e^{\int -x dx} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 得

$$(ye^{-\frac{1}{2}x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

积分得 $ye^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{x} + c, y = (\sqrt{x} + c)e^{\frac{1}{2}x^2}$

由 $y(1) = \sqrt{e}$, 得

$$\sqrt{e} = (1 + c)\sqrt{e}, c = 0$$

因此 $y(x) = \sqrt{x}e^{\frac{1}{2}x^2}$.

(II) 按旋转体的体积公式, D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 y^2(x) dx = \pi \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^2 e^{x^2} dx^2 \\ &= \frac{\pi}{2} e^{x^2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} (e^4 - e) \end{aligned}$$

(18)【分析与求解】 因 $\sin x$ 是变号的, 所以该图形的面积

$$S = \int_0^{+\infty} e^x |\sin x| dx$$

$\sin x > 0 (2n\pi < x < (2n+1)\pi), \sin x < 0 ((2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi) n = 0, 1, 2, 3, \dots$

由于该积分收敛

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-x} \sin x dx \right]$$

先算出 $\int e^{-x} \sin x dx = -\int \sin x de^{-x} = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx$

$$= -e^{-x} \sin x - \int \cos x de^{-x} = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + c$$

$$\Rightarrow \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} [e^{-(k+1)\pi} (-1)^{k+1} - e^{-k\pi} (-1)^k]$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^k e^{-k\pi}(1 + e^{-\pi})$$

$$\Rightarrow \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} e^{-2n\pi} (1 + e^{-\pi})$$

$$\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^x \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-(2n+1)\pi} (1 + e^{-\pi})$$

代入得

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-2n\pi} + e^{-(2n+1)\pi}] (1 + e^{-\pi})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} (1 + e^{-\pi}) = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}$$

(19)【分析与求解】

(I) 已知 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \frac{(n-1)!!}{n!!} I^*$, 其中 $I^* = \begin{cases} 1 & (n \text{ 为奇数}) \\ \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$

$$a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x = \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt = I_n - I_{n+2} \text{ (这里 } n \text{ 与 } n+2 \text{ 有相同的奇偶性)}$$

$$I_{n+2} = \frac{(n+1)!!}{(n+2)!!} I^* = \frac{(n+1)(n-1)!!}{(n+2)n!!} I^* = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

代入上式得 $a_n = \left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) I_n = \frac{1}{n+2} I_n$

又 $a_{n-2} = I_{n-2} - I_n = \frac{n}{n-1} I_n - I_n = \left(\frac{n}{n-1} - 1\right) I_n = \frac{1}{n-1} I_n$

综上, $\frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{n-1}{n+2}$ 即 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$.

易证 $\{a_n\}$ 单调减少: 显然

$$x^{n+1} < x^n (x \in (0, 1))$$

$$x^{n+1} \sqrt{1-x^2} < x^n \sqrt{1-x^2} (x \in (0, 1))$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x^2} dx < \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = a_n$$

即 $\{a_n\}$ 单调减少.

(II) 由题(I)得 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} > \frac{n-1}{n+2} a_{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 (n \geq 2)$$

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

及夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$

(20)【分析与求解】 I 和 II 等价的充分必要条件是 $r(I) = r(II) = r(I, II)$.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2 + 3 & a + 3 & 1 - a & a^2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 & 1 - a & a^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a+2 & 1-a & a^2+3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1-a & a^2-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix}$$

于是,只要 $a \neq -1$, I 和 II 都等价:如果还有 $a \neq 1$,就有 $a^2 \neq 1$,则 $r(I) = r(II) = r(I, II) = 3$;如果 $a = 1$,则 $r(I) = r(II) = r(I, II) = 2$.

β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的表示系数就是方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_3$ 的解.

$a^2 \neq 1$ 时 $r(I) = 3$,这个方程组唯一解, β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的方式唯一, $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

$a = 1$ 时, $r(I) = 2$,这个方程组无穷多解, β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的形式也是无穷多.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_3$ 的通解为

$$(3, -2, 0)^T + c(-2, 1, 1)^T, c \text{ 任意.}$$

则 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的一般形式为

$$\beta_3 = (3 - 2c)\alpha_1 + (c - 2)\alpha_2 + c\alpha_3, c \text{ 任意.}$$

(21)【分析与求解】 (I) A 与 B 相似,则 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$,得 $x - 4 = y + 1$;

$$|A| = |B|, \text{得 } 4(x - 2) = -2y$$

解得 $x = 3, y = -2$.

$$(II) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

它们的特征值都是 $2, -1, -2$.

依次对特征值 $2, -1, -2$ 求出 A 的一个相应的特征向量 $(1, -2, 0)^T, (2, -1, 0)^T$ 和 $(1, -2, -4)^T$.

构造可逆矩阵

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{则 } P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

依次对特征值 $2, -1, -2$ 求出 B 的一个相应的特征向量 $(1, 0, 0)^T, (-1, 3, 0)^T$ 和 $(0, 0, 1)^T$.

构造可逆矩阵

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{则 } P_2^{-1}BP_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

令 $P = P_1P_2^{-1}$, 则 $P^{-1}AP = B$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$