普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学观点下的中学数学

李三平　陈　夏　主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学观点下的中学数学

李三平　陈　夏　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书旨在解决如何在高等数学观点的指导下，加强高等数学与中学数学的联系. 一是将高等数学的知识、思想、观点和方法渗透到中学数学教学中去； 二是揭示中学数学内容中某些不容易解释的问题的高等数学背景；三是通过具体材料或实例展示高等数学对中学数学的指导作用. 全书共8章，每章末附有思考题，书后附有参考答案.

本书可作为高等师范院校(数学)课程与教学论研究生或高年级本科生的教材，也可作为数学教师培训和相关教研人员的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学观点下的中学数学/李三平，陈夏主编. —北京：科学出版社，2019.8

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-058780-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②陈… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第209271号

责任编辑：王胡权 孙翠勤／责任校对：郑金红
责任印制：张 伟／封面设计：谜底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019年8月第 一 版 开本：720×1000 B5
2019年8月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：318 000

定价：49.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随着我国基础教育数学课程改革进入纵深阶段, 数学教育理论工作者和第一线的教学实践者面临着诸多挑战. 如何在数学教育实践中落实新课程的改革理念, 已成为我国数学课程改革和数学教学领域许多问题中的焦点问题.

始于 2001 年的基础教育课程改革, 在课程理念、课程目标、课程结构、课程内容和课程评价等方面都与原来的教学大纲有诸多不同, 尤其在课程理念和课程内容等方面, 对必修课程和选修课程都进行了不同程度的调整, 在选修课程中增加或涉及了一些当代数学的前沿课题. 这不仅对现在从事数学教学的教师的 PCK(学科教学知识) 中的学科知识提出了新的要求, 而且对即将走上教学岗位的师范大学本科生及研究生毕业生更是提出了同样的高要求, 特别是针对学科核心素养方面的要求. 在《普通高中数学课程标准 (2017 年版)》中对此也进行了强调.

编写本书的主要目的, 就是想要帮助高等师范院校数学专业的同学们, 掌握如何在高等数学观点的指导下, 加强其与中学数学联系的方法. 即解决如何利用高等数学的观点来指导中学数学教与学的问题.

具体地有以下三个方面:

(1) 如何将高等数学的知识、思想、观点和方法渗透到中学数学教学与研究中去;

(2) 揭示中学数学内容中某些不容易解释和处理的问题的高等数学背景;

(3) 通过具体材料或实例展示高等数学对中学数学的指导意义.

本书共有八章内容, 内容包含绪论、集合论观点下的中学数学、数学分析观点下的中学数学、代数学观点下的中学数学、几何学观点下的中学数学、数理逻辑观点下的中学简易逻辑、组合数学观点下的中学数学、概率统计观点下的中学数学.

本书编写分工如下: 第 1、第 4、第 6 章由李三平 (陕西师范大学) 编写, 第 2 章由仝玉强 (西北工业大学附属中学) 编写, 第 3 章由权大学 (安康学院)、李磊 (西安武装警察大学)、李巧文 (西安科技大学) 编写, 第 5 章由戴时勋 (陕西师范大学) 编写, 第 7 章由文锐 (陕西师范大学)、李磊编写, 第 8 章由陈夏 (陕西师范大学) 编写. 研究生郭梦敏作了大量的文字修订工作, 廖渝梅对许多图形进行了修改. 郑海峰、刘君君和朱瑶对部分思考题进行了分析和解答. 最后由李三平、陈夏统稿, 并校订了思考题参考答案.

本书的出版得到了陕西师范大学出版基金和陕西师范大学研究生院研究生优质课程建设项目 (GERP-15-40) 的资助, 在此我们深表谢意.

陕西师范大学数学与信息科学学院院长吉国兴教授在本书编写过程中给予了我们特别的支持和帮助; 陕西师范大学罗增儒教授对本书的编写提出了许多宝贵的意见和建议, 正是在罗教授的支持和鼓励下, 本书才得以最后定稿; 科学出版社王胡权副编审及其同事们为本书的出版付出了大量心血; 在此我们对他们表示衷心的感谢!

本书在编写过程中, 参考了大量文献, 其中有些未一一列出, 在此对所有文献作者表示感谢!

对于书中的不足与疏漏之处, 敬请广大读者批评指正.

李三平
2019 年 5 月
陕西师范大学

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　引　　言

高等师范院校数学学院 (以前多称 “数学系”) 开设了门类众多的高等数学类课程, 例如, 数学分析、高等代数、空间解析几何、高等几何、微分几何、近世代数、复变函数、实变函数、概率统计、拓扑学、常微分方程、偏微分方程、计算方法等 (为方便起见, 本书称在高等师范院校数学学院学习过的所有数学类课程都为 “高等数学”). 这大概有两个方面的考虑: 一方面是使将要走上中学数学教学岗位的毕业生具有一定的数学基础, 有助于他们承担中学数学教学、研究的任务以及继续学习和掌握现代数学知识, 以便提高自身的数学修养; 另一方面是使毕业生能利用在高等师范院校学到的高等数学知识, 指导其将来在中学数学的教学和研究工作, 使他们能 “居高等数学之高” 去临 “中学数学之下”. 那么, 实际的情况又是如何呢?

据问卷调查和一些访谈得知, 大多数在中学数学教学岗位上工作的高等师范院校本科及硕士研究生毕业生的体会是: 在自己的中学数学教学过程中, 大学里所学习的高等数学类知识几乎没有很好地发挥作用; 还有的甚至说: 在中学任教多年, 很少用到高等数学知识, 把在大学学习过的高等数学知识几乎都 “还给” 了大学老师; 等等. 只有少数人体会到, 在中学数学教学中, 虽然高等数学知识直接涉及的并不多 (有些内容被直接涉及, 比如, 微积分、概率统计、算法、向量等), 但其原理、思想、观点和方法却时常在发挥着作用, 特别是那些从事中学数学教学研究和进行初等数学教学研究的中学教师 (这只是极少的一部分人) 认为, 在他们的教学和研究工作中, 高等数学的知识、原理、思想、观点和方法所发挥的作用是十分明显的.

造成上述情况的原因是多种多样的.

第一, 我们常可见到的现象是, 学生身陷数学的套题、技巧之中, 奔命于作业、考试之间, 教师更是疲于应付, 只能将教学研究, 科学研究放在相对次要的位置, 就更少考虑建立中学数学与高等数学的知识、思想、观点和方法之间的联系了.

第二, 在我国高等师范院校中, 无论是中文、历史、地理, 还是物理、化学、生物等各专业, 所开设的专业课程, 都是中学相应课程内容的加深、拓广, 是在中学所学内容基础上的进一步延伸, 而数学学院的课程设置则好像是个例外, 除了微积分, 大学数学系所开设的高等数学课程, 与中学数学的研究对象、研究方法都存在较大的不同, 中学数学到大学数学, 其知识几乎是直线式, 而非螺旋式上升的. 在高师院校数学学院的大部分课程中, 几乎看不到与中学数学的直接联系, 因而, 学生便很

难获得用高等数学的高观点指导中学数学的真实体验.

第三, 高等师范院校数学专业的课程教学也存在着一些不足, 这一点是不可否认的. 著名数学家、数学教育家、华东师范大学张奠宙教授曾指出, "我们在高师院校执教多年, 深感居高未必能自然地临下. 在大学课程中, 只管讲学科知识本身, 联系中学实际的任务往往视为累赘, 忽略不讲, 举个例子, 讲实变函数论, 大谈勒贝格 (Lebesgue, 1875~1941) 测度、勒贝格积分, 却不屑于谈谈测度与面积、体积之间的内在联系. 对于中学教师来说, 也许后者是至关重要的. "

对此, 我们也有同感, 可看看一个具体的例子.

在大学抽象代数中学习 "欧氏环" 这一内容, 它是解释中学代数中 "多项式因式分解" 等有关问题的理论基础, 但并不是每个学习过这一内容的人都能用它准确地解释如下几个与多项式因式分解有关的问题.

(1) 是不是每个多项式都能进行因式分解?

(2) 因式分解需要分解到什么程度?

(3) 因式分解的结果是否唯一?

(4) 多项式的因式分解与整数的素因数分解是什么关系?

我们知道, 中学数学教材的叙述, 较多地采用了描述性的方法, 理论上的要求不可能十分严谨, 内容的深度与广度都有一定的局限性. 根据中学数学的教学目标和中学生的年龄特征等情况, 这样的处理方法应该说是合情合理的. 但是, 作为一名中学数学教师, 仅仅具备新课程教材中所涉及的必修课内容及一些选修内容的知识, 那是远远不够的. 即便是在现行中学数学教材中的知识内容范围内, 有些问题如果不在高等数学的知识背景下来解释和阐释, 仍将可能是含糊不清, 疑问重重.

1.2　几 个 例 子

下面再通过几个具体例子来说明.

例 1　两个复数为什么不能比较大小? 复数集中的元素是否 "有序"?

在高中数学教材中对这个问题是有说明的, 然而是一笔带过, 即 "两个复数只能说明相等或不等, 而不能比较大小", 为什么不能比较大小? 其实许多中学教师并不一定能准确解释其原因.

另外, 人们通常认为, 只有在 "大小" 的意义下, 才能排出 "顺序". 但是, 通过学习高等数学, 这种认识是应当改变的, "序" 的概念应当有所扩展. 事实上, 在 "字典序" 的意义下, 复数集是 "有序集". 当然, 尽管有序, 但两个复数之间仍不能比较大小 (这些我们会在后面的章节中详细叙述).

例 2　一元 n 次方程是否都存在公式解 (或根号解)?

在初中数学教材中，大家就学习过求解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的问题，其求根公式为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，想必大家都非常熟悉. 这个解就称为公式解 (或根号解).

对于一元三次方程 $x^3+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的求根公式，在高师院校数学系有关的课程中也进行过讨论，即卡尔丹公式 (Cardan, 1501~1576). 如果是一个一般形式的一元三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$，可以通过方程的变换 $x=z-\dfrac{a}{3}$，很容易地转化为上述形式，所以，我们也说，$x^3+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 可以看成是一元三次方程的一般形式，相应地也有公式解 (或根号解).

对于一元四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$，尽管讨论的不多，但是它也像一元二次、一元三次方程一样，有公式解 (或根号解).

一元三次、一元四次方程的公式解得到后，一元五次及五次以上方程的公式解以及解法就成了许多数学家关注的问题. 为了求解一般的一元五次方程，众多著名数学家耗去了大量的时间和精力. 直到 1830 年，年仅 19 岁的法国数学家伽罗瓦 (Galois, 1811~1832) 在一篇《用根式解方程的可能性条件》的文章里，利用置换群的理论彻底阐明了一元多项式方程能否用代数方法求解 (也就是一元多项式方程是否存在公式解或根号解) 的问题. 他得到了如下的结论：一元五次及五次以上的多项式方程不能用根号求解.

这样一个看似好像不太难的问题，然而，解决它所依据的伽罗瓦理论到现在看起来也并不是很容易.

下面是一个很常见的不等式的证明题.

例 3 已知 x,y,z 为实数，且 $x+y+z=1$，试证

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

这个题目的证明方法有很多种，我们可以使用基本不等式、柯西不等式、变量替换法等来证明.

证法 1 将已知条件两边平方得

$$\begin{aligned}1&=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\&\leqslant 3(x^2+y^2+z^2),\end{aligned}$$

因此，

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

证法 2 (利用基本不等式) 因为

$$x^2+\frac{1}{9}\geqslant\frac{2}{3}x,$$

$$y^2+\frac{1}{9}\geqslant\frac{2}{3}y,$$
$$z^2+\frac{1}{9}\geqslant\frac{2}{3}z,$$

将以上三个式子左右两端分别相加, 并利用已知条件, 得

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

证法 3 (利用柯西不等式) 因为

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(x+y+z)^2=1,$$

所以

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

证法 4 (利用变量替换的方法) 设

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}+r, \\ y=\dfrac{1}{3}+s, \qquad r,s,t \text{ 都是实数, 且 } r+s+t=0, \\ z=\dfrac{1}{3}+t, \end{cases}$$

于是,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(r+s+t)+(r^2+s^2+t^2) \\ &=\frac{1}{3}+(r^2+s^2+t^2)\geqslant\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

在这里再给出一个在前些年很流行、看似正确的证明方法, 它和证法 4 类似, 也是变量替换的方法, 但实际上是不正确的证法. 请大家仔细分析以下这个证明的错误所在.

证明 设

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}-t, \\ y=\dfrac{1}{3}-2t, \qquad (t\in\mathbf{R} \text{ 为参数}), \\ z=\dfrac{1}{3}+3t \end{cases} \tag{A}$$

则

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+14t^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

这个证法是错误的, 可以下面的两种方式来解释.

第一, $x+y+z=1$ 的变量的自由度是 2, 而作了替换后的 (A) 中变量的自由度却变成了 1, 实际上改变了原来的问题.

第二, $x+y+z=1$ 是一个平面方程, 而 (A) 是一条直线的方程, 这显然是犯了偷换命题的错误.

可以看出, 如果不具备高等数学的知识, 想要指出 "错证" 的错误所在都是不容易的. 我们说, 要使用变量替换的方法来证明不等式, 至少要保证替换前后的等价性, 当然, 变量替换后可以是一个更强的结果.

例 4 如图 1-1, 已知 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的中点, G 是 AD 上的任一点, 连接 BG 并延长交 AC 于 E, 连 CG 并延长交 AB 于 F, 求证 $FE//BC$.

这个题目的证明并不难, 可采用许多初等几何添加辅助线的方法或采用梅内劳斯定理来直接证明 (这里略去).

这里要提出的问题是, 如果将 $\triangle ABC$ 看成一个正三角形 $\triangle A'B'C'$, 如图 1-2, 并且在正三角形 $\triangle A'B'C'$ 中证明了 $F'E'//B'C'$, 进而我们就说证明了原来的问题: 即, $FE//BC$?

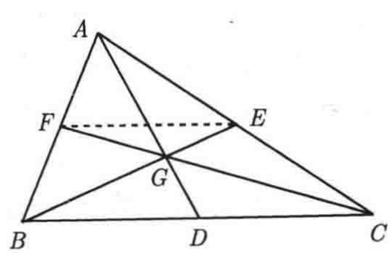

图 1-1

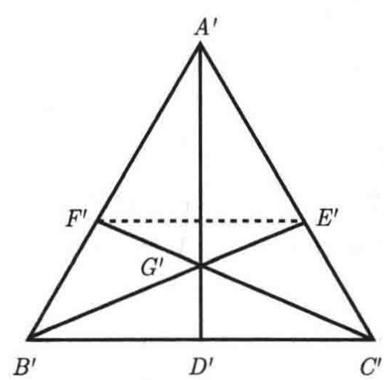

图 1-2

这个过程相当于把 $\triangle ABC$ 看成了正三角形来证明需要的结论, 好像是把一般问题特殊化了 (这也是在中学数学课堂上老师特别要同学们注意的一个问题), 这样做是否可以呢? (我们将在第 5 章讨论.)

1.3 《新课标》的要求

上述的几个例子说明, 在中学数学课程教学中的确存在着类似的问题, 用中学数学的思想、观点和方法不易解决, 它们可能涉及了高等数学的思想、观点和方法, 这些都需要同学们一要具备善于发现这类问题的 "慧眼", 二要具备解决这类问题

的意识和想法. 这两个方面其实都在《普通高中数学课程标准 (2017 年版)》(以下简称《新课标》) 有所强调, 通过高中数学课程的学习, 与要培养学生的数学核心素养的问题有关, 我们先来看看《新课标》中的有关论述.

《新课标》指出, 高中数学课程的目标是, 通过高中数学课程的学习, 学生能获得进一步学习以及未来发展必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验 (简称 "四基"); 提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力 (简称 "四能"). 它同时还指出, 在学习数学和应用数学的过程中, 学生能发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等数学学科核心素养.

根据上述的课程目标, 通过国际比较, 以及剖析我国数学教育发展的历史与现状, 从时代需要、国民素质、个性发展、全球意识等各方面综合思考, 形成了实施和落实新课程标准的基本理念: ①学生发展为本, "立德树人", 提升素养; ②优化课程结构, 突出主线, 精选内容; ③把握数学本质, 启发思考, 改进教学; ④重视过程评价, 突出素养, 提高质量.

值得注意的是,《新课标》特别强调在高中数学课程教学中培养学生数学核心素养的重要性. 它还指出, 学科核心素养是育人价值的集中体现, 是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观念、必备品格和关键能力. 数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现, 是具有数学基本特征的思想品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现, 是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的.《新课标》规定, 数学学科核心素养包括: 数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析. 这些数学学科核心素养既相对独立, 又相互交融, 是一个有机的整体.

为了在高中阶段完成培养学生数学核心素养的任务, 并且实现高中数学课程目标,《新课标》在课程结构设计依据的基础上, 把高中数学课程确定为必修课程、选择性必修课程和选修课程.

必修课程为学生发展提供共同基础, 是高中毕业的数学学业水平考试的内容要求, 也是高考的内容要求, 包括五个主题.

主题一 **预备知识**: 集合; 常用逻辑用语; 相等关系与不等关系; 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式.

主题二 **函数**: 函数概念与性质; 幂函数、指数函数、对数函数; 三角函数; 函数应用.

主题三 **几何与代数**: 平面向量及应用; 复数; 立体几何初步.

主题四 **概率与统计**: 概率; 统计.

主题五 **数学建模活动与数学探究活动**: 数学建模活动与数学探究活动.

选择性必修课程是供学生选择的课程, 也是高考的内容要求, 包括四个主题.

主题一 **函数**: 数列; 一元函数导数及其应用.

主题二 **几何与代数**: 空间向量与立体几何; 平面解析几何.

主题三 **概率与统计**: 计数原理; 概率; 统计.

主题四 **数学建模活动与数学探究活动**: 数学建模活动与数学探究活动.

选修课程为学生确定发展方向提供引导, 为学生展示数学才能提供平台, 为学生发展数学兴趣提供选择, 为大学自主招生提供参考. 选修课程是由学校根据自身情况选择设置的课程, 供学生依据个人志趣自主选择, 分为 A、B、C、D、E 五类.

A 类课程是供有志于学习数理类 (如数学、物理、计算机、精密仪器等) 学生选择的课程.

B 类课程是供有志于学习经济、社会类 (如数理经济、社会学等) 和部分理工类 (如化学、生物、机械等) 学生选择的课程.

C 类课程是供有志于学习人文类 (如语言、历史等) 学生选择的课程.

D 类课程是供有志于学习体育、艺术 (包括音乐、美术) 类学生选择的课程.

E 类课程包括拓展视野、日常生活、地方特色的数学课程, 还包括大学数学的先修课程等. 大学数学的先修课程包括: 微积分、解析几何与线性代数、概率论与数理统计.

从《新课标》给出的课程框架可以看出, 该课程框架与原来的教学大纲及《普通高中数学课程标准 (实验稿)》的要求有很大的不同, 必修课程与选修课程都进行了不同程度的调整.

我们认为, 这一方面是对高师院校数学学院的课程设置提出了新的和更高的要求, 即在注重师范性的前提下, 要体现课程基础性与先进性的统一 (对那些不能舍弃的经典数学内容尽可能地用现代数学的观点与语言来统领; 在教材中尽可能编入已经构成相应学科基础部分的现代数学内容, 至少应进行通俗介绍), 要体现均衡性与选择性的统一 (使高师院校数学系的基础课和选修课保持一种恰当、合理的比重, 并适应学生个性发展的要求), 还要体现发展性 (着眼于学生的未来发展, 培养终身学习的愿望和能力). 另一方面, 要求高等师范院校数学学院的学生注重自身思想素质、文化素质、专业素质与获取新知识能力的培养, 以高师院校学到的数学知识为基础, 不断接受和学习新的数学知识. 只有这样, 才能使高等师范院校数学学院的毕业生的专业化迅速成长, 并能成为适应中学数学课程教学的合格师资, 成为基础教育课程改革的中坚力量.

编写本书的主要目的, 就是想要帮助高等师范院校数学系的本科生和研究生, 如何在高等数学观点的指导下, 加强其与中学数学的联系. 即解决如何利用高等数学的高观点来指导中学数学教与学的问题. 具体地有以下三个方面.

(1) 如何将高等数学的知识思想、观点和方法渗透到中学数学教学与研究中去;

(2) 揭示中学数学内容中某些不容易解释和处理的问题的高等数学背景;