陈文灯 黄先开 朱庆宇◎主编

2020 考研数学复习指南

（数学三）课后习题答案详解

网络增值版

本书使用说明

名师点题答疑

哪里不会扫哪里	重难点视频讲解 下载慧升考研APP 扫描书中二维码
超级服务	使用陈文灯考研数学图书可获免费网络答疑服务
超值赠送	《课后习题答案详解》便携本

文登考研网址：www.wendeng.com.cn
增值服务网址：www.hskaoyan.com

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

2020 考研数学复习指南
（数学三）

课后习题答案详解

陈文灯　黄先开　朱庆宇　主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

目 录

第一篇　微积分

第一章　函数、极限和连续

习题一

1. 填空题

(1)【解】可得 $e^a = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax} = \int_{-\infty}^{a} te^t\,dt = (te^t - e^t)\Big|_{-\infty}^{a} = ae^a - e^a$，所以 $a = 2$.

(2)【解】$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+n} < \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i} < \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+1}$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n} = \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{2}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

(3)【解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = c \neq 0$，所以 $b = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2} \xlongequal{a=1} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} = c \neq 0.$$ 即 $a = 1, b = 0, c = \dfrac{1}{2}$.

(4)【解】$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h} = -\dfrac{1}{2}f'(3) = -1$.

(5)【解】$f[f(x)] = 1$.

(6)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = 2.$$

(7)【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+a\cos x}{1} = f'(0)+a = b+a = A$.

(8)【解】$0 \neq k = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \frac{1+ax}{1+bx}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x+bxe^x)-1-ax}{x^3(1+bx)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+bxe^x-1-ax}{x^3}$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+bxe^x+be^x-a}{3x^2} \xlongequal{b+1=a} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2be^x+bxe^x}{6x}.$$

所以 $2b+1 = 0, b = -\dfrac{1}{2}, a = \dfrac{1}{2}$.

(9)【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

(10)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{kn^{k-1}+\cdots}=A$,

所以 $k-1=1990, k=1991$; $\dfrac{1}{k}=A, A=\dfrac{1}{1991}$.

2. 选择题

(1)【解】令 $f(x)=1,\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$,则 $\varphi[f(x)]=1, f[\varphi(x)]=1$,排除 A,C. 令

$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ -1 & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$,$[\varphi(x)]^2=1$,排除 B,D. 若 $g(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $(-\infty+\infty)$ 内连续,则 $\varphi(x)=g(x)f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,矛盾. 所以 D 是答案.

(2)【解】B 是答案.

(3)【解】$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,故选 D.

(4)【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x}=0=f(0)=a$,故选 A.

(5)【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times2^2}+\dfrac{5}{2^2\times3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=1$,故选 B.

(6)【解】$8=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^5x^{100}+\cdots}{x^{100}+\cdots}=a^5, a=\sqrt[5]{8}$,故选 C.

(7)【解】C 为答案.

(8)【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2^x\ln2+3^x\ln3)=\ln2+\ln3=\ln6\neq1$. 故选 B.

(9)【解】$\lim\limits_{x\to0}(1+x)(1+2x)(1+3x)+a=0, 1+a=0, a=-1$,故选 A.

(10)【解】$2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{a}{\cos^2x}+b\sin x}{\dfrac{-2c}{1-2x}+2xde^{-x^2}}=-\dfrac{a}{2c}$,

所以 $a=-4c$,故选 D.

3. 计算题

(1)①【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e$.

②【解】$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x-\sin x}{1}}=e^2$.

③【解】令 $y=\dfrac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to0}(\sin2y+\cos y)^{\frac{1}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(\sin2y+\cos y)}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{2\cos y-\sin y}{\sin2y+\cos y}}=e^2.$$

④【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(2)①【解】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{3x-1})}{\arcsin2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

②【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(x^2+1)\cos^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos^2 x + 2(x^2+1)\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos^2 x+\sin 2x}{4x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos^2 x + 4x\cos x\sin x + 2\cos 2x}{12x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos^2 x + 2\cos 2x}{12x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\cos x\sin x - 4\sin 2x}{24x} + \frac{5}{6}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{24x} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

③【解】$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x\cdot\sqrt{1-x^2})}{\tan x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x\cdot\sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cos x}\left(\sqrt{1-x^2}\sin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos x\right)}{2x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2x\cos x} + \frac{1}{2(1-x^2)}\right) = -1.$$

(3)①【解】$\lim_{n\to\infty} n\left[e^2 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{e^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\frac{1}{n}} \xlongequal{\text{令} x=\frac{1}{n}} \lim_{x\to 0}\frac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(1+x)^{\frac{2}{x}}\ln(1+x)}{x^2} \xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim_{n\to\infty}\frac{2(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x} = \infty$$

②【解】$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln\sqrt[n]{n}} \xlongequal{\text{令}\sqrt[n]{n}=x} \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1} x = 1.$

③【解】$\lim_{n\to\infty}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]\cdot\frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\left((n-1)x + \frac{1+1+\cdots+(n-1)}{n}a\right)\frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}a = x + \frac{1}{2}a.$

④【解】$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}\right]$

$\forall i<j, \frac{1}{1+\frac{1}{n^i}} < \frac{1}{1+\frac{1}{n^j}}$，从而$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^i}\right)^{\frac{1}{i}}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^j}\right)^{\frac{1}{i}}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^j}\right)^{\frac{1}{j}}}$，

因此$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}\right] > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$，所以$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right) = 1.$

⑤【解】$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}} = \begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

⑥【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \xlongequal{x=1/n,c=b/a} a\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1+c^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= ae^{\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1+c^x}{2}-1)\frac{1}{x}} = ae^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+c^x-2}{2x}} = ae^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{c^x\ln c}{2}} = ae^{\frac{\ln c}{2}} = a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}.$$

4.【解】$f'(0^+) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt - x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2 - 1}{2x} = \lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{2x} = 0.$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x - 2x}{3x^2} = \lim_{x\to0^-}\frac{\cos x - 1}{3x} = \lim_{x\to0^-} -\frac{\sin x}{3} = 0.$$

所以，$f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

5. 求下列函数的间断点并判别类型

①【解】$f(0^+) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = 1$，$f(0^-) = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = -1$，

所以 $x=0$ 为第一类间断点.

②【解】$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x = \begin{cases}-x, & |x|\geqslant 1\\ x, & |x|<1\end{cases}$.

显然，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$，所以，$x=1$，$x=-1$ 为第一类间断点.

③【解】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x) = -\sin1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$. 所以 $x=0$ 为第一类跳跃间断点；

$\lim\limits_{x\to1}f(x) = \lim\limits_{x\to1}\sin\frac{1}{x^2-1}$ 不存在. 所以 $x=1$ 为第二类间断点；

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$不存在，而 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{x(2x+\pi)}{2\cos x} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{4x+\pi}{-2\sin x} = -\frac{\pi}{2}$，所以 $x=-\frac{\pi}{2}$ 为第一类可去间断点；

$\lim\limits_{x\to-k\pi-\frac{\pi}{2}}\frac{x(2x+\pi)}{2\cos x} = \infty$，$(k=1,2,\cdots)$ 所以 $x=-k\pi-\frac{\pi}{2}$ 为第二类无穷间断点.

6.【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right) = \lim\limits_{x\to0}\frac{ax^3+x+b\int_0^x e^{-t^2}\,dt}{x^5}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4} \xlongequal{\text{分子极限为 0，所以 } b=-1} \lim_{x\to0}\frac{3ax^2+1-e^{-x^2}}{5x^4}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{6ax+2xe^{-x^2}}{20x^3} = \lim_{x\to0}\frac{3a+xe^{-x^2}}{10x^2}$$

$$\xlongequal{\text{分子极限为 0，所以 } a=-\frac{1}{3}} \lim_{x\to0}\frac{-2xe^{-x^2}}{20x} = -\frac{1}{10}.$$

7.【解】由于 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，

因此$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$ 存在. 所以

$\lim\limits_{x\to0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)]=0$. 即

$$0 = \lim_{x\to0}\frac{1+\sin x+\sin^2 x-(\alpha+\beta\sin x)^2}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(\alpha+\beta\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(1-\alpha^2)+(1-2\alpha\beta)\sin x+(1-\beta^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(\alpha+\beta\sin x)} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha} = 1-\alpha,$$

所以 $\alpha = 1$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-2\beta)+(1-\beta^2)\sin x}{\sin x\cdot(\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(1+\beta\sin x))}.$$

若上式极限存在,必须分子为 0,即 $1-2\beta=0,\beta=\frac{1}{2}$.

8.【解】因为极限存在,从而 $a=\frac{1}{5}$.

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^{\frac{1}{5}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{令 y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{(1+7y+2y^5)^{\frac{1}{5}}-1}{y}$

$$=\lim_{y\to0}\frac{1}{5}(1+7y+2y^5)^{-\frac{4}{5}}(7+10y^4)=\frac{7}{5}.\text{所以 } b=\frac{7}{5}.$$

9.【解】当 $\alpha\leqslant0$ 时,$\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^\alpha\sin\frac{1}{x}\right)$ 不存在,所以 $x=0$ 为第二类间断点;

当 $\alpha>0$ 时,$\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^\alpha\sin\frac{1}{x}\right)=0$,所以 $\beta=-1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 连续;$\beta\neq-1$ 时,$x=0$ 为第一类跳跃间断点.

10.【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin3x}{x}+f(x)}{x^2}=0.$

所以,$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x}+f(x)\right)=0$. $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,所以 $f(x),f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 因此 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin3x}{x}=-3.$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin3x}{x}-3+f(x)+3}{x^2}=0$,即

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3-\frac{\sin3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2}=\frac{9}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)+3}{x^2}=0\times\frac{9}{2}=0.$$

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}.$$

因为 $\frac{9}{2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}$,

从而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=9$. 即 $f''(0)=9$.

第二章　导数与微分

习题二

1. 填空题

(1)**【解】**$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\,dt=\int_{x^2}^{0}\cos t^2\,dt-2x^2\cos x^4.$

(2)**【解】**$f'(x)=\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\dfrac{(-1)^1 2\cdot1!}{(1+x)^{1+1}}$,假设 $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$,则

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{(-1)^{k+1}2\cdot(k+1)!}{(1+x)^{k+1+1}},\text{所以 } f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

(3)**【解】**隐函数求导得:$e^{x+y}(1+y')-(y+xy')\sin xy=0$,

即得:$\dfrac{dy}{dx}=y'=\dfrac{y\sin xy-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin xy}.$

(4)【解】由 $f(-x)=-f(x)$,得 $-f'(-x)=-f'(x)$,所以 $f'(-x)=f'(x)$,

所以 $f'(x_0)=f'(-x_0)=k$.

(5)【解】$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-n\Delta x)}{\Delta x}$

$=m\lim\limits_{m\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{m\Delta x}+n\lim\limits_{n\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-n\Delta x)-f(x_0)}{-n\Delta x}=(m+n)f'(x_0)$.

(6)【解】$k\lim\limits_{k\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{k\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$,所以 $kf'(x_0)=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$,所以 $k=\dfrac{1}{3}$.

(7)【解】$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=-f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{1}{x}$,所以 $f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{x^2}{2}$.

令 $x^2=2$,所以 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$.

(8)【解】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)\cos f(x)f'[\sin f(x)]\cos(f[\sin f(x)])$.

(9)【解】对隐函数求导得:$e^{2x+y}(2+y')-(y+xy')\sin(xy)=0$.

所以切线斜率 $k=y'(0)=-2$. 法线斜率为$\dfrac{1}{2}$,法线方程为

$y-1=\dfrac{1}{2}x$,即 $x-2y+2=0$.

2. 选择题

(1)【解】"$\Leftarrow$":因为 $F'(0)$ 存在,所以 $F'(0^+)=F'(0^-)$,于是

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(f(x)-f(0))+f(x)\sin x}{x}=f'(0)+f(0).$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(f(x)-f(0))-f(x)\sin x}{x}=f'(0)-f(0).$$

所以 $f'(0)+f(0)=f'(0)-f(0)$,$2f(0)=0$,$f(0)=0$.

"$\Rightarrow$":已知 $f(0)=0$,所以

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(f(x)-f(0))+f(x)\sin x}{x}=f'(0)+f(0)=f'(0).$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(f(x)-f(0))-f(x)\sin x}{x}=f'(0)-f(0)=f'(0).$$

所以 $F'(0)=f'(0)$ 存在. 即答案为 A.

(2)【解】因为 $f(x)$ 是连续函数. $F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x)=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$. 所以答案是 A.

(3)【解】因为 $f(x)=[f(x)]^2$,且 $f(x)$ 具有任意阶导数,

所以 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$. 假设 $f^{(k)}(x)=k![f(x)]^{k+1}$,

所以 $f^{(k+1)}(x)=(k+1)k![f(x)]^k f'(x)=(k+1)![f(x)]^{k+2}$,由数学归纳法知:

$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$ 对一切正整数成立. 即答案为 A.

(4)【解】因为 $f(1+x)=af(x)$,且 $f'(0)=b$,

所以,$b=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{a}f(1+x)-\dfrac{1}{a}f(1)}{x}=\dfrac{1}{a}f'(1)$,

所以 $f'(1)=ab$. 即答案为 D.

(5)【解】依题意知：$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\geqslant 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$，$f''(x)=\begin{cases}24x, & x\geqslant 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$.

所以，$f'''(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{24x-0}{x}=24$，

$f'''(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{12x-0}{x}=12$，

所以 $n=2$，C 是答案.

(6)【解】因为 $f(x)$ 可导，所以由微分定义 $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0.$$

即答案为 B.

(7)【解】在 $x=0$ 处可导一定在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)$，

所以 $b=0$. $f'(0^+)=f'(0^-)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{x}$，所以 $a=0$. 即答案为 C.

(8)【解】(A)，(C) 项极限式的分母均为 h^2，而 $\lim\limits_{h\to 0}h^2=0^+$，所以可排除(A)(C).

对于(D) 项，令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导，但

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0\text{ 存在}.$$

故选(B).

(9)【解】若取 $y=x$，则 A 不正确；若取 $y=x^2$，则 B 不正确；若取 $y=x$，则 C 不正确；D 是答案.

(10)【解】$f(x)=0$，取 $a=0$. 排除 A；$f(x)=x^2+x+1$，取 $a=0$. $f(0)=1>0$，$f'(0)=1>0$，$|f(x)|=f(x)$，在 $x=0$ 处可导. 排除 C；$f(x)=-x^2-x-1$，取 $a=0$. 排除 D；所以 B 是答案.

3. 计算题

(1)【解】$y'=\dfrac{-\sin(10+3x^2)\cdot 6x}{\cos(10+3x^2)}=-6x\tan(10+3x^2)$.

(2)【解】$y'=f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]\cdot\dfrac{1}{x+\sqrt{a+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a+x^2}}\right)$

$$=\frac{f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]}{\sqrt{a+x^2}}.$$

(3)【解】$e^{y^2}y'=2x\cos x^2+2yy'\cos y^2\Rightarrow y'=\dfrac{2x\cos x^2}{e^{y^2}-2y\cos y^2}$.

(4)【解】$\dfrac{2x+2yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\,2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\frac{y'x-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$.

$x+yy'=y'x-y$，所以 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

(5)【解】$\mathrm{d}x=(2y+1)\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}u=\dfrac{3}{2}(x^2+x)^{\frac{1}{2}}(2x+1)\mathrm{d}x$

$$\frac{(2y+1)\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{2}\sqrt{x^2+x}(2x+1)\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{2}{3(2y+1)\sqrt{x^2+x}(2x+1)}.$$

4.【解】(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 点连接，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=a$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(g(x)-\cos x)=0$，$g(0)=\cos 0=1$.

所以 $a=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)+1-\cos x}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=g'(0)+0=g'(0).$$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{g(x)-\cos x}{x}-a}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{g(x)-\cos x-ax}{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x-ax}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2}g''(\xi)x^2-\cos x-ax}{x^2}(0<\xi<x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}g''(\xi)x^2-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}(g''(0)+1),$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq0\\ \dfrac{1}{2}(g''(0)+1), & x=0\end{cases}.$

5.【解】$F(x)$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$，所以 $c=f(-0)=f(0)$；

因为 $F(x)$ 二阶可导，所以 $F'(x)$ 连续，所以 $b=f'_-(0)=f'(0)$，且

$F'(x)=\begin{cases}f'(x), & x\leqslant0\\ 2ax+f'_-(0), & x>0\end{cases}$，$F''(0)$ 存在，所以 $F''_-(0)=F''_+(0)$，

所以 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2ax+f'_-(0)-f'(0)}{x}=2a$，所以 $a=\dfrac{1}{2}f''(0)$.

6.【解】$f(x)=-1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x}$，

$f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，

$f^{(2k+1)}(0)=0,k=0,1,2,\cdots,f^{(2k)}(0)=n!,k=0,1,2,\cdots$

7.【解】使用莱布尼兹高阶导数公式

$$f^{(n)}(x)=x\cdot(\ln x)^{(n)}+n(\ln x)^{(n-1)}=x(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}+n(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$=(-1)^{n-2}(n-2)!\left[\frac{-(n-1)}{x^{n-1}}+\frac{n}{x^{n-1}}\right]=(-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}},$$

所以 $f^{(n)}(1)=(-1)^{n-2}(n-2)!$.

8.【解】因为 $y=(\arcsin x)^2$，所以 $y'=2\arcsin x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$y''=2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2\arcsin x\left[-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right](-2x)$$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

所以 $(1-x^2)y''=2+xy'$.

对上式二边求 $n-1$ 阶导数. 按莱布尼兹公式有

$$(1-x^2)(y'')^{(n-1)}+(1-x^2)'C_{n-1}^1(y'')^{(n-2)}+(1-x^2)''C_{n-1}^2(y'')^{(n-3)}=x(y')^{(n-1)}+x'C_{n-1}^1(y')^{(n-2)},$$

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-2x(n-1)y^{(n)}-2\frac{(n-1)(n-2)}{2!}y^{(n-1)}=xy^{(n)}+(n-1)y^{(n-1)},$$

所以 $(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0$.

第三章 不定积分

习题三

1. 求下列不定积分：

(1)【解】因为 $d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x^2}dx.$

所以 $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$

(2)【解】因为 $\left(d\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{(1-x)^2}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}dx=\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}dx=\frac{dx}{1+x^2}$，

所以 $\int\frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1+x}{1-x}dx=\int\arctan\frac{1+x}{1-x}d\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$

(3)【解】因为 $d\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx.$

所以 $\int\frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}d\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)^2+C.$

(4)【解】令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，

$$\int\frac{dx}{x(x^8+1)}=-\int\frac{t^7dt}{t^8+1}=-\frac{1}{8}\int\frac{dt^8}{t^8+1}=-\frac{1}{8}\ln(1+t^8)+c=-\frac{1}{8}\ln\left(1+\frac{1}{x^8}\right)+C.$$

(5)【解】$\int\frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\tan\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$$

2. 求下列不定积分：

(1)【解】$\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}\xlongequal{x+1=\tan t}\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$

$$=-\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}+c=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C.$$

(2)【解】令 $x=\tan t$，则 $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt.$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt=\int\frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t}=\int\frac{d\sin t}{\sin^4 t}-\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

(3)【解】令 $x=\tan t$，则 $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt.$

$$\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dt}{(2\tan^2 t+1)\cos t}=\int\frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}dt=\int\frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}$$

$$=\arctan\sin t+c=\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

(4)【解】令 $x=a\sin t$，$dx=a\cos t dt$. $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t.$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{a\cos t}=a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}a^2t-\frac{1}{4}a^2\sin 2t+c$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

(5)【解】令 $x=\sin t$,

$$\int\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx=\int\cos^4 t\,dt=\int\left(\frac{1+\cos2t}{2}\right)^2dt=\int\frac{1+2\cos2t+\cos^2 2t}{4}dt$$

$$=\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\sin2t+\frac{1}{8}\int(1+\cos4t)\,dt=\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin2t+\frac{1}{32}\sin4t+C$$

$$=\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin2t\left(1+\frac{1}{4}\cos2t\right)+C$$

$$=\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{1}{2}\sin t\cos t\left(1+\frac{1}{4}-\frac{\sin^2 t}{2}\right)+C$$

$$=\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}\,(5-2x^2)+C.$$

(6)【解】令 $x=\frac{1}{t}$,则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx=\int\frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int t\sqrt{1-t^2}\,dt\xlongequal{令\ t=\sin u}-\int\sin u\cos^2 u\,du$$

$$=\int\cos^2 u\,d\cos u=\frac{1}{3}\cos^3 u+c=\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}+C.$$

(7)【解】令 $x=\frac{1}{t}$. 则 $dx=-\frac{dt}{t^2}$.

$$\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$\xlongequal{令\ t=\sin u}-\int(\sin u+1)\,du=\cos u-u+c=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

3. 求下列不定积分:

(1)【解】$\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx=\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}+1+e^{-2x}}dx=\int\frac{d(e^x-e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2+1}=\arctan(e^x-e^{-x})+C.$

(2)【解】令 $t=2^x$, $dx=\frac{dt}{t\ln2}$.

$$\int\frac{dx}{2^x(1+4^x)}=\int\frac{dt}{t^2(1+t^2)\ln2}=\frac{1}{\ln2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=-\frac{1}{\ln2}\left(\frac{1}{t}+\arctan t\right)+C$$

$$=-\frac{1}{\ln2}\left(\frac{1}{2^x}+\arctan2^x\right)+C.$$

4. 求下列不定积分:

(1)【解】$\int\frac{x^5}{(x-2)^{100}}dx=-\frac{1}{99}\int x^5\,d(x-2)^{-99}=-\frac{x^5}{99(x-2)^{99}}+\frac{5}{99}\int x^4(x-2)^{-99}dx$

$$=-\frac{x^5}{99(x-2)^{99}}-\frac{5x^4}{9\,702(x-2)^{98}}+\frac{10}{4\,851}\int x^3(x-2)^{-98}dx$$

$$=-\frac{x^5}{99(x-2)^{99}}-\frac{5x^4}{9\,702(x-2)^{98}}-\frac{10x^3}{470547(x-2)^{97}}-\frac{5x^2}{7\,528\,752(x-2)^{96}}$$

$$-\frac{x}{71\,523\,144(x-2)^{95}}-\frac{1}{71\,523\,144(x-2)^{94}}+c.$$

(2)【解】令 $x=1/t$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^4+1}{t^4}}}=-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^4}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{1+(t^2)^2}}$

$$\xlongequal{令\ t^2=\tan u}-\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 u}{\sec u}du=-\frac{1}{2}\ln|\tan u+\sec u|+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C.$$

5. 求下列不定积分：

(1)【解】$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\sin 2x$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

(2)【解】$\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\tan x=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\int\sec x\tan^2 x\mathrm{d}x$

$$=\sec x\tan x-\int(\sec^2 x-1)\sec x\mathrm{d}x=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|-\int\sec^3 x\mathrm{d}x.$$

$\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C.$

(3)【解】$\int\frac{(\ln x)^3}{x^2}\mathrm{d}x=-\int(\ln x)^3\mathrm{d}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}(\ln x)^3+\int\frac{3(\ln x)^2}{x^2}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{(\ln x)^3}{x}-\frac{3(\ln x)^2}{x}+\int\frac{6\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{(\ln x)^3}{x}-\frac{3(\ln x)^2}{x}-\frac{6\ln x}{x}+\int\frac{6}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}[(\ln x)^3+3(\ln x)^2+6\ln x+6]+C.$$

(4)【解】$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=x\cos(\ln x)-\int x\mathrm{d}\cos(\ln x)=x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$

$$=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x,$$

所以$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$

(5)【解】$\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}\mathrm{d}x=\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}\frac{x}{2}$

$$=-\frac{1}{4}\int x\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}\csc\frac{x}{2}=-\frac{1}{8}\int x\mathrm{d}\csc^2\frac{x}{2}=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int\csc^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C.$$

6. 求下列不定积分：

(1)【解】$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}\frac{1}{1-x^2}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

令 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$.

$\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t$

$$=\int\frac{\cos t}{1-2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{2}\sin t}{1-2\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}+C.$$

所以$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}+C.$

(2)【解】$\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

(3)【解】$\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \arctan e^x de^{-2x}$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int (\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{1+e^{2x}})dx$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C.$$

7.【解】$\int f(x)dx = \begin{cases} \int (x\ln(1+x^2)-3)dx, x \geqslant 0 \\ \int (x^2+2x-3)e^{-x}dx, x < 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}[x^2 - \ln(1+x^2)] - 3x + C, & x \geqslant 0 \\ -(x^2+4x+1)e^{-x} + C_1, & x < 0 \end{cases}.$$

由于$\int f(x)dx$连续，所以$C = -1 + C_1$，$C_1 = 1 + C$.

即$\int f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}[x^2 - \ln(1+x^2)] - 3x + C, & x \geqslant 0 \\ -(x^2+4x+1)e^{-x} + 1 + C, & x < 0 \end{cases}.$

8.【解】令$t = e^x$，$x = \ln t$，$f'(t) = a\sin(\ln t) + b\cos(\ln t)$，

$f(x) = \int [a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)]dx = \frac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln x) + (b-a)\cos(\ln x)] + c.$

9.求下列不定积分：

(1)【解】$\int 3^{x^2+3x}(2x+3)dx = \int 3^{x^2+3x}d(x^2+3x) = \frac{3^{x^2+3x}}{\ln 3} + C.$

(2)【解】$\int (3x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}(3x-1)dx = \frac{1}{2}\int (3x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}d(3x^2-2x+5)$

$$= \frac{1}{5}(3x^2-2x+5)^{\frac{5}{2}} + C.$$

(3)【解】因为$d\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，所以

$$\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2 + c.$$

(4)【解】因为$d\ln(1+\sqrt{1+x^2}) = \frac{x/\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$，

所以$\int \frac{xdx}{(1+x^2+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})} = \int \frac{d\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+\sqrt{1+x^2})}$

$$= \ln|\ln(1+\sqrt{1+x^2})| + C.$$

10.【解】$\int \frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx = \int \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2e^x}dx - \int \frac{f(x)}{xe^x}dx$

$$= \int \frac{1}{e^x}d\frac{f(x)}{x} - \int \frac{f(x)}{xe^x}dx$$

$$= \frac{1}{e^x}\frac{f(x)}{x} + \int \frac{f(x)}{xe^x}dx - \int \frac{f(x)}{xe^x}dx = \frac{f(x)}{xe^x} + C.$$

11.【解】令$t = \cos x + 2$，则$\cos x = t - 2$，从而

$f'(t)=1-\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}-1=-(t-2)^2+\frac{1}{(t-2)^2}$.

所以 $f(x)=-\int\left[(x-2)^2-\frac{1}{(x-2)^2}\right]dx=-\frac{1}{3}(x-2)^3-\frac{1}{x-2}+C$.

12.求下列不定积分：

(1)**【解】** $\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\arctan x d\frac{1}{1+x^2}$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\xlongequal{令 x=\tan t}-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2t}{\sec^4t}dt$$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\cos^2tdt$$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\int\cos(2t+1)dt$$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}\sin2t+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\arctan x+\frac{x}{4(1+x^2)}+C.$$

(2)**【解】**令 $u=\sqrt{\frac{x}{1+x}},x=\frac{u^2}{1-u^2},dx=\frac{2u}{(1-u^2)^2}du$

$$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int\arcsin u\frac{2u}{(1-u^2)^2}du$$

$$\xlongequal{令 u=\sin t}\int t\frac{2\sin t}{\cos^4t}\cos tdt=2\int t\frac{\sin t}{\cos^3t}dt=\int td\tan^2t$$

$$=t\tan^2t-\int\tan^2tdt$$

$$=t\tan^2t-\int\left(\frac{1}{\cos^2t}-1\right)dt$$

$$=t\tan^2t-\tan t+t+C$$

$$=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+C.$$

(3)**【解】** $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\xlongequal{令 x=\sin t}\int\frac{t}{\sin^2t\cos t}\cos tdt+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\int td\cot t+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-t\cot t+\int\cot tdt+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-t\cot t+\ln|\sin t|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C.$$

(4)**【解】**令 $t=\arctan x,x=\tan t,dx=\sec^2tdt$,

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{t\sec^2t}{\tan^2t\sec^2t}dt=\int\frac{t\cos^2t}{\sin^2t}dt=\int\frac{t(1-\sin^2t)}{\sin^2t}dt$$

$$=-\int td\cot t-\int tdt=-t\cot t+\int\cot tdt-\frac{1}{2}t^2=-t\cot t+\ln|\sin t|-\frac{1}{2}t^2+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$$

13. 求下列不定积分：

(1)【解】令 $x=2\sin t,\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t.$

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=32\int\sin^3 t\cos^2 t\mathrm{d}t=-32\int(1-\cos^2 t)\cos^2 t\mathrm{d}\cos t$$

$$=-\frac{32}{3}\cos^3 t+\frac{32}{5}\cos^5 t+c=\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(2)【解】令 $x=a\sec t,\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t.$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{a\tan t}{a\sec t}a\sec t\tan t\mathrm{d}t=a\int\tan^2 t\mathrm{d}t$$

$$=a\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=a\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}-at=a\tan t-at+C$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

(3)【解】$\displaystyle\int\frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\mathrm{d}x+\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\mathrm{d}e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}}\mathrm{d}x$$

$$=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C.$$

(4)【解】$\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x\xlongequal{令 u=\sqrt{x}}2\int\frac{u^4}{\sqrt{2a-u^2}}\mathrm{d}u\xlongequal{令 u=\sqrt{2a}\sin t}8a^2\int\sin^4 t\mathrm{d}t$

$$=8a^2\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t=2a^2\int(1-2\cos 2t+\cos^2 2t)\mathrm{d}t$$

$$=2a^2t-2a^2\sin 2t+2a^2\int\frac{1+\cos 4t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=3a^2t-2a^2\sin 2t+\frac{a^2}{4}\sin 4t+C$$

$$=3a^2t-4a^2\sin t\cos t+a^2\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)+C$$

$$=3a^2t-3a^2\sin t\cos t-2a^2\sin^3 t\cos t+C$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-3a^2\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}-2a^2\frac{x}{2a}\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}+C$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C.$$

14. 求下列不定积分：

(1)【解】令 $\sqrt{1+\cos x}=u,\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\dfrac{2u\mathrm{d}u}{-\sin^2 x}=\dfrac{2u\mathrm{d}u}{\cos^2 x-1}=\dfrac{2u\mathrm{d}u}{u^2(u^2-2)}.$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=\int\frac{2u}{u^2(u^2-2)u}\mathrm{d}u=2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2(u^2-2)}$$

$$=-\int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^2-2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{u}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}\right|+c.$$

(2)【解】$\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}(2+\cos x)}{2+\cos x}$

$$\xlongequal{令 \tan\frac{x}{2}=t}2\int\frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}+\ln|2+\cos x|$$