考研数学
高分必做1600题

王博◎主编

基础篇：突出基本概念理解，
基本运算能力培养。（第一轮使用）

强化篇：突出逻辑推理能力，
综合运用能力提高。（第二轮使用）

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

考研数学
高分必做1600题

王 博 ◎ 主编

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学高分必做1600题 / 王博主编. —长春：吉林大学出版社，2019. 6

ISBN 978-7-5692-5049-7

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第130252号

书　　名　考研数学高分必做1600题
　　　　　KAOYAN SHUXUE GAOFEN BIZUO 1600 TI

作　　者　王　博　主编
策划编辑　田茂生
责任编辑　赵雪君
责任校对　张文涛
装帧设计　中尚图
出版发行　吉林大学出版社
社　　址　长春市人民大街4059号
邮政编码　130021
发行电话　0431-89580028/29/21
网　　址　http://www.jlup.com.cn
电子邮箱　jdcbs@jlu.edu.cn
印　　刷　河北盛世彩捷印刷有限公司
开　　本　787mm × 1092mm　1/16
印　　张　31.5
字　　数　764千字
版　　次　2019年6月　第1版
印　　次　2019年6月　第1次
书　　号　ISBN 978-7-5692-5049-7
定　　价　79.80元

编 委 会

主　　编　王　博

副主编　王　顺　彭　博

编　　委　田　毅　王宏伟　张兴林　周　琛

李思东　董恋杰　王　强

前　言

研究生入学考试数学自1987年统考以来，已进行了30多年。由于考试复习内容多，覆盖面广，需要考生对基本概念、基本理论及基本方法熟练掌握，同时需要考生有较强的逻辑推理能力和综合运用能力，尤其是计算能力。

学习数学必须做大量习题，有些同学沉迷于看书和看视频课件，殊不知“一道数学题平时会做与在考场上能够准确无误地做出来是两件截然不同的事”。由于考研复习的科目多，知识点繁杂，花在数学上的时间也就不那么充足，做题的时间也就非常有限，所以，我们必须有针对性地去做那些能够真正提高考研解题能力的题，而不是盲目地去搞题海战术！

为了满足考生提高考场的应试解题能力，作者在13年的一线辅导经验的基础上，根据高分学生的成功经验和成绩不理想学生的失败教训，提炼出考研数学常考的各类题型，以及学生薄弱的盲点，精编本书！

本书延续作者《考研数学一本通》的编写体系，按基础篇与强化篇分层编写，基础复习阶段做基础篇，确保考研真题中前60%～70%的基础题不丢分，强化复习阶段做强化篇，确保自己的综合解题能力得到进一步提高！

基础篇和强化篇按考试科目分别依次编排为高等数学、线性代数、概率统计，适合考数学一、数学二、数学三的全部考生。对不同类的考生，部分习题单独有要求的均在题目中进行了标注，未做说明的，所有卷种考生同等要求！

全书共有习题约1600道左右，都是严格按照最新《考试大纲》的要求编写的，无一道偏题、怪题，考生应认真去做，对一些不熟练的概念和思路方法反复揣摩，一定能达到事半功倍的效果！

由于数学学科本身的特点，研究生入学考试数学的复习一定要遵循“早动手、重基础、勤练习、多思考”的原则。对于不懂的概念与问题，一定要反复揣摩练习，直到弄懂、搞熟为止。

由于作者水平有限，书中难免有各种不足，敬请广大读者、同行、专家批评指正，我们一起努力为广大考研学子取得高分尽一份绵薄之力！

有任何问题可联系作者：新浪微博@老王考研数学（封底有二维码）。

王　博

2019年3月

目　录

基础篇

强化篇

基础篇答案

强化篇答案

基础篇

高数基础题目

§1 函数、极限与连续

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\ln(x^2-x-2)$ 的定义域是(　　).

(A) $(-2,-1)$　(B) $(-1,2)$　(C) $(-2,-1)\cup(2,+\infty)$　(D) $(2,+\infty)$

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，则函数 $f(\sin x)$ 的定义域是(　　).

(A) $-1<x\leqslant 1$　　(B) $-\pi<x\leqslant\pi$

(C) $2n\pi<x<(2n+1)\pi(n\in\mathbb{Z})$　(D) $(2n+1)\pi<x<2(n+1)\pi(n\in\mathbb{Z})$

3. 下列各组函数中不是相同函数的为(　　).

(A) $f(x)=|x|,g(x)=x\operatorname{sgn}x$　(B) $f(x)=\sin(\arcsin x),g(x)=x$

(C) $f(x)=\ln(1-x)^2,g(x)=\begin{cases}2\ln(1-x),x<1\\2\ln(x-1),x>1\end{cases}$　(D) $y=f(x),x=f(y)$

4. 函数 $y=e^{x-1}-2$ 的反函数是(　　).

(A) $y=1+\ln(x-2)$　　(B) $y=2+\ln(x-1)$

(C) $y=1+\ln(x+2)$　　(D) $y=2+\ln(x+1)$

5. 设 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，且 $g[f(x)]$ 有意义，则 $g[f(x)]$ 是(　　).

(A)奇函数　(B)偶函数　(C)非奇非偶函数　(D)既是奇函数也是偶函数

6. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在$\mathbb{R}$上是(　　).

(A)单调函数　(B)有界函数　(C)偶函数　(D)周期函数

7. 函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ 是(　　).

(A)有界函数　(B)单调函数　(C)周期函数　(D)偶函数

8. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于常数 a，则无论正数 ε 多么小，在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外的数列的点(　　).

(A)必不存在　　(B)至多只有有限个

(C)必有无穷个　　(D)可能有限个，也可能无穷多个

9. 数列有界是数列收敛的(　　).

(A)必要条件　(B)充分条件　(C)充要条件　(D)既非必要也非充分条件

10. 若已知数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 均收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，则(　　).

(A) $x_n>y_n,n=1,2,3,\cdots$　(B) $x_n\neq y_n,n=1,2,3,\cdots$

(C)存在正整数 n_0，使得当 $n > n_0$ 时，$x_n > y_n$ (D) x_n 与 y_n 大小关系不能确定

11. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则函数值 $f(x_0)$ ( ).

(A)必存在且等于极限值 (B)必存在但未必等于极限值

(C)可以不存在 (D)如果存在的话必等于极限值

12. 已知 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在,则( ).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必存在 (B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 未必存在

(C) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ (D) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

13. 有以下命题:设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ 不存在.

① $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$ 不存在. ② $\lim\limits_{x\to a}(g(x)+h(x))$ 不存在.

③ $\lim\limits_{x\to a}(h(x)\cdot g(x))$ 不存在. ④ $\lim\limits_{x\to a}(g(x)+f(x))$ 不存在.

则以上命题中正确的个数是( ).

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

14. 若极限 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ( ).

(A)都存在 (B)都不存在 (C)不都存在 (D)都存在或都不存在

15. 下列命题中正确的是( ).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$

(B)若 $\exists\, \delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B_0$ 均存在, 则 $A_0 > B_0$

(C)若 $\exists\, \delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(D)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$

16. 下列说法正确的是( ).

(A)无穷大与无穷小的乘积一定是无穷大

(B)无穷大与无穷大的乘积一定是无穷大

(C)无穷大与有界函数的乘积一定是无穷大

(D)无穷大与常数的乘积一定是无穷大

17. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$, 则下列结论正确的是( ).

(A)若 x_n 发散,则 y_n 必发散 (B)若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C)若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小 (D)若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

18. 函数 $f(x) = x\sin x$ ( ).

(A)是 $x \to \infty$ 时的无穷大 (B)是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数

(C)是 $(-\infty, +\infty)$ 上的无界函数 (D)当 $x \to \infty$ 时极限存在

19. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, 则下列命题中不正确的是( ).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=+\infty$ (B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)h(x)]=\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+h(x)]=+\infty$ (D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=+\infty$

20. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 a,b,c,d 均为常数，且 $a^2+c^2\neq 0$，则必有(　　).

(A) $b=4d$ (B) $b=-4d$ (C) $a=4c$ (D) $a=-4c$

21. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$，则极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (　　).

(A)为 2 (B)为 0 (C)为 ∞ (D)不存在但不为 ∞

22. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则(　　).

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

23. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-ax-b\right)=1$，则(　　).

(A) $a=1,b=2$ (B) $a=-1,b=1$ (C) $a=1,b=-2$ (D) $a=-1,b=1$

24. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^3 的(　　).

(A)高阶无穷小 (B)低阶无穷小 (C)等价无穷小 (D)同阶但非等价无穷小

25. 已知当 $x\to a$ 时，α,β,γ 均为无穷小，且 $\alpha=o(\beta)$，$\beta\sim\gamma$，则极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$ (　　).

(A)等于 0 (B)等于 1 (C)为 ∞ (D)不存在但不为 ∞

26. 设 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x-1}e^{\frac{1}{(x-1)^3}}$，则当 $x\to 1$ 时有(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\pi$ (B) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$

(C) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$ (D) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在，且 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq\infty$

27. 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，相应的函数增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则当 $\Delta x\to 0$ 时(　　).

(A) Δy 必是 Δx 的高阶无穷小 (B) Δy 与 Δx 是同阶无穷小

(C) Δy 必是 Δx 的低阶无穷小 (D) Δy 与 Δx 相比无法确定

28. 函数 $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$ 的连续区间为(　　).

(A) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ (B) $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

(C) $[-\sqrt{e+1},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{e+1}]$ (D) $(-\sqrt{e+1},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{e+1})$

29. 若函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<0\\ a+x, x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$ (　　).

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

30. 方程 $x^3-x-1=0$ 至少有一个根的区间是(　　).

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

31. 点 $x=1$ 是函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的(　　).

(A)连续点　　(B)跳跃间断点　　(C)可去间断点　　(D)无穷间断点

32. 下列函数中在定义域上连续的函数是(　　).

(A)$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　　(B)$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　　(D)$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

33. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断,则在点 x_0 处必定间断的函数是(　　).

(A) $f(x)\sin x$　　(B) $f(x)+\sin x$　　(C) $f^2(x)$　　(D) $|f(x)|$

34. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A(\exists)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界的(　　).

(A)充分非必要条件　　(B)必要非充分条件

(C)充要条件　　(D)既非充分又非必要条件

35. 下列命题中正确的个数是(　　).

① $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,$f(u)$ 在 $u=u_0=\varphi(x_0)$ 连续,则 $f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 连续.

② $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,$f(u)$ 在 $u=u_0=\varphi(x_0)$ 不连续,则 $f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 不连续.

③ $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续,$f(u)$ 在 $u=u_0=\varphi(x_0)$ 连续,则 $f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 不连续.

④ $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续,$f(u)$ 在 $u=u_0=\varphi(x_0)$ 不连续,则 $f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 可能连续.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

二、填空题

1. 设函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,则函数 $g(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f[f(x)]=$ ________________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<2,\\ 0, & x=2,\\ x-1, & x>2,\end{cases}$　$g(x)=e^x+1$,则 $f[g(x)]=$ ________________.

4. 若 $f(x)=\mathrm{e}^x, f[g(x)]=1-x^2$，则 $g(x)=$ ________.

5. 若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，且曲线 $y=f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，其周期 $T=$ ________.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin x^2}=$ ________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n}x}{\underbrace{\tan\tan\cdots\tan}_{m}x}=$ ________，其中 n,m 均为正整数.

8. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=$ ________.

9. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=2$，则 $a=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=$ ________.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ________.

12. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=$ ________.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x}=$ ________.

14. 设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-\ln(\mathrm{e}^2+x)}{\arctan x}=$ ________.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1-x)}=$ ________.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=$ ________.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}=$ ________.

20. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ________.

21. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1-ax\sin x}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________.

22. 若 $f(x)=x^2+3x\lim\limits_{x\to 1}f(x)+1$，则 $f(x)=$ ________.

23. 已知 $f(x)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=1$，则 $f(0)=$ ________.

24. 已知当 $x\to 0$ 时，$x^n\sin x$ 是 $1-\cos x^2$ 的高阶无穷小，又是 $1-\sqrt{1-3x^8}$ 的低阶无穷小，则正整数 n 的取值范围是________.

25. 设当 $x\to 0$ 时，$k\sin^2 x\sim\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}$，则 $k=$ ________.

26. 设 $a > 0$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=1$,则 $a=$________,$b=$________.

27. 当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}\sim ax^2$,则 $a=$________.

28. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}\quad, \quad |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $c=$________.

29. 方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 的实根个数是________.

30. 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{2}{x\arctan x}}, x\neq 0\\ a, \quad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

三、解答题

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x>0,\\ x, x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 1,\\ x^3, x>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\leqslant 0\\ 1\quad, x>0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to -1}f[f(x)]$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, x\neq 1\\ 0\qquad, x=1\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$,

求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}f[g(x)]$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1+2x\ln(1+e^x)}{x^2}$,求 $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to \infty}f(x)$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x\sin x}{x^2-2x\cos\dfrac{1}{x}}$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4x^2+1}}$.

7. 求极限:(Ⅰ)$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;(Ⅱ)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$,其中 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数.

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-3x}}{x}$.

10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sqrt{1-x^2}\cos x)}{\sin x\ln(1+\tan x)}$.

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{x^{-2}}$.

12. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\sin\pi x}$.

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\sin 3x}$.

14. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x-\tan x)}}$.

15. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

16. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2|x|}{x+2}\arctan x$.

17. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

18. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\ln(1+2x)}$.

19. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{n^2-n^3})$.

20. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

21. 设 $a_n=\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

22. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$.

23. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{3^x-1}=5$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

24. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+5}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b 的值.

25. 设 $a_n=\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}_{(n\text{重})}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

26. 设 $a_1=1, a_{n+1}+\sqrt{1-a_n}=0$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

27. 证明：(Ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ 的充要条件；

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\,(a\neq 0)$ 是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$ 的充分非必要条件.

28. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，$\varphi(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上但存在间断点的函数，则下列结论中正确的请证明，错误的请举反例.

(Ⅰ) $f(x)+\varphi(x)$ 必有间断点；(Ⅱ) $f(x)\varphi(x)$ 必有间断点；

(Ⅲ) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点；(Ⅳ) $\varphi^2(x)$ 必有间断点.

29. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的连续性，若有间断点，则确定其类型.

30. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的连续性.

31. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}\,(x>0)$ 的连续性.

32. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2(n+1)}-1}{x^{2n}+1}$ 的连续性,若有间断点,确定其类型.

33. 确定常数 a,b 的值,使得函数 $f(x)=\begin{cases}(2x^2+\cos^2 x)^{x^{-2}}, & x<0\\ a, & x=0\\ \dfrac{b^x-1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

34. 设 $f(x)$, $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)>g(a)$, $f(b)<g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

35. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,证明:方程 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上存在实根.

36. 证明:方程 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0(a<b<c)$ 在开区间 (a,b) 和 (b,c) 内各有一个实根.

37. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,证明:存在点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)$.

【以下各题可在学完洛必达法则和泰勒公式后练习】

38. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\ln(1+x)}$.

39. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x^2\ln(1+x)}}$.

40. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

42. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{e^{x^2}-1}\right]$.

43. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\arcsin^2 x})$.

44. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\ln(1+x)}}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}$.

45. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

46. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x^2}$.

47. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

48. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}$.

49. 求 $\lim\limits_{x\to 1}(\tan\dfrac{\pi}{4}x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

50. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

§2 一元函数微分学

一、选择题

1. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=0$，则下列结论中正确的是(　　).

(A) $f(x)$ 在点 x_0 处间断

(B) $f(x)$ 在点 x_0 处未必取得极值

(C) $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内连续

(D)曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有水平法线

2. 若左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 均存在，但 $f'(x_0)$ 不存在，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处(　　).

(A)间断　　(B)连续　　(C)可导　　(D)可微

3. 函数 $f(x)=2^{|x-2|}$ 在点 $x=2$ 处的导数是(　　).

(A) $-\ln 2$　　(B) $\ln 2$　　(C) 1　　(D)不存在

4. 设 $y=\sin(x^2)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)}=$(　　).

(A) $2x\cos(x^2)$　　(B) $\dfrac{2x\cos(x^2)}{3x^2}$　　(C) $\cos(x^2)$　　(D) $-\dfrac{2x\cos(x^2)}{3x}$

5. 若 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处可导，则(　　).

(A) $\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处和 $f(u)$ 在点 $u=\varphi(x_0)$ 处都可导

(B) $\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处必可导

(C) $f(u)$ 在点 $u=\varphi(x_0)$ 处必可导

(D) $\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 和 $f(u)$ 在点 $u=\varphi(x_0)$ 处未必都可导

6. 已知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)\sqrt[3]{x-a}}=1$，则 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处(　　).

(A)未必连续　　(B)未必可导

(C)可导且 $f'(a)\neq 0$　　(D)可导且 $f'(a)=0$

7. 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，$g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导，则 $F(x)=f(x)+g(x)$ 和 $G(x)=f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处(　　).

(A)都不可导　　(B)都可导　　(C)只有一个不可导　　(D)至少一个不可导

8. 抛物线 $y=ax^2$ 上非顶点的点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线在 x 轴上的截距是(　　).

(A) $-2x_0$　　(B) $2x_0$　　(C) $\dfrac{x_0}{2}$　　(D) $-\dfrac{x_0}{2}$

9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{\sin x}{t}}=$(　　).

(A) $\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$　　(B) $-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$　　(C) $-\mathrm{e}^{\cos x}\cos x$　　(D) $\mathrm{e}^{\sin x}\sin x$

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3}, & x>0,\\ g(x)\arcsin^2 x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处