Duality Principle for Two Dimensional and Three Dimensional Euclidean Geometry

HIT

数学 · 统计学系列

二维、三维欧氏几何的对偶原理

陈传麟 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

HIT

数学·统计学系列

二维、三维欧氏几何的对偶原理

Duality Principle for Two Dimensional and Three Dimensional Euclidean Geometry

陈传麟

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书指出二维、三维的欧氏几何都存在对偶原理，欧氏几何经过对偶所产生的新几何，实质上是对欧氏几何的一种新解释，称为“黄几何”(欧氏几何自身改称为“红几何”)，“黄几何”经过再对偶产生的新几何称为“蓝几何”，……

对于任何一个命题(本书所说的命题均指真命题)，都可以反复使用对偶原理，产生一个又一个新的命题，形成命题链，这些新命题的正确性毋庸置疑，盖由对偶原理保证，这是射影几何所不具备的.

建立欧氏几何的对偶原理，除了需要“假元素”(指无穷远点、无穷远直线、无穷远平面)外，还要引进“标准点”，它是度量(长度和角度)之必需，是建立对偶原理的点睛之笔，成败之举.

运用欧氏几何对偶原理解题，是一种新的解题方法，称之为“对偶法”.

本书可作为大专院校数学系师生、中学数学教师，以及数学爱好者的参考用书. 可以将本书与《圆锥曲线习题集》(哈尔滨工业大学出版社出版)结合使用.

图书在版编目(CIP)数据

二维、三维欧氏几何的对偶原理/陈传麟著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.12

ISBN 978-7-5603-7718-6

Ⅰ.①二… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①欧氏几何—对偶定理—研究 Ⅳ.①O181

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 231241 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 穆 青
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 51 字数 1024 千字
版 次 2018 年 12 月第 1 版 2018 年 12 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-7718-6
定 价 138.00 元

作 者 简 介

陈传麟,1940 年生于上海.

1963 年于安徽大学数学系本科毕业.

1965 年试建立欧几里得几何的对偶原理,并于当年获得成功.

2011 年发表专著《欧氏几何对偶原理研究》(上海交通大学出版社).

2013 年起编撰《圆锥曲线习题集》(上、中、下共五册,哈尔滨工业大学出版社).

The most incomprehensible thing about the world is that it is all comprehensible.

—— Albert Einstein

这个世界最令人费解的是,它竟可被理解.

——爱因斯坦

If at first the idea is not absurd, then there will be no hope for it.

—— *Albert Einstein*

如果一个想法从一开始就不荒谬，那它就没有希望了.

——爱因斯坦

◎

序

点和直线是欧氏几何中最基本的概念.

坊间历来认为欧氏几何没有对偶原理,就是说,在欧氏几何里,点就是点,直线就是直线,点不能当“直线”用,当然,直线也不能当“点”用.苏联几何学家叶菲莫夫就这样认为,他在书中写道:“我们注意到,在初等几何里没有对偶性.例如,在欧几里得几何的从属关系里,点和直线就不是互相对偶的;事实上,在欧几里得平面上,两个点总有公共的直线,但是两条直线并不总有公共的点(可以是平行的)……”(见叶菲莫夫著《高等几何学》,裘光明译,高等教育出版社,1954年版,第368页)他认为,只有射影几何才具备对偶原理,他说:“由于射影几何不涉及度量,所以内容比较贫乏,其对偶原理很容易建立.”(上书第455页)

事实并非如此,1965年,本书作者引进了“标准点”后,终于在欧氏几何里建立了对偶原理,这不能不说是对欧氏几何的一项重要建树.

欧氏几何的对偶原理,是一件新事物,新事物往往难于让人接受,加之叙述又颇费口舌,所以,本书作者——我的老师,为此等候了50年.

2010 年，上海交通大学出版社对陈先生的研究成果很感兴趣，准备出版他的著作《欧氏几何对偶原理研究》，并向某基金申请出版赞助，陈先生当时表示，恐怕不会有好结果，果不其然，该基金的评审专家很快给出如下评语（这里全文照抄，包括笔误及标点）：“此书研究内容为初等几何范畴，在一定意义下可以视为戴沙格定理的补充，其所谓新方法新理论没有挑出经典几何的内容，也没有实际应用。本书可以作为平面几何的补充或课外读物。”

陈先生对此评语，只说了一句话：Go your own way；let others talk！（语出意大利文学家 Dante Alighieri（但丁・阿利格耶里，1265—1321）的代表作长诗《神曲》.）

在数学史上，一件新事物被误解、贬斥，甚至嘲弄，这样的事例还少吗？

过去的已经过去，不必太在意，还是谈谈现在吧！陈先生现在写的这本书分 3 章，第 1 章是关于二维欧氏几何的对偶原理，第 2 章是关于三维欧氏几何的对偶原理，第 3 章是关于“特殊蓝几何”和“特殊黄几何”的阐述，其中有很多精妙的论述，令人拍案称奇.

陈先生把添加了无穷远点和无穷远直线的欧氏几何称为“红几何”，该几何的对偶几何称为“黄几何”“黄几何”的对偶几何称为“蓝几何”，这里的“红”“黄”“蓝”只是用以区分彼此的符号，如同甲、乙、丙、丁，或 A，B，C，D 一样，并没有具体的含义.

“红几何”里的“点”是常义下的点，不过也可以是“假点”（无穷远点），“红几何”里的“直线”是常义下的直线，不过也可以是“假线”（无穷远直线）.“红几何”的对偶几何是“黄几何”，该几何里的“点”和“直线”恰恰是“红几何”里的“直线”和“点”，这种把点当“直线”用，同时，把直线当“点”用的做法，会给我们带来许多不适，需要经过长时间的练习才能适应.

点和直线是几何的基础，越是基础的东西，越是困难，牵一发而动全身！这不，有人就反对在欧氏几何里添加无穷远元素（无穷远点和无穷远直线），说：如果添加了，才能建立起对偶原理，那么，也不算欧氏几何的对偶原理，总之，欧氏几何里就不能有无穷远元素.这样的观点过于偏执，试问，排除了无穷远元素，射影几何岂不也失去了对偶原理？同样是建立对偶原理，为什么一个允许拥有，一个却不允许，采用两个标准？正确的理解应该是这样的，欧氏几何里，原本是有无穷远元素的，只是一不小心，把它疏忽了，乃至两千年后打起了口水战.

“黄几何”经过对偶成了“蓝几何”“点”和“直线”的身份又一次互换，因而，

"蓝几何"的"点"和"直线"又变回到了常义下的点和直线,话虽这么说,但毕竟"蓝几何"不是"红几何",因为,"蓝几何"的"假点""假线"不再是当初"红几何"的"假点""假线","蓝几何"是一个完全不同于"红几何"的新世界.

在欧氏几何对偶原理的解读下,椭圆、抛物线、双曲线和圆这四种曲线达到高度的统一(不是射影意义下的统一,而是度量意义下的统一),例如:圆,它可以被用作椭圆、抛物线或者双曲线,反过来,椭圆、抛物线、双曲线都可以被当作圆,所以,圆的每一条性质(包括所有的度量性质)均可移植到椭圆上、抛物线上,或者双曲线上,当然,也可以反过来移植,这样就极大地丰富了圆锥曲线的内容.(请参阅陈先生所著《圆锥曲线习题集》,哈尔滨工业大学出版社,该书共五册,内含圆锥曲线命题 5 300 道.)

一道命题和它的对偶命题是同真同假的,因而,一道真命题经过一再对偶,就会产生一系列的真命题,形成命题链(这一点,射影几何的对偶原理做不到),一些风马牛不相及的命题,就有了因果关系.

下面举六个例子.

第一个例子,请考察下面的命题 1.

命题 1　设圆上有六个点:A,B,C,D,E,F,若 $AB // DE$,且 $BC // EF$,如图 1 所示,求证:$CD // FA$.

这个命题的证明很简单:

因为 $AB // DE$,所以 $\angle ACE = \angle BFD$.

又因为 $BC // EF$,所以 $\angle CAE = \angle BDF$,于是 $\angle DBF = \angle AEC$,所以 $CD // FA$.(证毕)

若把命题 1 表现在"蓝几何"里,则得下面的命题 2.

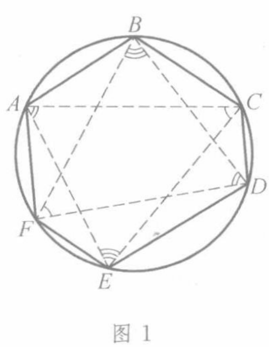

图 1

命题 2　设椭圆 α(或抛物线或双曲线)上有六个点:A,B,C,D,E,F. AB 交 DE 于 P, BC 交 EF 于 Q,CD 交 FA 于 R,如图 2 所示,求证:P,Q,R 三点共

线(此直线记为 z).

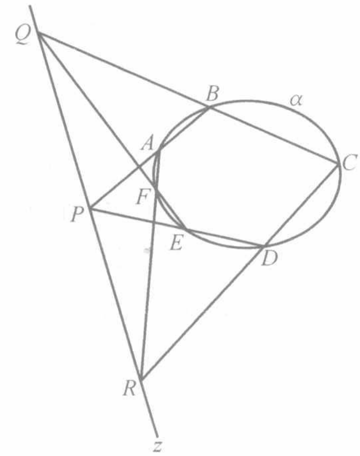

图 2

这就是“帕斯卡(Blaise Pascal,1623—1662) 定理”,若以 z 为“蓝假线”,那么,图 2 在“蓝种人”眼里,就和我们眼里看到的图 1 是一样的.

帕斯卡定理是命题 1 的对偶命题,而命题 1 几乎明显成立,因而,帕斯卡定理也几乎明显成立,无须多说什么,事情就这么简单.

若把命题 2 表现在“黄几何”里,则得下面的命题 3.

命题 3 设六边形 $ABCDEF$ 外切于椭圆(或抛物线或双曲线),如图 3 所示,求证:AD,BE,CF 三线共点(此点记为 Z_2).

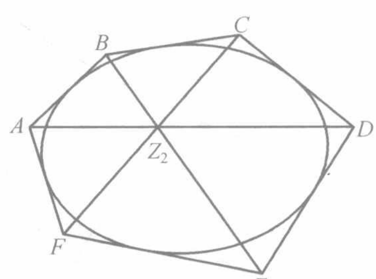

图 3

命题 3 是“布里昂雄(C. J. Brianchon,1785—1864) 定理”. 若以 Z_2 为“黄假线”,则图 3 在“黄种人”眼里,就和我们眼里看到的图 2 是一样的.

布里昂雄定理是命题 2 的对偶命题,因为命题 2 是成立的,所以,布里昂雄定理也是成立的,事情就这么简单.

如果把图 2 的 R 视为“黄假线”,那么,在“黄种人”眼里,α 是“黄双曲线”,A

与 F 是一对彼此平行的“直线”，C 与 D 也是一对平行的“直线”，$AFDC$ 是“黄双曲线”α 的外切“平行四边形”，B 与 E 是“黄双曲线”α 的两条“切线”，…… 把“黄种人”的这些理解，用我们的语言表述出来，就成了下面的命题 4.

命题 4 设平行四边形 $ABCD$ 的四边均与双曲线 α 相切，E，F 两点分别在 AB，BC 上，过 E 作 α 的切线，交 AD 于 G，过 F 作 α 的切线，交 CD 于 H，如图 4 所示，求证：$EF \parallel GH$.

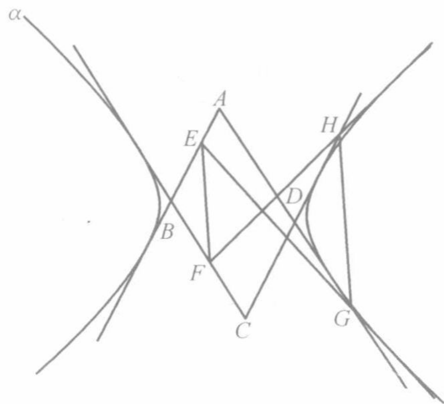

图 4

图 4 的 EF 和 GH 分别对偶于图 2 的 P 和 Q，因为在“黄观点”下，图 2 的 P，Q 是彼此“平行”的，所以，命题 4 的结论是：$EF \parallel GH$.

命题 4 对椭圆也成立，即下面的命题 5 成立.

命题 5 设平行四边形 $ABCD$ 的四边均与椭圆 α 相切，E，F 两点分别在 AB，BC 上，过 E 作 α 的切线，交 AD 于 G，过 F 作 α 的切线，交 CD 于 H，如图 5 所示，求证：$EF \parallel GH$.

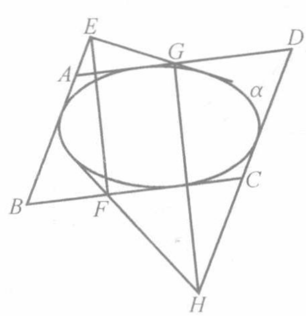

图 5

如果让“蓝种人”去表现命题 5，那么，他们会把图 5 画成像图 6 那样，在那里，PQ 是他们的“蓝假线”，即“无穷远直线”，因而，$ABCD$ 是“蓝椭圆”α 的外切

"平行四边形",…… 在图 6 中,除了 P,Q,R 都是"无穷远点"外,其余各点都与图 5 完全一致(这两个图的字母完全一致).

对于"蓝种人"画的图 6 ,用我们的语言表述出来,就成了下面的命题 6.

命题 6 设完全四边形 $ABCD-PQ$ 外切于椭圆 α,E,F 两点分别在 AB,BC 上,过 E 作 α 的切线,交 AD 于 G,过 F 作 α 的切线,交 CD 于 H,EF 交 GH 于 R,如图 6 所示,求证:R 在直线 PQ 上.

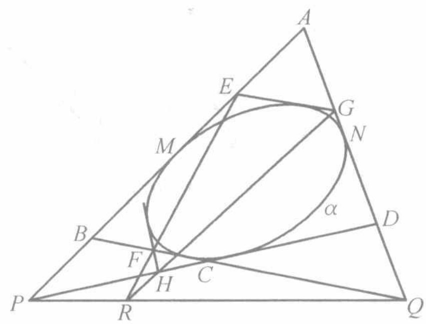

图 6

如果把图6的 A 视为"黄假线",那么,在"黄种人"眼里,α 就是"黄双曲线",M,N 都是这"黄双曲线"的"渐近线"(在我们眼里,M,N 分别是 AP,AQ 与 α 的切点),E,B,P 都是与 M 平行的一组"平行线",G,D,Q 都是与 N 平行的另一组"平行线",把"黄种人"对图 6 的这些感受,用我们的语言表述出来,就成了下面的命题 7.

命题 7 设双曲线 α 的两条渐近线为 t_1,t_2,A,B,C,D 是 α 上四点,过 D 作 t_2 的平行线,交 AB 于 P;过 D 作 t_1 的平行线,交 AC 于 Q;过 B 作 t_1 的平行线,同时,过 C 作 t_2 的平行线,这两线交于 R,如图 7 所示,求证:P,Q,R 三点共线.

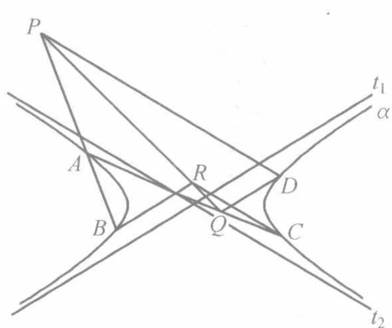

图 7

现在,如果把图 6 的 AB 视为"蓝假线",那么,在"蓝种人"眼里,α 就是"蓝

抛物线”,GE,GR 是“蓝平行”的,DP,QP 也是“蓝平行”的,把“蓝种人”对图 6 的这些感受,用我们的语言表述出来,就成了下面的命题 8.

命题 8 设 A,B,C 是抛物线 α 外三点,过 A,B 分别作 α 的切线,这两切线分别记为 l_1,l_2,过 C 作 α 的两条切线,这两切线分别交 l_1 于 D,E,过 A 作 CE 的平行线,交 BC 于 F,如图 8 所示,求证:DF 与 l_2 平行.

命题 7 的下列六点:C,F,G,H,Q,R,分别对偶于命题 8 的以下六点:E,D,B,C,A,F.

直接证明命题 8 是很容易的,只要注意到图 8 的 α 有一个“外切六边形”$ABMNCD$ 即可,这里的 M 是 l_2 上的无穷远点,N 是直线 CE 上的无穷远点,所以由布里昂雄定理知,该“外切六边形”的三条对角线 AN(即 AF),BC,DM(即 DF)共点(该点是 F),相当于说“DF 与 l_2 平行”,这就是命题 8 的证明.

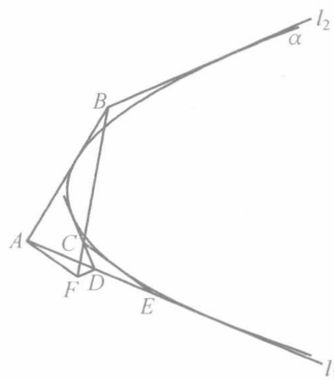

图 8

从命题 1 到命题 8,虽然形态各异,然而,却因为对偶关系,而联系在一起.

第二个例子,请考察下面的命题 9,它是一道关于两个椭圆的命题(见陈先生所著《圆锥曲线习题集》上册命题 414).

命题 9 设两椭圆 α,β 相交于 P,Q,R,S 四点,α,β 的四条公切线构成四边形 $EFGH$,α,β 在边 EF,FG,GH,HE 上的切点分别记为 A,B,C,D 和 A',B',C',D',设 EG 交 FH 于 O,如图 9 所示,求证:

① 有四次三点共线,它们分别是:(A,O,C);(A',O,C');(B,O,D);(B',O,D');

② 还有两次三点共线,它们分别是:(P,O,R),(Q,O,S).

这道命题如何证明?为此,先考察下面的命题 10 和命题 11,它们都是明显成立的.

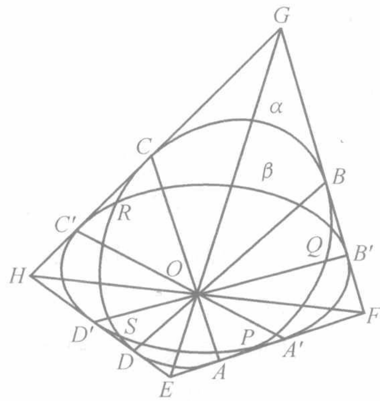

图 9

命题 10　设平行四边形 $ABCD$ 外切于椭圆 α，AC 交 BD 于 O，如图 10 所示，求证：O 是椭圆 α 的中心.

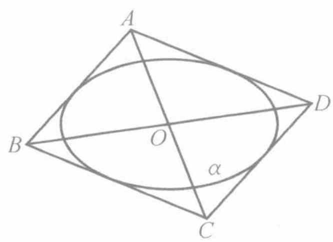

图 10

命题 11　设 O 是两椭圆 α，β 的共同的中心，这两个椭圆相交于 P，Q，R，S 四点，它们的四条公切线构成四边形 $EFGH$，α，β 在四边 EF，FG，GH，HE 上的切点分别记为 A，B，C，D 和 A'，B'，C'，D'，设 EG 交 FH 于 O，如图 11 所示，求证：

① 有四次三点共线，它们分别是：(A,O,C)；(A',O,C')；(B,O,D)；(B',O,D')；

② 还有两次三点共线，它们分别是：(P,O,R)，(Q,O,S).

现在，回到图 9，设 EF 交 GH 于 L，FG 交 EH 于 K，记 LK 为 z，如图 11.1 所示，这时，若将 z 视为"蓝假线"，那么，在"蓝观点"下，α 是"蓝椭圆"，$EFGH$ 是其外切平行四边形，因而，按命题 10，点 O 是 α 的"蓝中心". 同理，点 O 也是"蓝椭圆"β 的"蓝中心"，可见，图 9 的 α，β 在"蓝观点"下，是有着公共的"蓝中心"的"蓝椭圆"，故按命题 11，命题 9 的两个结论都是成立的（在我们眼里或在"蓝种人"眼里，三点共线都是一致的）.

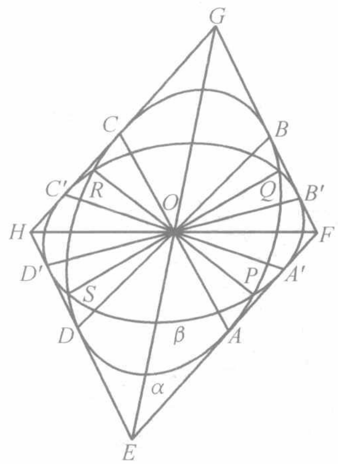

图 11

命题 9 的证明就如此简单.

顺带说一句,命题 9 在“黄几何”中的表现,是下面的命题 12,它的正确性当然毋庸置疑.

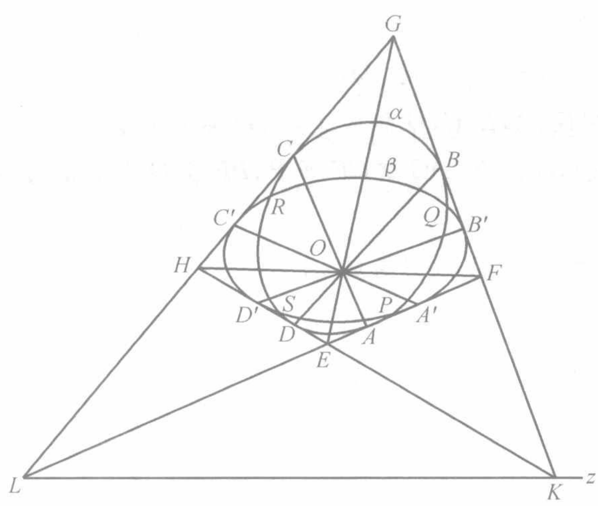

图 11.1

命题 12 设两椭圆 α,β 交于 A,B,C,D 四点,AB 交 CD 于 M,AD 交 BC 于 N,过 A,C 分别作 α 的切线,二者交于 P,过 B,D 分别作 α 的切线,二者交于 Q,过 A,C 分别作 β 的切线,二者交于 S,过 B,D 分别作 β 的切线,二者交于 T. 设 α,β 的四条公切线构成四边形 $EFGH$,EF 交 GH 于 U,EH 交 FG 于 V(限于图中篇幅未画出),如图 12 所示,求证:

①AC,BD,EG,FH 四线共点,这点记为 O;

②E,O,G,N 四点共线，F,O,H,M 四点共线；

③M,N,P,Q,S,T,U,V 八点共线，此线记为 z；

④ 点 O 既是直线 z 关于 α 的极点，又是直线 z 关于 β 的极点.

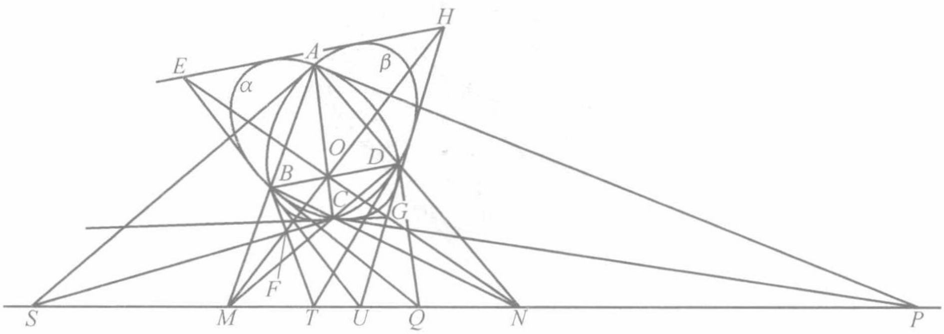

图 12

第三个例子，我们知道，两个椭圆在“蓝几何”里，是可以同时被视为“蓝圆”的(参阅本书第 1 章第 3 节的 3.44)，所以，有关两圆的命题均可移植到两个椭圆上.

例如，下面的命题 13 是明显成立的.

命题 13　设两圆 α,β 外离，AB,CD 是它们的两条外公切线，EF,GH 是它们的两条内公切线，A,B,C,D 和 E,F,G,H 都是切点，如图 13 所示，设 AB 交 CD 于 M，EF 交 GH 于 N，AG 交 CE 于 P，BF 交 DH 于 Q，求证：M,N,P,Q 四点共线.

于是，下面的命题 14 也明显成立.

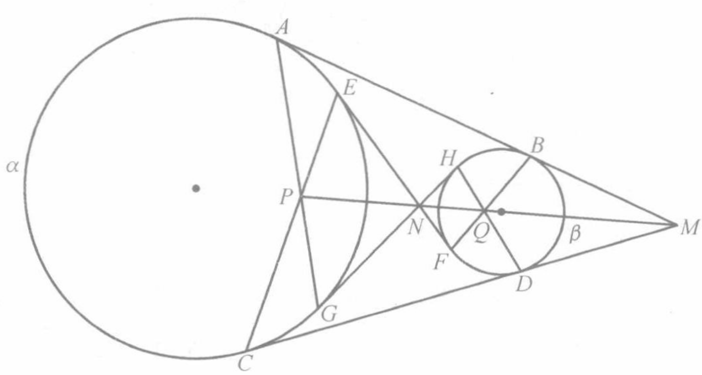

图 13

命题 14　设两椭圆 α,β 外离，AB,CD 是它们的两条外公切线，EF,GH 是它们的两条内公切线，A,B,C,D 和 E,F,G,H 都是切点，如图 14 所示，设 AB

交 CD 于 M，EF 交 GH 于 N，AG 交 CE 于 P，BF 交 DH 于 Q，求证：M，N，P，Q 四点共线.

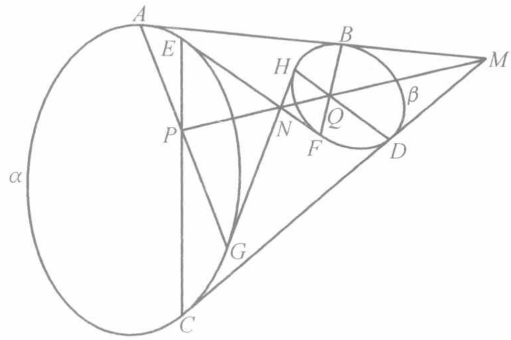

图 14

接下来的问题是：怎样把命题 14 表现在"黄几何"里？

我们知道，当两椭圆外离时，这两椭圆没有公共点，但有四条公切线，反之，若两椭圆没有公共点，但有四条公切线，那么，这两椭圆必然是外离的.

"公共点"对偶于"公切线"，而"公切线"则对偶于"公共点"，所以上述两椭圆外离的充要条件，在"黄几何"里，应该这样叙述（用我们的语言叙述）：若两圆锥曲线有四个公共点（对偶于上面说的"但有四条公切线"），但没有公切线（对偶于上面说的"没有公共点"），那么，在"黄种人"眼里，这两圆锥曲线就是两个外离的"椭圆"——"黄椭圆". 于是得到命题 14 的对偶命题如下：

命题 15 设两双曲线 α，β 相交于 A，B，C，D 四点，过 A，B 分别作 α 的切线，这两切线交于 E；过 C，D 分别作 α 的切线，这两切线交于 G，过 B，C 分别作 β 的切线，这两切线交于 F；过 D，A 分别作 β 的切线，这两切线交于 H，如图 15 所示，求证：AC，BD，EG，FH 四线共点（此点记为 O）.

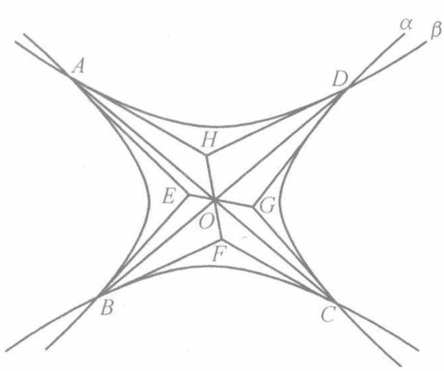

图 15

图 14 与图 15 的对偶关系如下：