Fundamental Theory of Elasticity and Some Applications in Civil Engineering

弹性力学基本理论及其在土木工程中的若干应用

张斌伟 / 著

中国矿业大学出版社

弹性力学基本理论及其在土木工程中的若干应用

张斌伟 著

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书深入浅出地介绍了弹性力学的基本内容和知识，建立了弹性力学的体系框架，针对弹性力学中若干难点问题进行了深入的探讨和证明，以期从理论上突破弹性力学教学中的困惑。同时，详细阐述了弹性力学在土木工程中的若干应用和有限元理论的内核与教学软件平台等。全书共分为四篇：第一篇弹性力学准备知识；第二篇弹性力学的基本理论；第三篇弹性力学在土木工程中的若干应用；第四篇弹性力学有限元数值分析初步及应用实例。全书体系完善，内容丰富，对于土木工程专业学生及工程技术人员深入学习弹性力学和开展工程应用研究具有较大的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学基本理论及其在土木工程中的若干应用 / 张斌伟著. — 徐州：中国矿业大学出版社，2019.2

ISBN 978-7-5646-4361-4

Ⅰ.①弹… Ⅱ.①张… Ⅲ.①弹性力学—应用—土木工程—研究 Ⅳ.①TU

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第036203号

书　　名 弹性力学基本理论及其在土木工程中的若干应用
著　　者 张斌伟
责任编辑 何晓明　孙建波
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线 (0516)83884103　83885105
出版服务 (0516)83995789　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 江苏凤凰数码印务有限公司
开　　本 787×1092　1/16　**印张** 14.25　**字数** 256千字
版次印次 2019年2月第1版　2019年2月第1次印刷
定　　价 39.80元

前　言

弹性力学是土木工程专业一门重要的专业基础课，对于学生后续学习专业课程和夯实科研基础具有重要的意义。但是，由于本课程理论难度较大，课程学习方法与材料力学等课程具有显著的区别，同时，传统的弹性力学课程着重讲述弹性力学的基本理论和知识，对于后续课程的延续性和应用性方面讲解欠缺，使得学生产生了两种情形：① 一部分学生面对抽象、复杂的弹性力学公式，倍感吃力，找不到合适的学习方法，从而一开始就对本课程具有畏难情绪；② 一部分学生具有学习的兴趣，但是，对于弹性力学与工程设计或者结构分析之间的联系比较困惑，致使学习动力不足。基于上述事实，本著作深入浅出地阐述了弹性力学的基本知识，重点构建了弹性力学的分析框架和思路，在理论力学、材料力学、弹性力学和连续介质力学之间建立了统一的分析思路和框架，尤其是针对弹性力学难点问题开展了深入的证明和推导，打通了学生学习固体力学课程的通道。另外，结合土木工程领域的若干课题，详细阐述了弹性力学在土木工程中的应用，给学生指明了学习的思路和方向，尤其是建立了弹性力学有限元法的能量变分格式和杆系有限元教学软件平台。

本著作是笔者在陇东学院从事弹性力学教学与土木工程科研工作的凝练与总结。全书共分为四篇：第一篇弹性力学准备知识；第二篇弹性力学的基本理论；第三篇弹性力学在土木工程中的若干应用；第四篇弹性力学有限元数值分析初步及应用实例。

本著作在编写的过程中得到陇东学院相关部门的大力支持，也得到了兰州交通大学土木工程学院和研究生院相关领导的关照和帮助，特别是兰州交通大学严松宏教授和王旭教授为本著作提供了重要的建议。

本著作参考了相关弹性力学教程和科研资料，在此向书中所引用文献和

研究成果的众多作者表示诚挚的谢意。

全书体系完善，内容丰富，对于土木工程专业学生和工程技术人员深入学习弹性力学和开展工程应用研究具有较大的参考价值。

限于作者的水平，书中难免存在不妥之处，敬请专家学者和广大读者批评指正。

著　者

2018 年 9 月

目　录

第一篇

弹性力学准备知识

第一章　矩阵基本理论

一、矩阵的定义

有 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，有次序地排成 m 行（横排）n 列（竖排）的数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-1-1}$$

称为 m 行 n 列的矩阵，简记 $(a_{ij})_{m\times n}$，通常用大写字母 $A,B,C\cdots\cdots$ 表示，m 行 n 列的矩阵通常也表示为 $A_{m\times n}$，构成矩阵 A 的每一个数称为矩阵 A 的元素，而 a_{ij} 表示第 i 行、第 j 列的元素。

只有一行或一列的矩阵称为行矩阵或列矩阵，有时也把这样的矩阵称为向量，如：

$$A_{m\times n}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\text{—— 行矩阵}$$

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\text{—— 列矩阵}$$

有时行矩阵可以通过转置可以转换为列矩阵，如：

$$A_{m\times n}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1-1-2}$$

如果两个矩阵 A、B 的行数、列数都相等，则称 A、B 是同型的矩阵。

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵：

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-1-3}$$

称为矩阵 A 与 B 的和，记作 $C=A+B$。

如果 A、B、C、0 都是 $m\times n$ 矩阵，则它们进行加法运算时，有如下性质：

(1) $A+B=B+A$；

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$；

(3) $A+0=0+A=A$。

其中，矩阵 0 为 $m\times n$ 的零矩阵。

2. 矩阵的减法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则称 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 A 的负矩阵，简记 $-A$。

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A-B$ 为：

$$A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n} \tag{1-1-4}$$

3. 数与矩阵的乘法

设 λ 是常数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 $(\lambda a_{ij})_{m\times n}$ 称为数 λ 与矩阵 A 的乘积，记为 λA，即：

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-1-5}$$

设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，λ、u 为常数，则有：

(1) $(\lambda u)A=\lambda(uA)=u(\lambda A)$；

(2) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$；

(3) $(\lambda+u)A=\lambda A+uA$；

(4) $1\times A=A$，$(-1)\times A=-A$。

4. 矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $C=AB$ 是 $m\times n$ 矩阵，$C=(c_{ij})_{m\times n}$。其中，c_{ij} 等于 A 的第 i 行与 B 第 j 列对应元素的乘积之和，即：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n) \tag{1-1-6}$$

【例 1-1-1】 设：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

试证：(1) $AB=0$；(2) $AC=AD$。

证明：

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$AD=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

故有：(1) $AB=0$；(2) $AC=AD$。

矩阵的乘法有如下性质：

(1) $(AB)C=A(BC)$；

(2) $A(B+C)=AB+AC$；

(3) $(B+C)A=BA+CA$；

(4) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$（其中，$\lambda$ 为常数）。

三、矩阵的转置

将矩阵 $A_{m\times n}$ 的行换成同序数的列、列换成同序数行的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的转置矩阵记作 A^{T} 或 A'，例如：

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}\quad 与\quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

矩阵转置有如下性质：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$；

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

四、分块矩阵

如果用若干条贯穿矩阵的横线和纵线将矩阵 A 分成若干个小块，这样的小块就称为矩阵 A 的子块或子矩阵，而 A 可以看成是以子块为元素的矩阵，称 A 为分块矩阵。

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 6\\ 3 & 5 & 0 & 2\\ 1 & 4 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=(1),A_{12}=(-1\quad 2\quad 6)$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix},A_{22}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

第二章　张量基本概念

一、矢量与张量

力学中常用的量可以分成几类：① 只有尺寸大小而没有方向的物理量称为标量，通常用一个字母来表示，如温度 T、密度 ρ、时间 t 等。② 既有大小又有方向的物理量称为矢量，常用黑体字母（或字母加上一箭头）来表示，如矢径 $\boldsymbol{r}$（或 $\vec{r}$），位移 $\boldsymbol{u}$（或 $\vec{u}$）等。③ 具有多重方向性的更为复杂的物理量称为张量，常用黑体字母（或字母下加一横）来表示，如一点的应力状态可以用应力张量来表示，它具有二重方向性（应力分量的值与截面法线方向及应力分解方向有关），是二阶张量，可记为 $\boldsymbol{\sigma}$（$\underline{\sigma}$）。

矢量可以在参考坐标系中分解。例如，图 1-2-1 中 p 点的位移 $\boldsymbol{u}$ 在笛卡尔坐标系（x_1，x_2，x_3）中可分解为：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{e}_3=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{e}_i \tag{1-2-1}$$

式中，$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 是位移的三个分量；$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 是沿坐标轴的三个单位矢量。

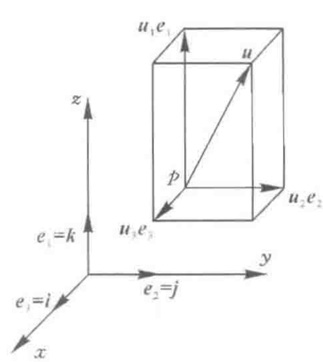

图 1-2-1　点的位移分解图

由此可以引出矢量的三种记法：

(1) 实体记法：把矢量或张量的整个物理实体用一个黑体字母分解式记法，同时写出矢量或张量的分量和相应分解方向的基矢量。

(2) 分量记法：把矢量或张量用其余部分量的集合来表示，省略相应的基矢量。如用三个位移分量 $\boldsymbol{u}_i$（$i=1,2,3$）的集合来表示 $\boldsymbol{u}$。

下面我们来讨论记法中广泛采用的指标符号。

对于一组相关性质的 n 个量可以用相同的名字加不同的指标来表示。例如，n 维空间中的向量 a 有 n 个分量，可记为：a_1，a_2，a_3，…，a_n，或近一步缩

写成 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$。

对笛卡尔坐标系中的量，指标通常写在名字的右下方，称为下指标。后面括号里用 $i=1,2,\cdots,n$ 表明该指标的取值范围。当 i 取自然序列 $i=1,2,\cdots,n$ 时，n 就等于空间维数。例如，三维空间中矢量 a 的分量为 $a_i(i=1,2,3)$。以下约定：如果不标明取值范围，则拉丁指标 $i,j,k\cdots$ 均表示三维指标，取值 $1,2,3\cdots$。希腊指标 $\alpha,\beta\cdots$ 均表示二维指标，取值 $1,2\cdots$。这种名字加指标的记法称为指标符号。

下面通过例子来说明指标符号的正确用法：

(1) 三维空间中任意点 P 的三个直角坐标通常记为 x、y 和 z，用指标符号可缩写成：

$$x_1=x,x_2=y,x_3=z$$

(2) 两个矢量 α 和 β 可记为 a_i 和 b_i。它们的数量积为：

$$\alpha\cdot\beta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i \tag{1-2-2}$$

(3) 采用指标后的线性代换：

$$\begin{cases}x_1{}'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_{1i}x_i\\x_2{}'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=a_{2i}x_i\\x_3{}'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=a_{3i}x_i\end{cases} \tag{1-2-3}$$

上式可简写成：

$$x'_i=a_{ij}x_i \tag{1-2-4}$$

这里的 i 称为自由指标，j 是哑指标（哑标）。在表达式或方程中的自由指标可以出现多次，但不得在同项内重复出现两次。自由指标表示：若轮流取该指标范围内的任何值，关系式将始终成立，即式(1-2-4)可写成（只要 k 和 i 的取值范围相同）：

$$x_k{}'=a_{kj}x_j$$

换标时应注意：

① 同时取值的指标必须用同名来表示，而独立取值的指标则应防止重名。因为当指标 i 取 1 时，表达式中的同名指标 i 都应取 1，而其他异名指标 j 或 k 则可独立地取 1 或 2 或 3。例如，在某个推导过程中，要把两个原来记为 a_i 和 b_i 的矢量相加，则根据对应分量相加的原则，指标应取同名而写成 $c_i=a_i+b_i$ 或 $c_j=a_j+b_j$。反之，若要把某矢量的分量写成 a_i 和曾记为 b_i 的另一个矢量逐个两两地相乘，则指标应取异名而写成 a_ib_j，当 i 和 j 轮流取 1、2、3 时，a_ib_j 共表示九个数。

② 自由指标必须整体换名，即把方程或表达式中出现的同名自由指标全部改成同一个新名字。而哑指标可以成对地局部换名，表达式中不同项内的同名哑指标必要时可以换成不同的新名字，或者有的换名，有的保留老名字。因为根据求和约定，哑标的有效范围仅限于本项。

(4) 指标符号同样适用于微分关系。例如，三维空间中线元长度 $\mathrm{d}s$ 和其分量 $\mathrm{d}x_i$ 之间的关系 $(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2$ 可写成：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i \tag{1-2-5}$$

再如，多变量函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全微分可写成：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-2-6}$$

(5) 可用同项内出现两对（或几对）不同的哑标的方法来表示多重求和。例如：

$$a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j \tag{1-2-7}$$

表示共有九项求和。

(6) 哑标只能成对地出现，若要对在同项内出现两次以上的指标进行遍历求和，则必须加求和号。例如：

$$a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_ic_i \tag{1-2-8}$$

(7) 当自由指标恰好在同项内重复出现两次时，为了避免混淆，应特别申明：对该指标不做遍历求和；或者在该指标下加一横，表示取消求和约定。

例如：$s=a_{ii}$ 表示 $s=a_{11}+a_{22}+a_{33}$，但 $c_i=a_{ii}+b_i$ 则表示如下三个方程：

$$c_1=a_{11}+b_1;c_2=a_{22}+b_2;c_3=a_{33}+b_3$$

一般来说，不能由等式

$$a_ib_i=a_ic_i \tag{1-2-9}$$

“两边消去 a_i”而导出 $b_i=c_i$。但是，如果 a_i 可以任意取值而式(1-2-9)始终成立，则只要取 $a_1=1,a_2=a_3=0$，就可由式(1-2-9)导出 $b_1=c_1$。同理，若取 (a_1,a_2,a_3) 为(0,1,0)和(0,0,1)，则可导出 $b_2=c_2$ 和 $b_3=c_3$，所以式(1-2-9)成立的前提是“a_i 任意”而不是简单地“消去 a_i”。

综上所述，通过哑指标可把许多项缩写成一项，再通过自由指标又可以把许多方程缩写成一个方程。一般来说，在一个用指标符号写出的方程中，若有 k 个独立的自由指标，它们的取值范围是 $1\sim n$，则这个方程代表了 n^k 个分量方程。在方程某项中若同时出现 m 个取值范围为 $1\sim n$ 的哑指标，则此项表

示互相叠加的 n^m 个项，显然，指标符号使书写变得十分简洁，但也必须十分小心，因为许多重要的含义往往只表现在细微的变化上。因此，熟练地使用指标符号，分清自由指标和哑指标并正确地对它们进行换标，是张量分析入门时的基本功。

二、符号 $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{e}_{rst}$

符号 δ_{ij} 称为"Kronecker delta"，它的定义是：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{1-2-10}$$

该定义表明它具有对称性，与指标排列顺序无关，即：

$$\delta_{ij}=\delta_{ji} \tag{1-2-11}$$

δ_{ij} 的分量集合对应于单位矩阵。例如，在三维空间中：

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-2-12}$$

利用 δ_{ij} 可以把线元长度平方的公式(1-2-5)改写成：

$$\mathrm{d}s^2=\delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{1-2-13}$$

对右端两对哑指标求和，并利用式(1-2-10)不难验证上式。这里的 δ_{ij} 起着换标作用，即如果 δ 符号的两个指标中有一个和同项中其他因子指标相重，则可以把该因子的那个重标替换成 δ 的另一个指标，而 δ 自动消失。这样：

$$\mathrm{d}s^2=\delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j=\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_j$$

类似地有：

$$\begin{aligned}\delta_{ij}a_{jk}=a_{ik}\ \delta_{ij}a_{ik}=a_{jk}\\ \delta_{ij}a_{kj}=a_{ki}\ \delta_{ij}a_{ki}=a_{kj}\end{aligned} \tag{1-2-14}$$

以及

$$\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik};\quad \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}=\delta_{il} \tag{1-2-15}$$

所以，δ_{ij} 也称为换标符号。

符号 e_{rst} 定义是：

$$e_{rst}=\begin{cases}1 & (r,s,t)=(1,2,3)\text{ 或}(2,3,1)\text{ 或}(3,1,2)\\ -1 & (r,s,t)=(3,2,1)\text{ 或}(2,1,3)\text{ 或}(1,3,2)\\ 0 & r,s,t\text{ 中任意两个指标相同时}\end{cases} \tag{1-2-16a}$$

或

$$e_{rst}=\frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)\quad (i,j,k=1,2,3) \tag{1-2-16b}$$