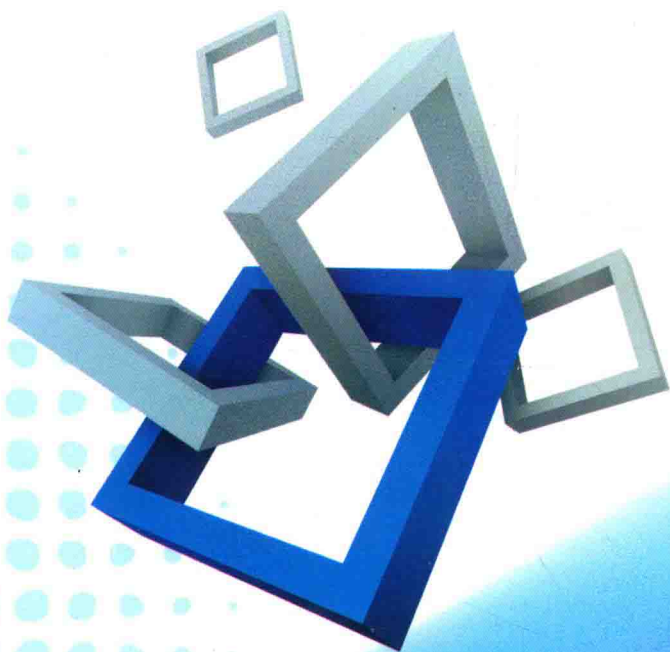


主编◎马 复 顾继玲

新世纪基础教育课程改革 实践与探索

数学 (7~9年级) 第10辑

INSHIJI JICHU JIAOYU KECHENG GAIGE | SHUXUE (7~9 NIANJI)
SHIJIAN YU TANSUO | DI10JI



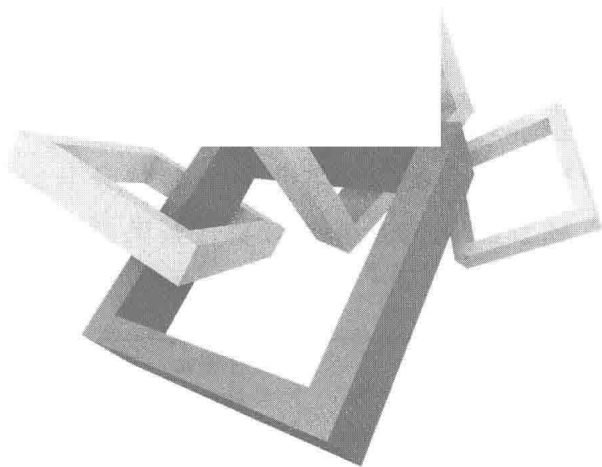
北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

主编◎马 复 顾继玲

新世纪基础教育课程改革 实践与探索

数学(7~9年级)第10辑

INSHIJI JICHU JIAOYU KECHENG GAIGE | QISHUXUE (7~9 NIANJI)
SHIJIAN YU TANSUO | DI10JI



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

新世纪基础教育课程改革实践与探索·数学7~9年级·第10辑/马复, 顾继玲主编. —北京: 北京师范大学出版社, 2018. 11

ISBN 978-7-303-24244-3

I. ①新… II. ①马… ②顾… III. ①中学数学课—教学改革—初中—文集 IV. ①G633-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 240507 号

出版发行: 北京师范大学出版社 <http://www.bnupg.com>
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 北京京师印务有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 787 mm×1092 mm 1/16
印 张: 30
字 数: 762 千字
版 次: 2018 年 11 月第 1 版
印 次: 2018 年 11 月第 1 次印刷
定 价: 62.00 元

策划编辑: 王永会	责任编辑: 王玲玲
美术编辑: 王蕊 胡美慧	装帧设计: 汉风唐韵
责任校对: 段立超 陈民	责任印制: 孙文凯 窦春香

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

编者的话

教学设计一定程度上反映了教师的教学理念，也反映了教师对教学内容的理解和把握，对优秀课例进行阅读研究，不仅能够学习借鉴他人的优点，同时这些优秀课例也是个人反思的载体，对照他人，反思、提高、改进实践。这也是我们出版案例集的主要目的。

本书分为获奖课例及其点评与“杰出教师工程”课题报告（“新世纪初中数学杰出教师发展工程”简称为“杰出教师工程”）两部分。

第一部分：获奖课例及其点评。选取了第六届全国新世纪杯初中数学优质课评比与观摩活动中的部分获奖课例。此次我们对书稿的体例做了适当的改变，将所有教学主题从核心概念的角度分为“运算能力——代数运算”（数的运算、式的运算、方程组的求解等），“数学抽象——关系模型”（方程、不等式、函数等），“空间观念——图形性质、运动变化”（图形的性质、判定、变换等），“几何直观——函数图象性质、坐标”（函数图象、平面直角坐标系等），“应用意识——问题解决”（应用、综合与实践等）五类，将教学设计分别归入上述五类中。首先，在每一个核心概念下，对其进行阐释和分析，结合案例给出教学要求和教学建议，期望给教师教学提供帮助。其次，对相应的教学设计进行了点评和分析，其中有很多教学设计针对的教学内容是相同的，我们将其合并放置并进行评析，这样也方便教师比较阅读。建议教师在阅读的过程中，将教学设计和前面的核心概念论述结合起来，可以向自己设问，如这个教学内容中蕴含了哪些核心概念，这个教学设计展现得充分吗？这些核心概念本质上体现的是什么是核心概念的教学更为关注什么？……

第二部分：“杰出教师工程”课题报告。选取了“杰出教师工程”第二期部分学员的课题报告。“杰出教师工程”旨在为这些教师创造更好的发展环境，搭建促进他们成长的平台。在研修过程中，课题研究是其中的一项活动，学员在教材组教师的指导下，经历了课题研究的过程。这些课题都源于教学实践，很好地体现了课题研究和教学研究的结合，希望这些内容可以给广大教师提供一些课题研究的选题和方法。

由于时间和条件的限制，定有一些较好的教学设计和成果未被我们发现，

未能选入本书，但我们相信，优秀的作品一定会在教学中发挥其应有的价值，也一定会在合适的时机得以展现。

在本书编辑出版的过程中，北京师范大学（简称北师大）出版社、北师大版教材编写组、北师大数学工作室和部分一线教师付出了艰辛的劳动，在此一并致谢。

在成书过程中尽管我们反复阅读审核，但百密难免一疏，书中定有不足，敬请读者批评指正。

目 录

获奖课例及其点评

运算能力——代数运算

- 初中生数学运算素养及其培育 河北省石家庄市教育科学研究所 张惠英 (3)
- 有理数的乘法 (一) 辽宁省东港市第四中学 徐祥莉 (11)
- 有理数的除法 福建省福安市第三中学 缪凌颖 (18)
- 有理数的除法 河北省保定市清苑区魏村中学 赵俊伟 (25)
- 有理数的除法 辽宁省沈阳市东北育才双语学校 代丽宅 (29)
- 有理数的除法 青海省海东市平安区古城乡中心学校 范生丽 (35)
- 完全平方公式 山西省太原市第六十三中学 王 敏 (39)
- 实 数 陕西师范大学附属中学 武 玺 (44)
- 因式分解 甘肃省白银市靖远县第五中学 王福平 (48)
- 用配方法求解一元二次方程 (一) 辽宁省朝阳市第一中学 于 婷 (53)

数学抽象——关系模型

- 数学抽象的意义与教学思考 江苏省第二师范学院 章 飞 (59)
- 一次函数与正比例函数 重庆市商务学校 罗定昆 (62)
- 一次函数与正比例函数 辽宁省辽阳市第九中学 李 岚 (68)
- 一元一次不等式组 (一) 安徽省宿州市宿城第一初级中学 孙威威 (73)
- 二次函数 山西省太原市第六十中学 吴瑞霞 (76)
- 二次函数 西北工业大学附属中学 裴利纳 (82)

空间观念——图形性质、运动变化

- 让思维和想象与图形一起在空间起舞 首都师范大学 刘晓玫 (89)
- 轴对称现象 辽宁省昌图县佟韦学校 刘 妍 (95)
- 轴对称现象 河南省开封市第十三中学 王国利 (102)
- 两条直线的位置关系 (一) 宁夏回族自治区中卫市第四中学 张艳霞 (112)

两条直线的位置关系 (一)	青海省西宁市湟中县上新庄镇上新庄初级中学	马俊秀 (117)
圆周角和圆心角的关系 (一)	黑龙江省大庆市万宝学校	刘元泽 (125)
探索勾股定理	广东省佛山市南海区石门实验学校	黄琼 (132)
探索勾股定理 (一)	江西省吉安市第八中学	肖春典 (139)
探索勾股定理 (一)	重庆市巴蜀渝东中学	李芳 (147)
三角形内角和定理 (复习课)	广东省佛山市桂江第一初级中学	王秀秀 (153)
锐角三角函数 (一)	广东省佛山市顺德区莘庄中学	刘俊 (161)
比较线段的长短	河南省郑州市第七十六中学	孙蕊 (166)
比较线段的长短	江西省抚州市临川第二中学	张先龙 (173)
比较线段的长短	重庆市第二外国语学校	代雨秋 (179)
角的比较	黑龙江省大庆市第三十六中学	王艳波 (185)
矩形的性质与判定 (一)	河南省焦作市第十七中学	王瑞霞 (189)
平行四边形的判定 (一)	贵州省贵阳市第七中学	侯年伟 (195)
平行四边形的判定 (一)	陕西省城固县朝阳初级中学	陈超 (199)
平行四边形的判定 (一)	辽宁省本溪市第十二中学	孟丽娜 (205)
平行四边形的判定 (一)	山西省晋中市祁县第五中学	程家梅 (212)
平行四边形的判定 (一)	四川省成都市树德实验中学	罗晓龙 (219)
“平行四边形的判定 (一)” 案例点评及教学建议	北京师范大学出版社	王建波 (226)
为什么要证明	贵州省贵阳市第十八中学	胡兴慧 (228)
为什么要证明	山东省青岛市崂山区第三中学	王昌涛 (232)
为什么要证明	四川省成都市玉林中学	黄朝宇 (238)
为什么要证明	宁夏回族自治区银川市唐徕回民中学	梁粒波 (243)
“为什么要证明” 案例点评及教学建议	湖北省宜昌市长江中学	程燕云 (246)
投影 (一)	宁夏回族自治区银川市唐徕回民中学	丁杨 (248)
探索三角形全等的条件 (一)	江西省九江市第三中学	刘玲 (254)
探索三角形全等的条件 (一)	甘肃省张掖市甘州中学	陈黎明 (259)
探索三角形全等的条件 (一)	江西省贵溪市实验中学	程仁喜 (265)
探索三角形全等的条件 (一)	广东省揭阳市揭东区云路镇洪住中学	吴海平 (275)
探索三角形全等的条件 (一)	河南大学附属中学	吴伟霞 (282)
探索三角形全等的条件 (一)	宁夏回族自治区中卫市第二中学	杨永斌 (289)

几何直观——函数图象性质、坐标

基于几何直观的教学设计——以平面直角坐标系为例	北京师范大学	蔡春霞 (294)
平面直角坐标系 (一)	广东省深圳市罗湖外语学校	卢美红 (299)

平面直角坐标系(一)	····· 山西省太原市第三十六中学	陈越	(305)
平面直角坐标系(一)	····· 陕西省西安高新第一中学	邹国胜	(309)
平面直角坐标系(一)	····· 贵州省贵阳乐湾国际实验学校	余治敏	(314)
反比例函数的图象与性质	····· 山东省济南第二十七中学	张钊	(322)

应用意识——问题解决

认识“综合与实践”	····· 南京师范大学	马复	(331)
制作一个尽可能大的无盖长方体形盒子	····· 陕西省宝鸡市店子街中学	任晓虹	(335)
平面图形的镶嵌	····· 中科院深圳先进技术研究院实验学校	唐立伟	(341)
“综合与实践”案例点评	····· 南京师范大学	马复	(347)

“杰出教师工程”课题报告

导 读	·····		(350)
初中数学“猜想—探索”式教学模式研究	····· 山东省青岛市教育科学研究院	安志军	(352)
初中数学课堂教学合作学习管理方式探索	····· 甘肃省兰州市第七中学	靳胜军	(363)
基于实例的函数概念理解的对比研究	····· 宁夏回族自治区银川市回民中学	李慈秀	(368)
初中数学“拓展课”的教学设计及实践研究	·····		
·····	····· 重庆市大渡口区教师进修学校	廖帝学	(382)
基于教材的初中数学“五学”课堂教学模式的实践研究	·····		
·····	····· 福建省尤溪县文公初级中学	刘秀妹	(397)
Pad 互动功能在数学课堂应用的实效性研究	····· 辽宁省沈阳市博才中学	邵爱平	(406)
初中数学教师以自己为资源追求专业化发展的途径研究	·····		
·····	····· 山东省菏泽市牡丹区教育局教研室	孙道斌	(413)
初中数学教学中引导学生积累数学基本活动经验的策略研究	·····		
·····	····· 陕西省宝鸡市龙泉中学	史晓锋	(424)
初中数学微课学习资源的设计开发研究	····· 河北省邯郸市肥乡区第三中学	王世昌	(437)
运用“有效性提问”提高数学课堂效率	·····		
·····	····· 内蒙古自治区包头市包钢实验军校	王文	(447)
新时代背景下小升初数学衔接问题研究	····· 河南省实验中学	袁晓亮	(453)
促进初中学生对函数概念的理解	····· 江西省萍乡市第四中学	张燕	(462)

运算能力
——代数运算

初中生数学运算素养及其培育

河北省石家庄市教育科学研究所 张惠英

数学是研究数量关系和空间形式的科学，自数的产生开始，就有了数学运算，几乎每个人在孩童时都会用十个手指算数目，从那时起我们就经历了人生第一次数学运算。随着年龄的增长，我们发现无论是在幼儿园，还是在小学、初中、高中、大学，数学运算一直伴随着我们，日常的生产生活也离不开数学运算。我们知道，太阳系八大行星之一海王星，就是在运算的基础上于1846年被发现的，今天的互联网大数据、高科技的发展等也都离不开数学运算，可以说数学运算无处不在。运算能力是《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称《标准(2011年版)》)的十个核心概念之一，数学运算也是《普通高中数学课程标准(2017年版)》要求落实的六个数学学科核心素养之一。足见数学运算对人和社会的发展起着重要的作用。

一、对数学运算的认识

(一)数与运算

数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等。运算从整体上看包括两个方面：一是运算对象，二是运算规律。数学运算是一种解决问题的工具和手段，教学对数学运算在结果性目标上一向要求比较高，一般要求学生要达到掌握的程度。掌握一种运算是指要会算并明了算理。在过程性目标中，强调学生经历一种运算规则的建立过程，理解其算理。回顾数学的发展史，可以说没有运算就没有数学。这些都足以说明数学运算作为数学学科核心素养是当之无愧的。从具体的运算对象来看，数学运算包括数的运算、式的运算和数学关系的运算。随着数系的扩充，数的运算不断增加新的运算对象，新的运算又不断与原有的运算进行类比，并不断推广。例如，有理数的运算类比小学学过的算术，再考虑有理数的符号从而建立运算法则，实数的加、减、乘、除、乘方运算则也是类比有理数的运算来进行的，而反过来看正是不断产生运算的新的矛盾，才使得数系不断扩充。在历史上，因为类似于计算 $3-5$ 不够减了，产生了负数；平方为2的数不能写成两个整数的比的形式产生了无理数，进而带来了第一次数学危机；找不到方程 $x^2+1=0$ 的实数解产生了虚数。正是这一系列的运算矛盾，才导致了数系的不断扩充。也就是说数学运算的发展与数系的扩充是相互促进、相辅相成的。

(二)“式”与运算

“式”是数的推广，静态地看代数式就是一个“数”，动态地看它可以表示任何数，如代数式 a 。再如，代数式 $2x+1$ ，静态地看 $2x+1$ 表达的是一个运算关系，动态地看它是一个算

法，我们对代数式 $2x+1$ 中的 x 赋值，经过这个算法(求 x 的 2 倍再加 1)就可以输出一个运算的结果，这实质上是通过这个算法求代数式的值，当然正是由于“式”的两重性，数学中需要花很多的精力研究代数式本身的运算，即以代数式为运算对象类比数的运算进行式的加、减、乘、除、乘方等运算。在研究多项式乘法的逆过程中，产生了因式分解这样一个整式恒等变形的运算，因式分解给解高次方程打开了一扇通过降次求解的窗。

(三)数学关系与运算

量与量之间的关系是代数研究的重要对象，其中方程、不等式、函数关系都是刻画和解决现实问题的重要数学模型。其中解方程本身就是重要的运算律在发挥作用，“降次”和“消元”分别是解“高次”方程和“多元”方程(组)的通法，转化与化归的数学思想起了关键的作用。不等式的性质也是数的运算性质的推广，解不等式就是依据不等式的性质进行变形运算。而确定函数关系、计算函数的值、研究函数的性质都离不开数学运算的支撑。

(四)图形性质与运算

数学运算在图形与几何领域也起着奠基的作用。三角形内角和等于 180° ，勾股定理都是从运算的角度发现的；图形性质的探索、利用几何知识解决问题，如利用相似计算不可测量的物体的高度，求角和距离等都需要数学运算。

(五)数学运算与数据分析

从数据的收集到整理，到发现数据中蕴含的信息直至做出合理的统计推断，整个数据分析的过程离不开运算，洞察一组数据的集中水平，需要计算其众数、中位数和平均数，刻画一组数据的波动水平需要计算其方差、标准差等数据特征。随机事件发生可能性的大小也需要通过整理和计算实验数据构建恰当的概率模型来获得。可以说数学运算是数据分析的“幕后英雄”。

总之，数学运算是学习中学数学各个分支的基础，数学运算法则、规律是展开数学运算的理论依据。

二、数学教学中数学运算的现状

(一)数学运算成为数学教师的“痛点”

在当前的数学教学中，教师对数学运算可以说足够重视，要求学生记忆运算法则，进行适量的练习都是可以理解的。但数学运算的教学仍存在不少问题，首先，教师自己对数学运算产生的人文背景，相关数学文化，运用范围、应用价值、研究脉络及其中蕴含的数学思想方法没有形成一个完整的认识，这就造成了学生学习运算时“先天不良”。例如，许多教师在教授一些运算法则时，让学生感知得不够充分，仓促给出结论，让学生记忆、练习，做了不少夹生饭。其次，数学运算本身比较抽象，教师不能结合几何直观、多媒体软件等手段降低学生学习的难度。笔者听过许多运算课，如用配方法解一元二次方程，由于符号多，运算高度形式化，讲解不充分，造成半数初中生到初中毕业时仍不能准确地进行配方。再如，对数运算的教学，本来对数运算的定义来自指数式，教师不注意用准确的数学文字语言表达这种指数、对数转化，只是从符号到符号的堆积，教师写了一黑板符号，学生云里雾里，一旦真让学生自主运算，就会错误百出。许多教师埋怨：“我讲了多少遍了，考了多少遍了，你们还是做不对。”数学运算就这样成了数学教师教学的“痛点”。

(二)数学运算成为学生数学学习的“恐慌区”

尽管学生在数学运算上下了很大功夫，甚至做了海量的题目，但仍有许多学生数学运算素养匮乏，一旦遇到与数学运算有关的问题就怕麻烦，怕白费力气，怕运算出现错误。很多学生一朝被蛇咬，十年怕井绳，数学运算成为许多学生数学学习的“恐慌区”。下面是笔者做的一个关于数学运算的调查，对象是高一入学不久的学生，学生的回答出乎我们的预料。调查时发放问卷 196 张，收回 196 张，41% 的学生不知道运算法则是什么，其中有的写出了一堆三角函数诱导公式、对数的运算性质等，38% 的学生认为自己在做数学运算时经常出错，经常抄错数。(图 1 至图 3)

年级: 高一 姓名: 梁俊

1. 到现在为止，在数学学科中，你都学习了哪些类型的运算，请举例说明。

指数运算 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $a^x \div a^y = a^{x-y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$
对数运算 $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ $\log_a b = \log_a b$ $\log_a a = 1$ $a^{\log_a b} = b$ $\log_a a^x = x$
~~三角函数~~ $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
 $\log_a M^x = x \log_a M$

2. 请写出你学过的所有运算法则。

$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$
 $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$
 $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$
 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$

3. 你在数学运算中有哪些困难，请举两个你认为最困难的例子。

1. 运算中速度最大的经常会算错。
2. 题中的有关知识点容易弄混。
3. 有的题目条件写的不齐全。

图 1

调查问卷

年级: 高一 姓名: 刘思佳

1. 到现在为止，在数学学科中，你都学习了哪些类型的运算，请举例说明。

加法、减法、乘法、除法及最基本的运算
一次函数、二次函数、反比例函数是初中学过的运算
幂函数、指数函数、对数函数以及三角函数高中学过的运算

2. 请写出你学过的所有运算法则。

$a \times b + a \times c = a \times (b+c)$ $a \times b \div c = (a \times b) \div c$
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
 $\sin(\alpha - \pi) = \sin \alpha$ $\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$ $\tan(\alpha - \pi) = \tan \alpha$

3. 你在数学运算中有哪些困难，请举两个你认为最困难的例子。

在数学运算中，最困难的是对于数的运算经常算错，抄错数等不细心的问题，诸如公式记混记错导致最后结果不对，这也是一个问题。

图 2

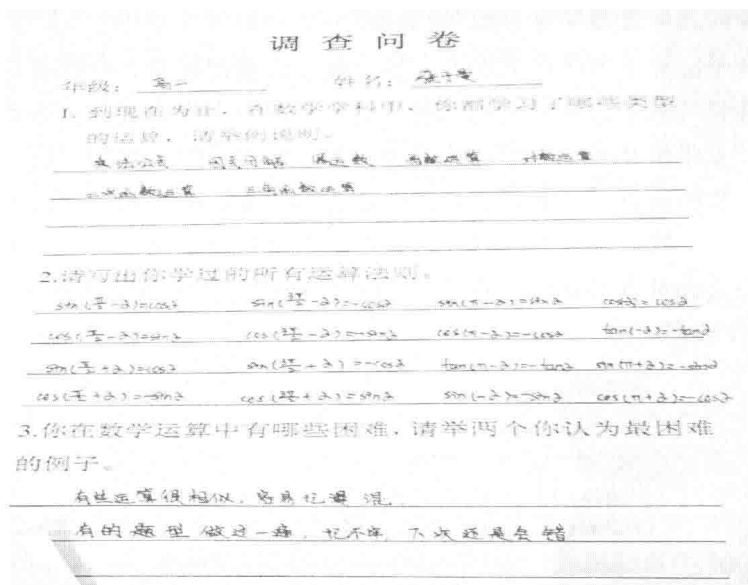


图 3

(三) 学生缺乏数学运算素养的原因

学生运算能力低下, 原因是多方面的. 一方面是因为教师的数学运算素养不高, 对数学运算教学的认识是割裂的, 不能从整体观和方法论的层面引导教学; 另一方面是因为学生没有养成良好的学习习惯, 还未看清运算对象就匆忙“上阵”, 产生了不必要的错误. 例如, 分式化简时, 很多学生都出现了如下错误.(图 4)

例 1 分式化简时常见错误之一.

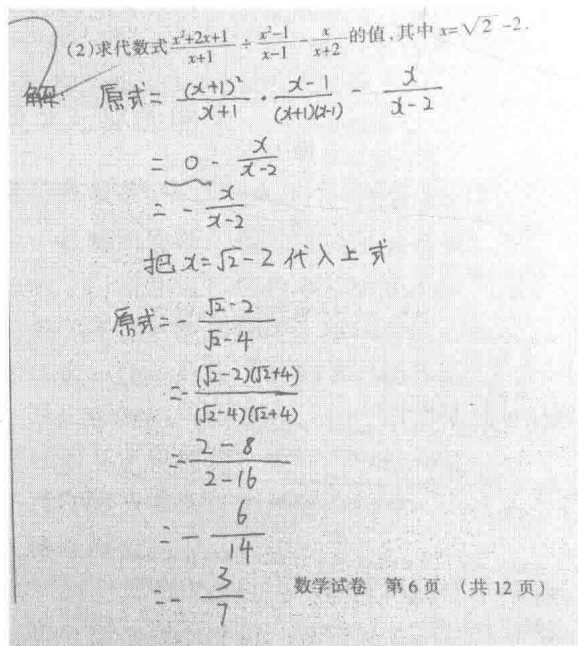


图 4

错因：很多学生都认为原分式中前一项化简的结果等于0，即分子、分母一样，约分后的结果等于0。笔者访谈了得此结果的一个女生，问：“你化简时前一部分： $\frac{(x+1)^2}{x+1}$ · $\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$ 得0的理由是什么？”答：“分子、分母一样，抵消了就没有了，所以想都没想就得了0。”如果学生能够再深入思考一下，就会明白前一部分化简的是一个分式，分式的值等于0，必须分子为0(分母不为0)。显然学生只是为了运算而运算，对“运算”本身的认知不清晰，缺乏数学运算素养。

例2 二次函数表达式转化成顶点式常见错误之一。(图5)

$$\begin{aligned}
 (3) \quad y &= -\frac{5}{2}x^2 - 4x + 1 \\
 h &= -\frac{-4}{2 \times \frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \\
 k &= \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times \frac{5}{2} \times 1 - 16}{4 \times \frac{5}{2}} = \frac{10 - 16}{-10} = \frac{3}{5} \\
 y &= \frac{5}{2} \left(x - \frac{4}{5} \right) - 5
 \end{aligned}$$

图5

错因：一部分学生对二次函数顶点式的解析式不理解，处于死记硬背的水平。这个学生说：“老师我没计算错，怎么还是错了，能代入公式求 h 、 k ，但有时忘记了平方，做着做着二次代数式变成了一次式。”

例3 二次函数表达式转化成顶点式常见错误之二。(图6)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= 2x^2 - 5x + 9 \\
 &= 2 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} \right) + 9 \\
 &= 2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{25}{2} + 9 \\
 &= 2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{25}{2} + 9
 \end{aligned}$$

图6

错因：一部分学生对配方的步骤很清楚，认为自己会配方法，可还是错了，觉得很受打击。主要是没有注意中间细节，提二次项系数时，一次项丢了字母毫无察觉，后面也有错误， $\frac{25}{4}$ 应为 $\frac{25}{16}$ 。这些错误说明学生并未从根本上理解方法，只是简单套用。也有个别学生是因为粗心丢了 x 。实际上，为了教配方法而强调配方法的教学，并不能保证学生学会配方法，教师必须让学生从理解算理的角度去学习。

例 4 二次函数表达式整理过程中常见错误之一。(图 7)

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= x \cdot \frac{60-x}{8} \\
 &= \frac{60x-x^2}{8} \\
 &= 480x-8x^2 \quad ? \\
 y &= -8x^2+480x \\
 &= -8(x^2-60x)
 \end{aligned}$$

图 7

错因：“除以一个数等于乘这个数的倒数”是什么意思。对于除法的这个运算法则，学生仍然处于死记硬背的状态，没有认清运算的对象是谁。

例 5 二次函数表达式整理过程中常见错误之二。(图 8)

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{60-x}{3} \cdot x \\
 &= -3x^2+180x = -3(x-30)^2+300 \\
 \because -3 < 0, \therefore S \text{ 有最大值.} \\
 \therefore \text{当 } x=30 \text{ 时 } S \text{ 有最大值} \\
 \therefore S_{\text{max}} = 300 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

图 8

错因：学生认为这是分子、分母同乘 3 后的结果，而事实上这是分子乘 3，分母除 3 后得到的结果。

上述这些问题之所以产生，责任在学生吗？现在有些教师教学时追求大容量、快节奏，不重视课堂留白，不重视学生对新知识的理解和建构。因此，出现这些运算错误，也不足为怪。

三、学生数学运算素养培育的途径

(一) 以问题驱动教学，使学生完整地认识一种运算

完整地认识一种运算是培养数学运算素养的需要，怎样才算完整地认识一种运算呢？当然，必须要知道它的来龙去脉，知道它的大体脉络。(图 9)

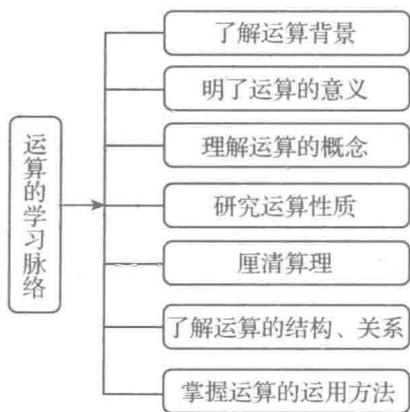


图9 完整地认识一种运算

数学运算，不仅是解决某些与运算有关的问题的工具，同时还可以发展学生的数学思维，使学生养成遇到问题进行程序化思考的习惯，培养学生严谨求实的科学态度。在教学中，教师要设置恰当的问题或问题情境，引导学生了解运算背景，明了运算的意义，理解运算的概念，知道定义了一种运算就要研究它的运算性质（一般从定义出发），了解该运算与相关运算的关系，并在头脑中建构新的运算结构或体系。学生要学会运用运算解决问题，明白每一步运算推演的过程所运用的算理。

（二）详细剖析运算法则的获取过程，关注新旧知识的内在联系

数学家李大潜说过：“学习数学是不能加塞的。”说明联系性是数学的一大特点，初等数学运算是一个联系的整体。其中加减互逆，乘法的本质是连加，除法是乘法的逆运算……几乎每一个新的数学运算都与学生以前学过的运算有关联。因此数学运算的教学要紧紧抓住这些联系性，创设问题或问题情境，帮助学生发现新旧运算之间的联系。数学教育家波利亚曾指出，当新旧知识发生联系的时候，学生的学习就真的发生了。教学中教师的任务就是要用问题使学生发现这些联系。例如，在学习有理数的乘法时，有位教师设计了如下问题。

1. 计算。

$$(-5) + (-5);$$

$$(-5) + (-5) + (-5);$$

$$(-5) + (-5) + (-5) + (-5);$$

$$(-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5).$$

2. 猜想下列各式的值。

$$(-5) \times 2; (-5) \times 3;$$

$$(-5) \times 4; (-5) \times 5.$$

在问题1的计算过程中，学生可能会发现加法与乘法的联系，得出 $(-5) \times 2$ ， $(-5) \times 3$ ， $(-5) \times 4$ ， $(-5) \times 5$ 。这是本节课要研究的新内容。学生学过正整数的乘法，一个负数与一个正数该如何做乘法呢？教师通过问题2让学生猜一猜，并让学生说出猜想的结果和依据。这时，学生会依据乘法与加法的关系来考虑，即：

$$\text{因为 } (-5) + (-5) = -10, \text{ 所以 } (-5) \times 2 = -10;$$

因为 $(-5)+(-5)+(-5)=-15$ ，所以 $(-5)\times 3=-15$ ；

因为 $(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=-20$ ，所以 $(-5)\times 4=-20$ ；

因为 $(-5)+(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=-25$ ，所以 $(-5)\times 5=-25$ 。

这样，学生自然会理解有理数中负数与正数相乘的运算法则：异号得负，绝对值相乘。这也说明，在数学运算的教学中，学生头脑里所拥有的从来都不是一张白纸，只要教师给学生机会，在运算对象的获得和运算法则的得出等方面学生都是可以“有所作为”的。

(三)注重运用数学思想方法培养学生的数学运算素养

1. 数学思想方法是数学的精髓

数学运算离不开数学抽象、数学推理等数学思想的支撑。我们知道，研究代数运算问题时，一般是解决一个个问题后，紧接着研究一类问题，从而将问题一般化，获得一般规律。但有时也可以从一般到特殊发现运算规律，如完全平方和公式的教学可以从 $(a+b)(c+d)$ 出发，经过特殊化处理令 $c=a$ ， $d=b$ ，则 $(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$ ，这是一个演绎推理的过程。

2. 注重运用类比构造新运算

学习数学的经验告诉我们，借助类比思想可以发现新的数学研究对象，在数学运算中也一样，研究式的运算可以类比数的运算，解分式方程时可以类比解整式方程的方法。再如，向量加法的运算类比了数的运算，向量数乘类比了物理中力的做功。

3. 运用几何直观，帮助学生理解有关运算

几何直观是我们进行抽象的数、式、关系运算时的一个法宝，如在研究有理数的加法时我们可以借助数轴来分类定义，在研究平方差和完全平方公式时可以借助图形的面积加以解释，此外，还可以从形出发，分解因式。

事实上，转化与化归、分类讨论等数学思想也是处理数学运算问题的有效方法。例如，配方法本身就是一种化归。

通常，一些学生不注意运用数学思想方法来统领数学运算，看到运算的题目，拿来就算，只追求运算的速度，这样做的结果就是经常出现一些运算错误。这对学生数学运算素养的提升是没有帮助的。我们提倡当拿到一个运算题目时，要仔细观察其结构特点，尽可能运用相关的数学思想方法来分解它，使运算的过程成为一个综合的数学推理过程，让数学思想方法在求解过程中生根、开花。

总之，数学运算能力的培养离不开基本的数学思想方法的支撑。^①

^① 本书中的课例和课题报告都是全国各地一线教师的实践成果，在尊重作者成果和意愿的基础上，在选人本书时，为使全书体例大体一致，对个别体例和内容进行了润色。