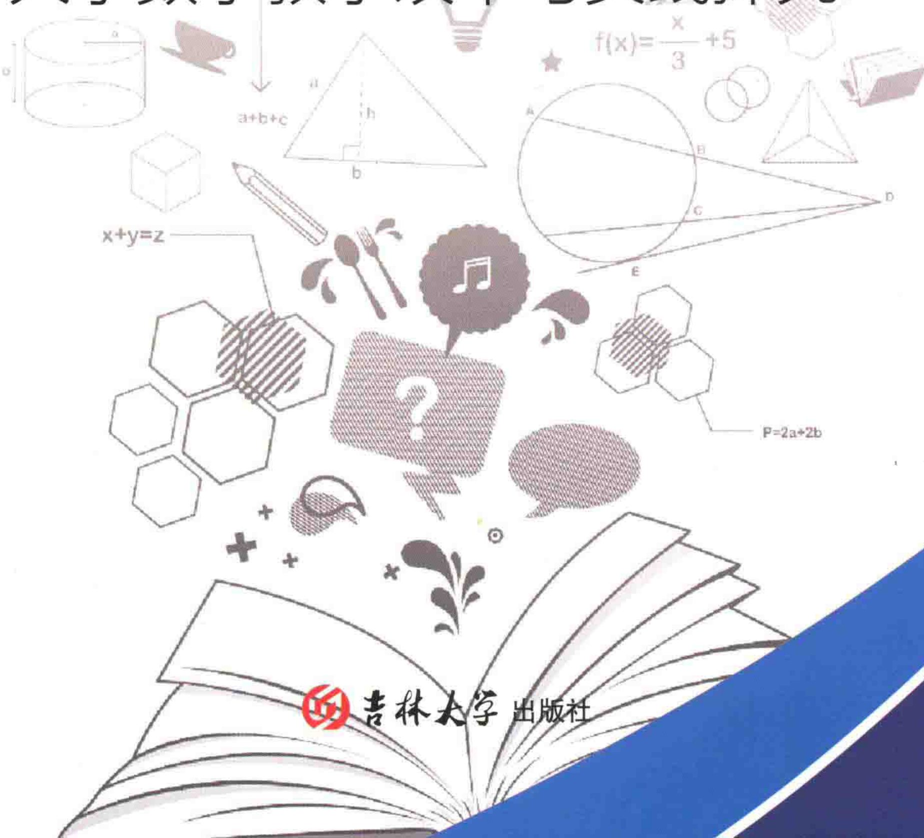
[redacted]

刘 莹 著

新时代背景下
大学数学教学改革与实践探究



吉林大学出版社

刘 莹 著

新时代背景下
大学数学教学改革与实践探究

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

新时代背景下大学数学教学改革与实践探究 / 刘莹著.—长春 : 吉林大学出版社， 2018.11
ISBN 978-7-5692-3701-6

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学—教学改革—研究—高等学校 Ⅳ. ①O13-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 257487 号

书　　名：新时代背景下大学数学教学改革与实践探究
XINSHIDAI BEIJING XIA DAXUE SHUXUE JIAOXUE GAIGE YU SHIJIAN TANJIU

作　　者：刘　莹　著
策划编辑：邵宇彤
责任编辑：张文涛
责任校对：陈　曦
装帧设计：优盛文化
出版发行：吉林大学出版社
社　　址：长春市人民大街 4059 号
邮政编码：130021
发行电话：0431-89580028/29/21
网　　址：http://www.jlup.com.cn
电子邮箱：jdcbs@jlu.edu.cn
印　　刷：三河市华晨印务有限公司
开　　本：710mm × 1000mm　　1/16
印　　张：11.75
字　　数：200 千字
版　　次：2019 年 4 月第 1 版
印　　次：2019 年 4 月第 1 次
书　　号：ISBN 978-7-5692-3701-6
定　　价：39.00 元

前言

大学数学课程，如高等数学、线性代数和概率统计，是高校专业发展中极为重要的公共基础课程。它不仅对后续学习的许多专业课程产生直接影响，而且对学生的理性思考、创新培养和优质素养培养起着重要作用，是保障大学人才培养质量的重要环节。但是，目前我国高校存在一些制约高校数学教育发展的问题，如落后的教学观念、个别教学方法和教学结构不合理等。因此，大学数学教育必须立足于国民经济和社会发展对人才的实际需求，不断改革创新，培养适应新时代发展的高水平、全方位的优秀人才。然而，大学数学教育改革是一项复杂的工作。在实施过程中，必须将一定的原则与学生的实际需求、素质教育的要求、社会对人才的需求、改革发展的需要、改革和更新课程内容联系起来，提高大学数学教育的质量，充分体现大学数学课程在大学教育中的重要作用，为社会培养高水平的数学人才。

基于上述情况，本书从大学数学教学的理论现状出发，阐述了数学的本质与教育意义、大学数学教学的理论基础以及大学数学教育的演变与发展现状，重点探讨了新时代背景下大学数学教学改革的相关内容，包括新时代背景下大学数学素质教育的加强、新时代背景下大学数学文化教育的融合、新时代背景下大学数学教学效率的提升、新时代背景下大学数学教学与现代教育技术的整合，并结合新时代背景下大学数学教学改革的实践案例，提出了新时代背景下大学数学教学改革的策略，以期能够在一定意义上提升大学数学的教学质量。在本书的编写过程中，参考借鉴了一些学者的研究成果，在此对这些学者表示衷心的感谢。另外，由于时间及编者水平所限，本书难免存在疏漏与不妥之处，真诚地欢迎各位读者对本书提出宝贵的意见和建议。

刘莹

2018 年 6 月

目录

第一章　数学的本质与教育意义

第一节　数学的性质

一、哲学认识

“数学”这个词来源于希腊语，意思是“已学习或理解的东西”或“获得的知识”“可用的东西”。“数学”这个术语经历了从一般知识的表达到数学专业化，再到亚里士多德时代的漫长过程。在中国，《周礼·地官·大司徒》中有：“三日六艺：礼、乐、射、御、书、数。”“数”就是“数学”，这个词在甲骨文中就出现了，“数字”这个词本身也是一个多音节词。后来，术语“计算”和“数学”的使用持续了数百年，直到 1939 年统一使用“数学”一词。自古希腊以来，数学哲学就试图诠释“数学是什么？”这也就是所谓的“数学观”的问题。

（一）数学存在于理念世界

柏拉图（Plato）主义认为，虽然数学探究的对象是抽象的，但它的存在客观而永恒，和时间、空间及人类思维都没有联系。对数学家来说数学不是创造，而是对客观存在的描述。这个世界上是有两个世界的，一个是人们可以看到、听到和触摸的物理世界，另一个是可以合理掌握的思想世界。柏拉图认为，普遍性是一种真实的存在，即思想理论。柏拉图认为存在两种不同的存在，即经验的存在和思想的存在。前者是暂时的、改变的和组成的，而后者是永恒的、不变的和简单的。

数学对象包含数字和数字组成的式子，这些都是柏拉图概念世界的真实存在。它是一种独立的、客观的存在，不依赖于人类的思想，总是存在于思想的世界中。

这种现实主义观点是柏拉图式数学哲学的核心。数学对象是永恒的、非时间的、非精神的，它是天生的知识。这种天生的知识如何被人类认可？柏拉图认为只有通过“天生的记忆”才能实现。换句话说，我们永恒的灵魂曾经生活在天堂，并在他们的早年生活中观察到这些形式，但是当我们出生时，我们忘记了所有这些，所以我们学到的只是被遗忘的东西、要记住的东西，所以正确的教育方式就是所谓的苏格拉底（Socrates）方法。

柏拉图主义对数学实践有很大的影响。许多著名的数学家认为数学是一种独立于人类思想活动的客观存在，这与柏拉图的观点一致。数学哲学家赫什指出，一个典型的“工作数学家”在工作日是柏拉图主义者，在休息的时候是形式主义者。换句话说，当他做数学时，他确信他正在研究客观现实并试图确定它的本性。然而，当被问及数学哲学的重要性时，最简单的捍卫自己的说辞是他不相信数学的实在性。事实上，每次数学家会面时，争论仍在继续：数学到底是发明还是发现？

对于许多数学家来说，数学的定理是被发现而不是被发明的。因为当他们证明新的定理时，他们觉得他们不是来自自己的想法，而是觉得他们偶尔会找到很久以前存在的定理。找到发明与发现之间的区别就像将数学与音乐进行比较一样简单。例如，第九交响曲由路德维希·范·贝多芬提出，而不是他发现的。换句话说，贝多芬是发明而不是发现的。相比之下，数学的重要定理，即使数学家没有找到它，也必然有另一位数学家能找到它，所以逻辑在它被发现之前就存在了。换句话说，数学的现实在我们之外。我们的角色是发现或观察它们，我们证明的句子只是我们的观察记录。哥德尔（Kurt Godel）说，“在我看来，假设存在这样的对象（类或概念）是合理的，就像有物理对象一样，几乎有很多理由相信它们存在，它们成为令人满意需要数学系统与物理对象一样必要，以获得令人满意的感知理论。”因此，当许多数学家实践数学时，他们会觉得在数学世界中存在一个比物质现实中的随机事件更永恒、更真实、更可靠的现实世界。对于他们来说，素数像行星一样都是存在的。

当然，柏拉图有些观点几乎没有人接受，那就是关于“知识即回忆”和“现实世界是理念世界的幻影”的看法。因此，数学中的柏拉图主义者只是主张或争论自然数、点、线和面等数学对象是客观存在的。简而言之，柏拉图主义者认为数学是在数学家的活动和思想之外存在的结构的真理。把数学想成是一种数学家发挥创造性作用的活动，是不相信柏拉图思想的人的观点。

（二）数学对象是抽象的存在

与柏拉图的观点相反，亚里士多德（Aristotle）的数学观并非基于外在的、独立的、不可观察的知识理论，而是基于实验、观察和抽象，知识的经验基于现实。亚里士多德通过批判柏拉图的数学哲学建立了自己的数学哲学。他反对理念世界与物质世界的分离，认为理念不应该独立于感觉而存在，理念存在于万事万物之中。因此，他不相信公理是超越的，而应该是通过观察事物对人类的共同理解。数学是理论的科学，数学是研究数量的科学，数学的主体是抽象的存在，数量不是事物的本体论，而是属性。在他看来，数学家以同样的方式抽象地思考事物和研究存在。

从数学对象的角度来看，数学对象是存在于合理事物中的非物质事物。“材料要么是有意义的，要么是可以想象的，如青铜和木材以及可以移动的材料。可以想象的材料是在感官材料中，但不是可感物，例如，作为有意义的数学对象。”亚里士多德从数学命题的角度来看，“由于数学中的一般定义不涉及超出大小的单独事物，它们研究数量和大小，而不是作为具有大小和可分的东西的事物，因此原则和证明可以包括可感对象，但并不是作为可感对象，而是作为一个特定的物种。就像有许多原则一样，涉及的只是运动的东西，并不在乎每一个运动的东西是什么或者有什么特性。”根据数学研究的方法，亚里士多德认为“最好的方法是将不可分割的事物在不同的考查中分开处理，就像算术学家和几何学家所做的那样：作为一个人，人是不可分割的，数学家设定了人的不可分割性。然后检查一个人是否有不可分割的性质。几何学家并不把人当作一个人或是不可分割的，而是作为立体的。”简而言之，亚里士多德认为数学对象存在，但它不是独立存在于可感的事物之中，也不是独立于可感事物之外，而是理性事物中的抽象存在。亚里士多德的概念是理解抽象与具体、一般和个人之间关系的重要一步。

（三）数学是综合判断

伊曼努尔康德（Immanuel Kant）认为，人类知识不能脱离经验，而是基于心灵组织经验的先天能力，先天性认知能力是一种“形式”，后天的感官体验是“材料”。用形式处理材料，能够形成关于普遍性和必要性的科学知识。在康德看来，我们所有的知识都是从经验开始的。虽然我们所有的知识都始于经验，但并非所有知识都来自经验。因为我们的经验知识可以是我们的印象、我们固有的智力（感官印象只是一种诱因）和我们自己的联系的混合。康德以三种方式分享人类的自然认知技能：感性、知性和理性。感性是掌握数学知识的能力；知性是掌握物理

知识的能力；理性力求超越现象世界来理解“自在之物”是什么。感性要如何掌握数学知识？康德认为人类有两种天生和直觉的形式：时间和空间。凭借天生的时间概念来梳理事物经验的多少，数字的概念就被创造出来了。使用先天空间概念来理清事物形状的经验会产生几何公理。康德认为，数学是思维创造的抽象实体。

为了分析人类知识，康德用他的知识三分法取代了传统知识的二分法。莱布尼茨的理性主义和休谟的经验主义都将知识分为不可避免的真理和偶然的真理两大类，并将其与经验真理相对应的与生俱来的真理等同起来。在康德那里，人类的知识分为：

$$\begin{cases} \text{分析} \quad \text{分析命题（1）} \\ \text{综合} \begin{cases} \text{先天综合} \quad \text{先天综合命题（2）} \\ \text{经验综合} \quad \text{经验命题（3）} \end{cases} \end{cases}$$

为了区分先天和经验，康德说：“经验的判断本身就是全面的、综合的。根据经验做出分析判断是荒谬的，因为我可以不超越我的概念去分析和判断，所以不需要经验证据，说一个对象是有广延的是一个先天确定的命题，而不是一个经验判断。”事实上，先天知识与经验或后天知识之间的区别是哲学家长期关注的问题。从历史的角度来看，理性主义哲学家认为，先天知识比经验知识更重要，而经验哲学家则持相反观点。数学哲学中的一个基本问题是数学知识是天生的还是经验性的。然而，这两种知识之间的区分是怎样一种区分，从来没有一个明确的解释。斯蒂芬巴克（Stephen Barker）指出，“经验”一词的意思是“根据经验的”，而“天生”一词的意思是“在经验之前就得到的”。因此，我们可以将经验知识定义为“需要经验证明的知识”，并将先天知识定义为“没有经验确认的知识”。

为了区分分析和综合，康德写道：“在所有判断中考虑主语和谓语之间的关系可以有两种不同类型。一种类型是谓词 B 属于主语 A，是（隐藏）包含在 A 的概念中；另一种类型是 B 完全在概念 A 之外，尽管它与概念 A 有关。在第一种情况下，我将这种判断称为分析的，第二种情况下就叫综合的。因此，分析的判断是这样一种判断，其中谓词和主语之间的联系是通过同一性来考虑的，而那些不通过同一性来考虑联系的判断被称为综合判断。前者也可以被描述为描述性判断，而后者可以被称为扩张性判断，因为前者不通过谓词向主体概念添加任何东西，而是仅通过分析将主体概念分解为其子概念。相反，后者增加了一个谓词，这个

谓词在主语的概念中是完全不可想象的，并且不能通过对主题概念的分析来抽绎出来。”

康德强调了他对数学陈述的完整性。他说：“数学的判断都是全面的。”此外，康德通过算术和几何的两个例子进行了解释。康德曾这样分析，虽然人们最初大约会想：7+5=12 这个命题是一个单纯分析命题，它是从 7 加 5 之和的概念中根据矛盾律推出来的。然而，如果人们更深入地考察一下，那么就会发现，7 加 5 之和的概念并未包含任何更进一步的东西，而只包含这两个数结合为一个数的意思，这种结合根本没有使人想到这个把两者总合起来的唯一的数是哪个数。12 这个概念绝不是由于我单是思考那个 7 与 5 的结合就被想到了，并且，不论我把关于这样一个可能的总和的概念分析多么久，我终究不会在里面找到 12。我们必须超出这些概念之外，借助于与这两个概念之一相应的直观，例如我们的五个手指，或者五个点，这样一个一个地把直观中给予的五的这些单位加到七的概念上去。因为我首先取的是 7 这个数，并且，由于我为了 5 这个概念而求助于我的手指的直观，于是我就将我原先合起来构成 5 这个数的那些单位凭借我手指的形象一个一个地加到 7 这个数上去，这样就看到 12 这个数产生了。要把 5 加在 7 之上，这一点我虽然在某个等于 7+5 的和的概念中已经想到了，但并没有想到这个和等于 12 这个数 6 所以算术命题永远都是综合的。康德说：“纯几何学的每个定理都不是分析的。”两点之间线段最短，是一个全面的命题，从这个概念里，找不到大小，但是可以知道它的特点。“最短”绝对是添加的，它绝不是因为分析直线的概念才有的这句话。另外，在康德看来，数学中严格的命题是因为有自然的判断。数学的基本知识是不包括经验的，只包括先天的已知内容。康德说：“真正的数学是先天而不是经验的判断，因为先天的知识里包含着我们无法从经验中取得的必然性。”

为了区分“分析知识”和“综合知识”，康德用了“判断”这个词。首先，判断是分析性的，当且仅当你不需要任何东西时，只要看看判断中的术语和这些概念的组合，你可以让人们知道判断是否属实；判断是全面的，当且仅当思考判断中的概念互相结合的形式不足以让人们知道判断是否为真，要判断它是否是真实的需要向很多东西求助。其次，当且仅当该陈述根据其逻辑形式为真时，真正的陈述才是分析；当且仅当陈述由于其逻辑形式而错误时，陈述才是假的分析；当且仅当它不是分析时，陈述是全面的。事实上，康德认为上述两种解释是相同的。康德对分析和综合判断之间的区别解释得晦涩难懂，A.J. 艾耶尔（Alfred Jules Ayer）强调说：“康德没有为分析陈述和综合陈述之间的差异设定明确的基准，他

提出了两个标准。这两个标准绝不是等价的。”为了避免这种区分的混淆，A.J. 艾耶尔说：“如果一个命题的真假仅仅基于其中包含的符号的定义，我们称之为分析命题；当经验事实成为我们判断命题的基准，那么对陈述的分析完全没有实质内容。”斯蒂芬巴克更简洁地说：“陈述是分析性的，当且仅当你不需要任何东西，只需要对这个陈述理解就够了。一个综合的陈述分析并不能依靠对它的理解来判断真假。”因此，“在某种意义上的陈述分析提供了新的知识”。分析命题要求注意语言的某些用法，否则，这种用法我们可能不会意识到，并且分析命题揭示出我们的那些断定和信念中所没有想到的含义。“结论不能用断言和信念来解释。但我们也可以看到，分析命题可以在其他意义上被认为是对我们的知识没有任何贡献的东西，因为那些分析命题只能说出我们可以说的东西。”简而言之，康德的数学独立于已知的感官体验——数学是与生俱来的；数学真理无法通过概念分析来判断——数学是全面的。

（四）数学是一种约定

与柏拉图主义相反，约定主义认为数学思维是一个发明过程。约定理论的观点是现代西方实证主义哲学的观点之一。这种观点意味着数学公理、符号、对象和推论的正确性只不过是人类之间的约定。根据商定的规则承认存在和不存在的东西，什么是正确的，什么是不存在的。在约定的人看来，数学是没有任何实际意义的东西。数学真理的必然性是指命题在定义下的必然性。

约定论是庞加莱的哲学创作。几何学的第一原理从何而来？它们是通过逻辑强加给我们的吗？事实证明，非欧几何学的创立证明不是这样的。我们的感官向我们透露了空间吗？事实并非如此，因为我们的感官能够向我们展示的空间绝对不同于几何学的空间。庞加莱说：“几何的公理既不是先验的综合判断，也不是实验的事实：它们是约定，我们在所有可能的约定中选择，并且以实验事实为指导，但选择仍然是自由的，它只受限于避免所有矛盾的必要性，虽然决定公设取舍的实验法只是近似的，但公设仍然可以是严格正确的。换句话说，几何公理只是一个隐蔽的定义。”

当然，数学中的术语和定义具有约定的性质，但它不是完全随意的约定。如果数学是一个约定，那么为什么约定的含义与现实世界如此一致？为什么数学的应用如此全面？显然，约定主义无法提供令人信服的解释。事实上，我们只需要比较数学和国际象棋就可以清楚了。国际象棋的规则是一种约定。在严谨性、确定性和抽象性方面，数学与国际象棋非常相似。哈代（Hardy）说：“国际象棋问题

是一个名副其实的数学问题，但它只是一种‘次要’的数学方法。”但无论每一步棋多么巧妙和复杂，它的原创性和惊人性如何，总有一些最基本的东西缺失。因此，数学的主要部分不是象棋游戏，数学推理可以在实践中应用，而国际象棋游戏的完成只对玩家有用。

从历史上看，约定主义的灵感来自数学哲学中的非欧几何和抽象代数。约定者试图绕过所谓的语义来解释数学真理，从而避免柏拉图主义引起的所有争议。他们觉得数学没有“对象”，即便有，它们也只具有我们通过约定指定给它们的品质。因此，数学真理被简化为某些约定的真理和逻辑继承所保留的真理。威拉德·范·奥曼·奎因（Willard Van Orman Quine）认为，这确实是一个约定问题，欧几里得几何学的所有真理挑选哪些作为公设，是一个约定问题。但这并不是对真理进行约定。约定是存在的，并且约定的事情是将它分成两部分，一部分用于当作出发点，而另一部分用于从前者中演绎出来。他继续解释说：“当然，所有的公设都是一致的，但只有立法的公设才包含真理中涉及的内容。”那么什么是“数学对象”？维特根斯坦的观点与柏拉图的想法有所不同。维特根斯坦认为数学是一种语言上的约定，允许人们在社交生活中相互交流，人们通过培训和生活经验来学习。我们知道，柏拉图主义者强调数学研究对象的概念和超越以及数学知识与经验知识的分离。然而，维特根斯坦强调，数学陈述的任务不是描述事件，而是为这种描述提供框架。换句话说，数学命题不是描述事件而是作为描述性规则的语句。例如，数学句子“2 + 3 = 5”在判断特定事实的描述正确与否时起着规范作用。维特根斯坦不断强调数学家是发明者而不是发现者，但对于数学发明，他认为数学家发明了新的描述形式，有些人受到实际需求的刺激，有些人在美学上令人愉悦，而其他人还有不同的方式。

（五）数学就是逻辑

罗素（B.Russell）和弗雷格（Friedrich Ludwig Gottlob Frege）的逻辑主义数学观表明数学是逻辑。由 Russell 和 Whitehead 编写《数学原理》的主要目的是表明纯数学是基于逻辑的前提，仅使用逻辑上解释的术语。弗雷格认为，基于数学的算术基础被简化为逻辑。我们知道，逻辑是一种普遍接受的思想规则，毫无疑问可以用于所有学科。如果数学可以简单地看成是算术，算术可以看成是逻辑，那么数学就有了坚实的基础。因此，弗雷格说：“虽然数学必须断然拒绝心理学的任何帮助，但它绝不能否认它与逻辑的紧密联系，我甚至同意那些认为把它们严格分离是不合适的人的观点。我们还必须承认，对结论的说服力或定义的合理

性的任何调查都必须是合乎逻辑的。”拉塞尔详细阐述了数学和逻辑之间的关系，“所有纯粹的数学，因为它可以从自然数理论中推导出来，只是逻辑的延伸。即使它是一个现代的数学分支，不能从自然数理论中推导出来，也不难将上述结论应用于它。”在历史上，数学和逻辑是两个学科，它们完全不一样，但是在现代，它们之间有很大的联系：数学中用到逻辑，逻辑也离不开数学，结果意味着两个实际上是一门学科。它们的区别就像成年人和儿童一样：逻辑是小孩，数学是逻辑的成年。在数学研究中，罗素认为，很多现代数学研究显然处于逻辑的边缘。许多现代逻辑研究都是象征性的，所以对于任何训练有素的研究人员，逻辑和数学之间密切的关系非常明显。对于数学和逻辑的同一性问题，他甚至试图证明它们是等价的。罗素强调，如果有人认为逻辑不是数学，我们会挑战他们并请他们在《数学原理》中的一系列定义和结论中找到逻辑终点，数学的起点。显然，所有答案都是武断的。

（六）数学是直觉构造

直觉主义的哲学思想来自康德，他强调人类直觉对数学概念的作用。第一个提出数学直觉思想的是德国数学家克罗内克（Kronecker Leopold）。在他看来，除非能用有限的正整数构造，否则数学中不可能存在任何东西。因此，分数是存在的，因为它可以表示为两个正整数的比值。然而，不存在诸如 π 之类的无理数，因为它们只能由无穷大的分数表示。克罗内克将数学中的大量的知识放入不合理行列里，例如无理数、无限集合和纯粹存在性证明。林德曼（Lindemann）证明 π 是一个超越数。一次，克罗内克跟林德曼讨论了 π 的超越性，他对林德曼说：“研究 π 有什么用？不合理的数字不存在。我们为什么要调查这类问题？”

庞加莱认为，数学来自人类的直觉，康德称之为“先天的综合判断”。他无视罗素试图将数学转化为逻辑，不认同逻辑来拯救数学。庞加莱认为，如果逻辑是正确的，数学只不过是一个复杂的重言式系统，但实际上数学的内容更丰富。“1”的定义在《数学原理》中，对于那些没有听过的人来说是荒谬的。另外，庞加莱认为，只有在严格控制思维时数学才是严谨的，而康托的集合论只是矛盾的，并且毫无意义。根据庞加莱的观点，集合论的悖论证明康托的理论是一种渗透到数学内的“传染性病毒”。庞加莱的处理要求很高：康托的整个理论都是在可靠的数学理论之外的。关于直觉与逻辑之间的关系，庞加莱说：“直觉是一种逻辑平衡物或纠正物。”

以布劳威尔（L.E.J.Brouwer）为代表的直觉主义数学观认为：数学是独立于物质世界的直觉构造，数学的对象，必须能像自然数那样明示地以有限步骤构造

出来，才可以认为是存在的。因为他们更呼吁这种“构造性的数学”，所以直觉主义也被称为建构主义。在直觉主义者眼中，存在是在数学中构建的。因此，排中律并不普遍，并且不能考虑所有自然数和整数。布劳威尔拒绝接受假设的排中律，因为我们并非无所不知，所以我们不应接受所有假设的逻辑。自亚里士多德时代以来，数学家从未怀疑陈述A只有两种可能性：A 成立或 $-A$（A 的负数）成立。布劳威尔坚持认为有第三种可能性——也就是说，存在一种这两者之间的中间状态。人们可以通过这种方式来证明数学命题，也就是说，如果我们否定这个命题，就会产生矛盾。因此，布劳威尔的第三个选择导致了许多普遍接受的数学命题发生了动摇。因此，希尔伯特说，禁止使用排中律就像禁止天文学家使用天文望远镜或者禁止拳击手使用拳头一样。否定排中律所得到的存在合理性等同于放弃数学的科学性质。

（七）数学是形式符号

形式主义认为每个数学都有自己的公理系统，因此有限的方法可以用来直接证明公理系统的矛盾。形式主义主要是想通过将数学分类为象征而非逻辑符号，想将数学转化为没有意义的事情并确保其基础的安全性，为数学奠定新的基础。至于符号的含义，他们认为这不是数学上的考虑因素。由希尔伯特领导的数学家认为，形式公理可以用来治愈由舆论发展引起的数学疾病。希尔伯特已经成功地证明了这种方法的几何兼容性，因此没有理由认为集合论可以达到相同的结果。该方案是：首先，最初的概念被称为数字，完整的公理假设通过引入公理、各种算术规则、交换规则、连接规则、有序公理、连续性公理和所谓的完全公理来确定，不可能通过枚举公理生成其他数字。希尔伯特希望证明这样形成的数字的公理系统是兼容和完整的，然后再证明它对应于已知的实数系统。然而，哥德尔的不完备性定理摧毁了这个希望，它挑战数学家面对这样一个事实：即公理必然有一些固有的局限性，即使普通的整数算术不必完全系统化。此外，他的证据揭示了一个令人震惊和无助的隐藏真理：除非先假设某些立论原则，否则无法确定复杂演绎系统的逻辑一致性，其内部一致性也是一个问题。哥德尔的工作引领了一些新的数学逻辑分支，激励每个人重新评估各种数学哲学甚至是一般的知识哲学。形式主义认为数学是一种象征性的符号游戏，它们无法为数学的适用性提供合理的解释。

二、一些隐喻

（一）数学是一种文化

数学是一种文化传统，数学活动本质上是社会性的。怀尔德（R.L. Wilder）认为数学文化是一个发展中的物种。A. 哈蒙德（Hammond Allen L.）认为数学是一种无形的文化，数学是一种隐藏的文化。事实上，过去数学对我们文明的影响通常是被我们忽视的。例如，大多数完全理解无线电革命性影响的人却并不知道数学中长期以来一直都存在无线电波。如果不是数学，它可能永远不会被发现。今天，数学不仅满足于为其他科学提供服务性质的工具，而且还通过为社会提供间接服务和为社会创造附加值而在幕后提供服务。事实上，数学一直在人类文化中发挥着重要作用：数学是人类思想最重要的成就之一，也是事物（科学）的胜利。作为人类思想最原始的创造，只有音乐和数学可以说是地位一样的。作为文化的一个活的分支，在齐友民教授看来，数学无论是在过去还是现在，都在很大程度上影响着人们的思想，让人们的思想不断解放。他曾经说过一句非常有名的话：如果一个国家没有数学文化的话，这个国家肯定会衰落。事实上，数学的发展表明，数学不仅是一种文化，也是所有文化中最优雅、最重要的文化之一。

（二）数学是一种艺术

几百年来，数学从古希腊开始，一直是一门艺术，数学的文化和发展一直和人们的审美一致。把数学看成是艺术，可以这样理解：第一，数学创作的方式与艺术相似；第二，数学的作用类似于艺术。数学在很大程度上是艺术，它的发展总是源于审美标准。哈代声称，如果数学中存在权利，它只作为艺术而存在。如果数学家把外面的世界放在脑后，就像一个画家知道如何和谐地组合色彩和形式，但没有模特，画家就很难有灵感。哈尔莫斯（Paul R. Halmos）也是将数学表达为创造性艺术的人。他认为创造性的艺术中包含了数学家可以创造出更美好的概念，因为数学家像艺术家一样生活，工作方式相似，并且思考方式相似。数学被数学家当成艺术对待，开发概念和技术，以便更轻快地前进。一个没有缺点的数学，在证明和得到的结果中需要想象力和直觉，这也是一种艺术。

（三）数学是一种语言

象征性语言是数学的另一个重要特征：就像音乐表示和传播声音使用符号一样，数学也使用符号来表示定量关系和空间形式。

作为一种语言，数学不仅是最简洁的语言，而且是最严格的语言，它在结构

和内容上比任何一个国家的语言都更完美。数学是一种通用的符号语言，也是语言中的一种语言。在世界上，数学是可以在没有翻译的情况下被理解和沟通的语言。伽利略（Galileo Galilei）曾经说过，我们面前的宇宙就像是一本数学语言的大书，如果你不会说数学符号的语言，你就像是在黑暗的迷宫中行走而看不到任何东西。数学的语言很简单，可以作为其他学科的语言，可以很高效地描述一些现象，数学在其中作为一个最基本的语言。例如，时间和空间可以用作几何的表述，微积分是天文学的语言，量子力学的理论用算子理论描述，傅里叶分析用来解释波动理论。

（四）数学是一种方法

数学是一种方法。数学让人们的思维越来越严格，逐渐养成严格的思考模式。通过学习数学，人们可以获得逻辑思维方法，以便他们能够促进和发展知识，即数学是一种思维方式。M. 克莱因（Moris Klein）指出，数学是一种更基本的方法。它体现在数学的每一个小的学科里，如实数里的代数、欧几里得几何或任意非欧几何。通过了解这些小的学科的共同知识，掌握这种方法共同的特点。解决问题可以用数学的这种方法。比如，我们经常使用由字母、数字和其他符号建立起来的方程或不等式以及图表、图象、方框图等，客观事物的属性和它们的数学关系就是数学模型。欧几里得几何可以看作是数学的一种模型，数学可以说是几何中最严谨的应用。很多人在数学里得到很有趣的结果。因为建模是可以预测的，哪怕人们对结果不是那么满意，他们也会不断尝试应用数学模型。例如，数学有时只是与数学和物理学相关的一个相当随意的现实人工模型，并且可以或多或少地描述物理世界中发生的事情。

（五）数学是一种思维

数学在人的智慧里有很大的体现，在原始社会也有一定程度的显现。比如，在原始社会，人们如果丢了一只羊，他们立刻就能看出来，他们用的方法，就是集合元素对应的方法。

列维 - 布留尔（Levy-Bruhl，Lucien）在他的著名著作《原始思维》中指出，在古代社会，人们从两个方面说明了数字是不可以分化的。在实际应用中，它或多或少与计算的内容有关。在人类文明的不断发展中，数学显示了每个国家和民族文明所体现的人类思想的本质和特征。不管其他思维多么完美，都不能忽视数学的思维。除了提供定理和理论，数学还提供不同的思维方式，包括模式生成、抽象、优化、逻辑分析、推理和符号的使用。通过训练数学思维，人们可以提高