

TURING

图灵新知

悠扬的

素

[英] 马库斯·杜·索托伊 —— 著
(Marcus du Sautoy)
柏华元 —— 译

数

二百年数学绝唱黎曼假设



THE MUSIC OF THE PRIMES
SEARCHING TO SOLVE THE GREATEST MYSTERY IN MATHEMATICS

入围《经济学人》《泰晤士报》《卫报》和《泰晤士报文学增刊》年度好书
知名科普作家卢昌海鼎力推荐



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

悠扬的

素

[英] 马库斯·杜·索托伊——著
(Marcus du Sautoy)
柏华元——译

数

二百年数学绝唱黎曼假设

THE MUSIC OF THE PRIMES
SEARCHING TO SOLVE THE GREATEST MYSTERY IN MATHEMATICS

人民邮电出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

悠扬的素数:二百年数学绝唱黎曼假设/(英)马库斯·杜·索托伊(Marcus du Sautoy)著;柏华元译

—北京:人民邮电出版社,2019.9

(图灵新知)

ISBN 978-7-115-51607-7

I. ①悠… II. ①马… ②柏… III. ①黎曼猜测—普及读物 IV. ①O156-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第139075号

内 容 提 要

黎曼假设,即素数的未解谜题,被视为数学研究的“珠峰”,吸引了一代代数学家投身于数论研究中,其中不乏数学史上大名鼎鼎的人物。而破解这一谜题过程中的发现,已经给电子商务、量子力学和计算机科学等领域带来了举足轻重的影响。本书作者以生动细腻的笔触,将素数的故事娓娓道来。阅读本书不仅能像聆听音乐那样,无须具备数学专业背景即可领略数学之美,而且还能近距离体会数学家的心路历程,以及他们之间竞争与合作的复杂关系,从而对数学家这一群体有更深刻的了解。

本书适合任何对数学感兴趣的读者阅读。

◆ 著 [英] 马库斯·杜·索托伊

译 柏华元

责任编辑 温雪

责任印制 周昇亮

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号

邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn

网址 <http://www.ptpress.com.cn>

大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本:880×1230 1/32

印张:11

字数:284千字

2019年9月第1版

印数:1-4000册

2019年9月河北第1次印刷

著作权合同登记号 图字:01-2017-1464号

定价:59.00元

读者服务热线:(010) 51095183转600 印装质量热线:(010) 81055316

反盗版热线:(010) 81055315

广告经营许可证:京东工商广登字20170147号

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

对本书的赞誉

美国《纽约时报》《康纳士报》《卫报》和《泰晤士报文学增刊》专业评论

“……对心中渴望智识的读者提出挑战或追求，其间穿插各种精彩
令人发笑下笔，更精心了研究历史和数学知识。”

——《泰晤士报》李德

“……这本书的体面世界——纪念作家：杜·索托伊对数学的深刻

约纳森·杜·索托伊

——《泰晤士报》李德

2000年10月21日

“……这本书的体面世界——纪念作家：杜·索托伊对数学的深刻
约纳森·杜·索托伊”

——《泰晤士报》李德

“……这本书的体面世界——纪念作家：杜·索托伊对数学的深刻
约纳森·杜·索托伊”

——《泰晤士报》李德

“……这本书的体面世界——纪念作家：杜·索托伊对数学的深刻
约纳森·杜·索托伊”

——《泰晤士报》李德

“……这本书的体面世界——纪念作家：杜·索托伊对数学的深刻
约纳森·杜·索托伊”

对本书的赞誉

入围《经济学人》《泰晤士报》《卫报》和《泰晤士报文学增刊》年度好书

“杜·索托伊将素数发现的全部历程娓娓道来，其间穿插着种种轶事，令人欲罢不能，愿潜心了解其中涉及的关键数学知识。”

——《乡村之声》杂志

“这部精彩的作品就像一首纯粹的诗歌。杜·索托伊对数学的满腔热情流露在字里行间。他赞美智慧，因其照亮了宇宙中最神秘的角落。”

——西蒙·温彻斯特，

英国著名作家、记者，加拿大皇家地理学会会员

“我被杜·索托伊的这本书深深吸引住了。我不懂数学，但是这本书写得很好，故事精彩，细节生动有趣，即使是我也能看懂绝大部分。”

——玛格丽特·德拉布尔，《卫报》

“这本书真的很有吸引力。杜·索托伊将数学知识讲述得通俗流畅，亦将数学大家的形象刻画得鲜明生动。”

——《出版人周刊》

“从数学家持续关注的素数问题入手，杜·索托伊创作出了这样一部引人入胜、令人津津乐道的作品。无论你是否了解数学，你都能够享受这本书带来的阅读盛宴。”

——基斯·德夫林，

斯坦福大学人文科学技术高级研究所联合创始人、执行主席

“杜·索托伊给我们带来了一部迷人而易读的数学史，讲述了数学家对素数和黎曼假设所做的不懈努力。他的慧眼同样审视了现代应用。”

——《经济学者人》

“杜·索托伊展示了如何用计算机来发现素数，并揭示了这些细节在电子商务中的应用。他对现代工作的真知灼见引领我们进入当前素数应用的前沿领域，这是以前我们所无法企及的。”

——《洛杉矶时报书评》

“本书见解深刻、逻辑清晰，讲述了一个个扣人心弦的故事。我们能从中读到人类最深刻的悲欢离合的情感，并了解数学家之间的竞争与合作。这本书令人爱不释手。”

——乔治·斯坦纳，《泰晤士报文学增刊》

“这部作品精彩绝伦，情节百转千回。杜·索托伊试图让我们理解数学家在攀登数学珠峰的过程中所付出的艰苦努力。”

——《基督教科学箴言报》

“本书是关于数论的一部佳作。杜·索托伊写得引人入胜，讲述了世界上群聪明绝顶的数学家如何在混沌中上下求索，以聆听素数的‘乐章’的励志故事。”

——《每日电讯报》

“本书能够带领我们探索数学史上的一个未解之谜，并让我们了解素数和 ζ 函数对于解开这一谜题的非同寻常的意义。”

——阿米尔·奥采尔，数学科普作家，2004年古根海姆奖获得者

“杜·索托伊讲出来的故事是那么地娓娓动听。他用通俗的文字向我们清晰地展示了数论的发展过程。这是一部不可不读的数学科普佳作。”

——《科克斯书评》

目 录

第 1 章	谁想成为百万富翁	1
第 2 章	算术的原子	19
2.1	寻找规律	24
2.2	证明：数学家的见闻	28
2.3	欧几里得的预言	35
2.4	寻找素数	39
2.5	欧拉：数学之鹰	42
2.6	高斯的猜想	46
第 3 章	黎曼的虚数世界观察镜	59
3.1	虚数：新的数学远景	67
3.2	镜中世界	72
3.3	ζ 函数：数学和音乐之间的桥梁	77
3.4	重新书写古希腊人探索素数的故事	82
第 4 章	黎曼假设：从随机素数到有序零点	87
4.1	素数和零点	92
4.2	素数的乐章	96
4.3	黎曼假设：混沌中的秩序	101
第 5 章	数学接力赛：实现黎曼的革命	107
5.1	希尔伯特：数学魔笛手	113

5.2	兰道：最难相处的人	123
5.3	哈代：数学审美家	127
5.4	利特尔伍德：数学坏小子	132
第 6 章	拉马努金：“与神对话”的数学天才	139
第 7 章	数学大迁徙：从哥廷根到普林斯顿	157
7.1	重新审视黎曼	159
7.2	塞尔伯格：孤僻的斯堪迪纳维亚人	167
7.3	埃尔德什：来自布达佩斯的奇才	172
7.4	有序零点意味着随机素数	176
7.5	数学大讨论	179
第 8 章	思想的机器	187
8.1	哥德尔和数学方法的局限	189
8.2	图灵神奇的思想机器	194
8.3	齿轮、滑轮和润滑油	199
8.4	从不确定的混沌到素数方程	205
第 9 章	计算机时代：从人脑到电脑	217
9.1	计算机：数学的终结者吗	223
9.2	察吉尔：数学火枪手	227
9.3	奥德里兹科：新泽西计算大师	233
第 10 章	破解数字和密码	237
10.1	网络加密的诞生	238
10.2	RSA：MIT 三剑客	241
10.3	一个密码学的纸牌戏法	245
10.4	挑战 RSA 129	250
10.5	新技巧问世	252

10.6	鸵鸟政策	255
10.7	寻找大素数	259
10.8	未来是光明的，未来是椭圆形的	261
10.9	迦勒底诗歌的乐趣	265
第 11 章	从有序零点到量子混沌	271
11.1	戴森：物理学青蛙王子	277
11.2	量子鼓	280
11.3	迷人的节奏	282
11.4	数学魔术	285
11.5	量子台球	288
11.6	42：终极问题的答案	294
11.7	最后的转折	299
第 12 章	缺失的拼图块	301
12.1	语言奇才	302
12.2	新的法国革命	311
12.3	笑到最后	316
致 谢		325
延伸阅读		328
引用说明		333
关于本书		334
关于作者		338

第1章

谁想成为百万富翁

“这个数列是什么呢？我们可以心算一下。…，59，61，67，…，71，…，这些不就是素数吗？”控制室里响起了一阵兴奋的窃窃私语声。埃莉的内心一时间泛起阵阵涟漪，但脸色很快便归于平静，生怕因忘乎所以而当场失态，或者显得不够专业。

——卡尔·萨根，《接触》

1900年8月的某个早晨，空气潮湿闷热。在巴黎大学的一个拥挤的大厅里，第二届国际数学家大会正如火如荼地进行着。来自哥廷根大学的大卫·希尔伯特教授正在台上发表演讲。他是当时公认的最伟大的数学家之一，其演讲内容大胆、新奇。他要讨论的不是那些已被证明的问题，而是一些尚未解决的问题。这与人们长久以来所接受的传统观念背道而驰。当他阐释关于数学未来的观点时，听众甚至能听出他声音中的忐忑不安。“我们当中有谁不想揭开未来的面纱，探索当今科学的下一步发展历程，以及在未来几百年的发展前景和奥秘呢？”为了迎接新世纪的到来，希尔伯特给观众列出了23道难题。他相信这些问题将为20世纪的人们在数学探索之路上指明方向。

随后的几十年间，人们见证了其中的多个问题得以解决，而发现问题答案的那群人组成了一个著名的数学家团队，即“荣誉团体”。这个团体中包括库尔特·哥德尔、亨利·庞加莱，以及其他许多用思想改变

数学格局的人们。不过还有一个问题，也就是希尔伯特的第八问题，似乎将会安好地度过这个世纪而无人折桂，这就是黎曼假设。

在希尔伯特所设置的这些难题中，第八问题在他心中的地位非同一般。有一个德国神话和腓特烈一世有关，这位备受爱戴的德国国王死于第三次十字军东征时期。有传闻称他依然活着，只是安睡于屈夫霍伊泽山脉，当德国人需要他的时候便会醒来。据说有人问过希尔伯特：“如果你能像腓特烈一世一样复活，那么 500 年后，你想要做什么？”他答道：“我会问‘有没有人证明了黎曼假设’。”

在 20 世纪结束之际^①，面对希尔伯特难题中的顶尖挑战，大多数数学家还是束手无策。然而，这可能不仅是本世纪无法解决的问题，很可能即使 500 年后希尔伯特从沉睡中醒来，这个问题也不会有答案。他那场探索未知领域的革命性演讲，在 20 世纪的第一次国际数学家大会上掀起了轩然大波。然而，对于那些打算参加 20 世纪的最后一次会议的数学家来说，还有一个惊喜等待着他们。

1997 年 4 月 7 日，数学家们的计算机屏幕上闪过一则不同寻常的新闻。国际数学家大会的官方网站宣布，在明年将于柏林召开的会议上，大会将公布一个重磅消息：黎曼假设终于被证明了！黎曼假设是整个数学领域的核心问题。阅读邮件的数学家们一想到即将揭开这一伟大数学奥秘的神秘面纱，内心就激动不已。

这一消息来自恩里科·邦别里教授。没有人比德高望重的他更适合发布这个消息了。邦别里教授是黎曼假设的守护者之一，就职于著名的普林斯顿高等研究院，爱因斯坦和哥德尔也曾在这里工作过。他说话时轻声细语，但是数学家们总会仔细聆听他要讲的每一个字。

邦别里教授在意大利长大，家境优越，家族的葡萄酒庄培养了他高

① 本书英文版首次出版于 2004 年。——编者注

雅的生活品味。他被同事亲切地称为“数学贵族”。年轻时，他通常开着漂亮的跑车前往欧洲的会议现场，在会场上留下潇洒的身影。对于自己曾经6次去意大利参加24小时拉力赛的传言，他也欣然接受。他在数学上的成就有目共睹，在20世纪70年代当之无愧地收到了普林斯顿大学的邀请，此后一直在那里任教。他将自己对赛车的热情转移到了绘画上，尤其是肖像画。

数学能够吸引邦别里的原因在于，它是一门创造性的艺术。尤其是黎曼假设这种难题，激发了他挑战的欲望。15岁那年第一次读到黎曼假设后，他便沉溺其中不可自拔。身为经济学家的父亲有一个书库，收藏有大量的数学书。当浏览数学书时，他就被数字的性质吸引住了。他发现，黎曼假设是数论中最深刻且最根本的问题。父亲承诺，如果能解决这个问题就为他买一辆法拉利，这令他热情大增。在他父亲看来，这是使他悬崖勒马的一种无奈之举。

正如邦别里在邮件中所说的，他不再有机会赢得法拉利了。他在邮件开头写道：“上周三，阿兰·孔涅在普林斯顿高等研究院的讲座中提到，他对黎曼假设的研究取得了突破。”几年前，阿兰·孔涅将注意力转向了证明黎曼假设上，整个数学界为此欢欣鼓舞。孔涅是该学科的变革者之一。若邦别里是数学界的路易十六，那么孔涅就是罗伯斯庇尔^①。他魅力非凡，那火一般的风格与稳重呆板的数学家形象相去甚远。他能说服人们相信他的世界观，其演说也引人入胜。他的追随者都对他充满了崇拜之情。他们都乐于加入孔涅的数学阵营，来捍卫他们心中的英雄，并抵御来自那些仍坚守传统立场的顽固派的反攻。

孔涅供职于巴黎高等科学研究所，相当于法国的普林斯顿高等研究院。他自1979年到那里之后，就创立了一种用于解析几何的新语言。

^① 法国大革命时期最知名、最具影响力的政治家之一，坚决主张处死路易十六。

他不怕该学科会变得极端抽象化。即使是那些平日里同高度概念化方法打交道的数学家，他们中的大多数也都拒绝接受孔涅提出的数学抽象化这一变革。然而，正如他向那些对这一理论持怀疑态度的人们所展示的那样，他所创立的新几何语言却为量子物理在现实世界寻得蛛丝马迹打开了大门。如果这引起了数学界的恐慌，那就顺其自然吧。

孔涅大胆断言，他的新几何语言不但能揭开量子物理世界的面纱，还能解释黎曼假设——这个关于数字的最大奥秘。这令人们感到意外和震惊。他无惧打破常规，挣脱枷锁，敢于冒险，直捣数论核心，直面数学上最晦涩难懂的问题。自 20 世纪 90 年代中期孔涅进入该领域后，坊间曾一度流传，如果有人能攻克这个众所周知的难题，那一定非他莫属。

但是发现这一复杂拼图最后一块的那个人，似乎并不是孔涅。邦别里接着讲到，观众中一位年轻的物理学家“灵光一现”，发现利用他提出的“超对称费米 - 玻色系统”可以破解黎曼假设之谜。数学家对这个时髦的混合名词知之甚少，不过邦别里解释说，这描述了“在对应接近绝对零度时的物理世界，带有相反自旋的任意子和糊涂子^①组合而成的系统”。这听起来依旧晦涩难懂，但是这毕竟是用于解决数学史上最难的问题的答案，就算再难也在人们的意料之中。据邦别里所说，经过六天夜以继日的工作，并借助一种叫作 MISPAR 的新计算机语言，年轻的物理学家最终攻破了数学界的顶尖难题。

邦别里在邮件结尾处写道：“哇！请给他最高的赞誉吧！”黎曼假设最终由一位年轻的物理学家来证明，这完全出乎人们的意料。但是这一天的到来并没有给人们带来太大惊喜。过去的几十年里，人们已经发现，许多数学问题其实与物理问题有着千丝万缕的联系。人们已经隐约觉得，作为数论的核心问题，黎曼假设也许或多或少地涉及粒子物理的问题，可能是以一种人们意想不到的方式。

^① 这是邦别里自己造的两个词，为了表现粒子物理学的晦涩艰深。——译者注

数学家们于是纷纷改变自己的旅行计划，飞往普林斯顿来见证这一伟大时刻。1993年6月，英国数学家安德鲁·怀尔斯在剑桥大学演讲时，宣布证明了费马大定理。这一消息公布后，全场沸腾。那令人激动万分的一幕，当时在场的人们仍记忆犹新。怀尔斯证明了费马是对的：方程 $x^n+y^n=z^n$ 在 $n>2$ 时无解。当怀尔斯结束演讲放下粉笔的那一刻，在场的人们沸腾了。他们兴奋地开启香槟酒，庆祝这一时刻。记者们也纷纷拿起照相机，开始拍个不停。

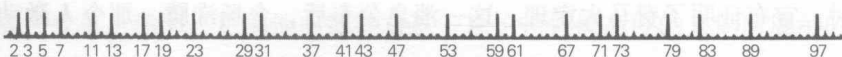
然而，数学家们知道，相比于知道费马方程无解，证明黎曼假设才真正关乎数学界的未来。正如邦别里在15岁那年发现的，证明黎曼假设旨在理解数学中最基本的对象——素数。

素数正是算术中的原子。素数就是不可分割的数字，无法写成两个较小数字的乘积。数字13和17都是素数，不过15就不是，因为它能够写成3和5的乘积。素数如同散落在整个广袤无垠宇宙中的珠宝，是能让数学家不惜花上几个世纪来探索的数字。对数学家而言，2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …，这些永恒的数字似乎披上了神秘的外衣，它们独立于我们的物理世界而存在。它们是大自然赐予数学家的礼物。

素数对数学的重要性在于其构造所有其他数字的魔力。每个合数（非素数）都可以由几个素数相乘得出。这就如同在物理世界中，每个分子都可以由化学元素周期表中的原子构成，素数列表就是数学家心中的元素周期表。素数2、3、5是数学家在实验室里的氢、氦、锂。掌握这些素数，数学家就能在错综复杂的数学探索之路上披荆斩棘、上下求索，开拓出一片新天地。

尽管素数简单而基础，但还是成为了让数学家孜孜不倦研究的一个最为神秘的课题。素数给这个旨在发现规律和规则的学科带来了空前的挑战。浏览一组素数，你会发现，根本不可能预测下一个素数何时出现。素数数列看起来无序而随机，对预测下一个素数也没有提供什么线

索。素数数列是数学的心跳，但它是被强大的咖啡因鸡尾酒所激发起来的脉搏跳动（见下图）。



小于 100 的素数：数学的无规律心电图

你能否找到一个创建数列的公式，它有个神奇的法则，能告诉你第 100 个素数是什么？从古至今，这个问题便一直困扰着数学家们，成为其挥之不去的噩梦。尽管两千多年过去了，素数似乎还是对那些妄图将它们直接归入公式的人们嗤之以鼻。一代代数学家们聆听着素数的鼓点，一开始他们听到两下敲击，接着是三下、五下、七下。随着鼓点继续敲击，节拍越来越没有内在逻辑，使人不得不相信这就是一片随机的白噪声。追求规律性一直是数学这门学科的重中之重，而数学家在素数这里只能听到一片混乱嘈杂之声。

自然选择素数的方式似乎毫无规律可循。数学家们则接受不了这一事实。如果缺乏数学规律，缺乏简洁之美，那就不值得研究了。白噪声从来就无法让人心旷神怡。法国数学家亨利·庞加莱在书中这样写道：“科学家并不是因为自然有用才去研究它的，而是因为他们乐于研究这个。驱使他们研究的乐趣，就是自然之美。如果自然缺少了美感，那就不值得研究；如果自然不值得研究，那么人间或许也不值得来一趟。”

人们或许希望，素数的脉搏在起初的混乱之后可以逐渐平稳下来。然而事与愿违，随着计数的增加，事情似乎变得越来越糟糕。下面分别来看看小于和大于 10 000 000 的 100 个数字里的素数。首先是小于 10 000 000 的：

9 999 901, 9 999 907, 9 999 929, 9 999 931, 9 999 937, 9 999 943,
9 999 971, 9 999 973, 9 999 991

大于 10 000 000 的 100 个数字里的素数却屈指可数：

10 000 019, 10 000 079

很难想象什么样的公式能生出这种规律的数字来。实际上，相比于有序的数列规律，素数的队列更像是一种对数字的无序继承。如同知道前99次抛硬币的结果，还是无法让你得到第100次的结果一样，素数也是不可预测的。

在数学界，素数被披上了一层最神秘莫测的外衣。其一，一个数字只有两种情况，要么是素数，要么不是素数。抛掷硬币也无法决定一个数字能否被更小的数字整除。其二，没有人否认素数数列看起来就像一个随机选择的数列。物理学家已经认同了这一观点：量子的毁灭决定宇宙的命运，每次投掷随机选择科学家所能找到的物质。数学上这么重要的数字，难道是由大自然掷骰子决定的？但如果接受这个事实，那就会让数学界陷入尴尬的境地。随机和无序简直是对数学家的诅咒。

素数尽管具有随机性，但相比其他任何数学文化遗产，它们更具持久性和普遍性。无论我们有没有找到更高效的方法来辨识它们，素数就在那里。来自剑桥大学的数学家 G.H. 哈代在其著作《一个数学家的辩白》中写道：“317 是素数，不是因为我们认为如此，或者我们的感知方式是如此，而是因为它本就如此，因为数学世界就是如此构建的。”

一些哲学家或许会反驳柏拉图的世界观，即相信有一个超越人类的绝对而永恒的世界存在。但是在我看来，那正是使他们成为哲学家而非数学家的原因之所在。邦别里在邮件中特别提到的数学家阿兰·孔涅和神经生物学家让-皮埃尔·尚热，在 *Conversations on Mind, Matter and Mathematics* 一书中有一段火药味十足的精彩对话。数学家认为数学存在于意识之外，而神经学家果断地驳斥了这种观点：“我们为什么在空中看不到用金字书写的‘ $\pi=3.1416$ ’，或者在水晶球倒影处出现的‘ 6.02×10^{23} ’呢？”孔涅则坚称：“独立于人类意识之外，存在着一个原生而永恒的数学世界。”在那个世界的中心，则存在着一组不变的素数。

这给尚热一种深深的挫败感。孔涅还断言：“数学无疑是唯一的通用语言。”人们可以幻想在另一个世界有不同的化学物质和生物。但是，不论在哪个星系，素数还是素数，始终如一。

在卡尔·萨根的经典小说《接触》中，外星人通过素数和地球上的生命沟通。该书主角埃莉·阿洛维在搜寻地外文明研究所任职，负责监听宇宙中的细微声音。一天夜里，当射电望远镜对准织女星的波段时，他们忽然在背景噪声中捕获了一段奇怪的脉冲信号。埃莉马上从射频信号中识别出了这个节奏。2次脉冲之后是一个暂停，之后是3次、5次、7次、11次，一直到907次，全部都是素数。之后又重新开始。

这种宇宙之鼓演奏的乐章，是地球不能听而不闻的。埃莉坚信，只有智慧生命才能创造出这种节奏。“无法想象一些辐射的等离子体，会发送像这样有规律的数字信号。使用素数正是为了引起我们的注意。”她这样说道。外星文明发来的是过去十年间彩票中奖的数字吗？埃莉无法从背景噪声中分辨出来。即使这一素数列表看起来像一串随机的彩票中奖号码，但因其普遍性和恒常性，外星人在广播中选取了这些数字。也正是这一结构特征，让埃莉意识到，这很可能是智慧生物发出的信号。

使用素数交流并非科幻小说的专利。奥立弗·萨克斯在其著作《错把妻子当帽子》中记录了一个真实的故事。26岁的双胞胎兄弟约翰和迈克尔，通过交换6位素数进行深度沟通。第一次发现他们在房间的角落里秘密交换数字时，萨克斯这样写道：“乍一看，他们就像两个品酒专家，品尝、赞美各自珍藏的美酒。”一开始，萨克斯不懂这对双胞胎要干什么。但是破解了他们使用的密码后，他就记下一些8位素数，以便能出其不意地加入兄弟俩的下次谈话。当兄弟俩发现还有其他素数后，先是大吃一惊，接着陷入深思，尔后便欣喜若狂。当萨克斯还在借助素数表查找素数时，这对双胞胎便开始生成素数了，但究竟是怎么做到的，那就确实是个不可思议的未解之谜了。是不是这些自闭症天才拥有