

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

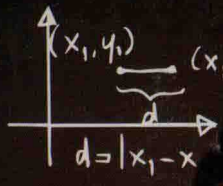
$$p \wedge T \equiv p$$

$$[]_n = a$$



$$(z) = i \cot(iz)$$

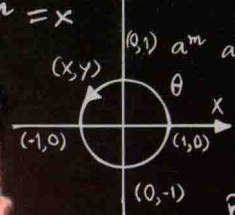
$$p \vee T \equiv T$$



$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

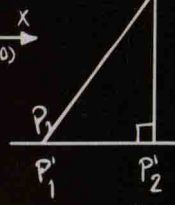
$$Me = L + I$$

$$y^{1/n} = x$$



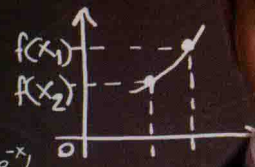
$$\left[\frac{1}{2} - F \right] / f$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$



$$\sinh(z) = i \sin(iz) \operatorname{arccoth}(z) = 1/2 \ln(z+1)$$

$$y_{i+1} = y_i + X_n(b - a y_i)$$



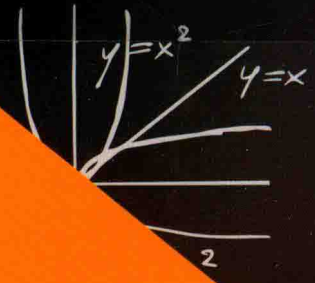
$$\sec(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$(z) = \ln(1 + \sqrt{1+z^2})/z$$

$$\operatorname{arsinh}(z) = i \sin(iz) \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})}$$

$$\operatorname{arcsech}(z) = \ln(1 \pm \sqrt{1-z^2})/z$$



cot

$$\exists x [\sim p(x)]$$

$$(iz)$$

$$\operatorname{arsc} a^2$$

$$1 [a 0]$$

$$a^n [a_0]$$

$$(iz)$$

$$+b)^2$$



杨超

考研数学真题 **超** 解读

(数学一)

主 编 杨超

副主编 靳阳 姜晓千

原命题专家，一线辅导专家
首次公布真题难度系数，指出常见错误
详细解读30年真题，试卷与专题完美结合

主审 胡金德

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介 作者简介

目录 113 / 目录索引

杨超

考研数学真题超解读

(数学一)

主 编 杨超 副主编 靳阳 姜晓千

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

杨超考研数学真题超解读·数学一 / 杨超主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2018. 7

ISBN 978-7-5682-5876-0

I. ①杨… II. ①杨… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 145416 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市宇通印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 23.25

字 数 / 565 千字

版 次 / 2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷

定 价 / 56.90 元

责任编辑 / 多海鹏

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

一、前言

本书收集了近 30 多年的真题,并将 1987 年到 2008 年的具有代表性的重点题目单独整理出来,以便于同学们在有限的时间内做到真题的精华部分,少走弯路,其中重点把近 10 年的真题做了详细具体的分析,并在以前版本的基础上从不同的角度给出试题的数据分析(特别是对真题的每个题目增加了区分度和难度值的数据),内容更加丰富,解法更加全面,希望广大考生能充分利用好这套资料,最终取得满意的成绩!

二、真题特点

考研数学从 1987 年到现在实行的是全国统一考试的形式,考研数学的命题因此也逐步走向成熟,而现在的考研数学有以下几个特点:

① 考察全面、注重基础

近几年的考研数学真题考察的均是相关课程的主干知识,而且都是核心概念、理论基础和常用方法(特别是三大计算能力的考察),都是需在课程中重点强调的内容。

② 强调重点、注重能力

真题在考察基础知识的内容上,试卷依然坚持能力立意的命题原则,注重科学内容的内在联系和知识的综合运用,对课程的重点内容、核心概念、重点方法进行重点考察。

③ 控制难度、有利选拔

从历年的真题来看,考研数学的整体难度趋于平稳,一般不会有特别大的起伏,其中中等和中等难度以下的试题占到了 70% 以上,选择题和填空题大部分都是基础题,解答题中的基本题也几乎占一半,即使在综合性较强的试题中,在设问上也会做处理,为考生作答铺了路(例如中值定理的证明题就是一个典型)。

三、试题的评价与指标

1. 试题的评价指标

① 试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分比,通常用小写的 p 表示,取值范围在 0 与 1 之间. 对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下为难题,难度值在 0.3~0.8 的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题. 试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

② 试题区分度是指题目对不同水平考生加以区分的程度或鉴别能力. 区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用 D 表示,一般 $-1 < D < 1$.

一般试题区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2~0.3 的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小,难度中等的试题区分度通常较大,为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试

题分为六类,如下表所示.

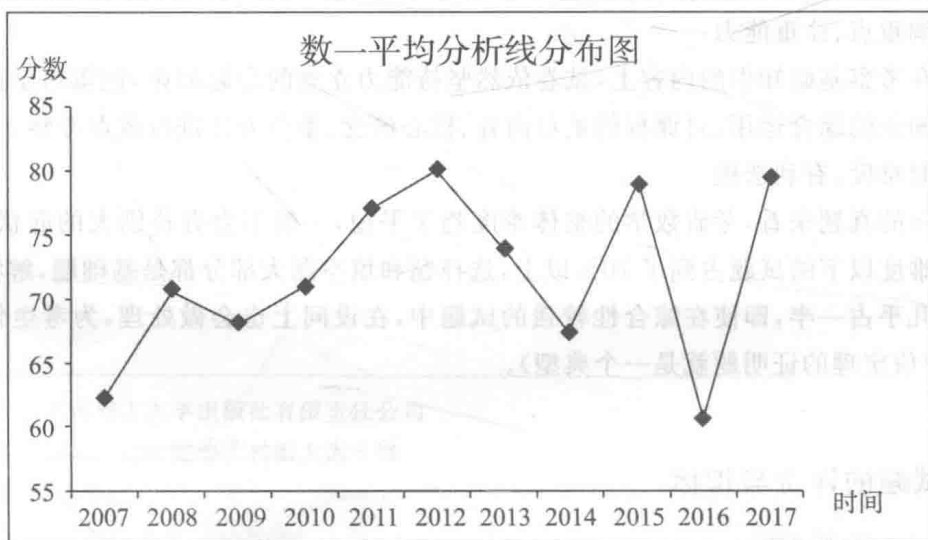
试题的六大类型分类表

类型	特征	p	D	试题特征
I		(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
II		[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
III		(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
IV		(0,0.3)	(0.3,1)	难度大但区分能力强
V		[0.3,0.8]	(0.3,1)	难度适中且区分能力强
VI		(0,0.3)	(0.3,1)	难度小且区分能力强

在历年真题中,第V类试题是测试效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上);第I类试题属于“题太难谁都不会做”;第III类试题属于“题太易谁都会做”;而第IV类试题往往对区分中、高水平的考生很有效,这类试题往往是考察考生综合应用能力的试题.

2. 近十年平均分分布

数一平均分分布											
年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
平均分	62.20	70.73	68.10	70.99	77.16	80.11	73.86	67.43	78.82	60.65	79.50



目 录

高等数学部分 (1)

第一章 极 限 (1)
第二章 导数与微分 (8)
第三章 一元函数积分学 (16)
第四章 中值定理 (26)
第五章 多元函数微分学 (35)
第六章 二重积分 (46)
第七章 常微分方程 (51)
第八章 无穷级数 (58)
第九章 空间解析几何 (71)
第十章 五大积分 (74)

线性代数部分 (90)

第一章 行列式与矩阵 (90)
第二章 向量组 (98)
第三章 方程组 (104)
第五章 二次型 (119)
专题一 抽象行列式的计算 (124)
专题二 方阵 A 求 n 次幂 (126)

概率部分 (128)

第一章 随机事件与概率 (128)
第二章 一维随机变量及其分布 (133)
第三章 二维随机变量及其分布 (139)
第四章 随机变量的数字特征 (145)

第五章 大数定律与中心极限定理	(150)
第六章 统计量的数字特征	(151)
第七章 参数估计	(154)
2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(161)
2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(168)
2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(179)
2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(185)
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(197)
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(203)
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(219)
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(225)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(239)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(245)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(261)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(267)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(281)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(287)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(303)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(310)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(325)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(332)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(347)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(354)

高等数学部分

第一章 极 限

一、极限的定义与性质

(2003) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

()

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

解: 选(D).

分析: 假设极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 存在等于 k , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n c_n}{b_n} = k$, 与题设矛盾, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

二、无穷小的性质与无穷小的阶

(1991) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$

解: 填 $-\frac{3}{2}$.

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a = 1$, 故 $a = -\frac{3}{2}$.

(2007) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小是

()

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

解: 选(B).

分析: 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$, $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$,

因 $\ln(1+x) \sim x$, $-\ln(1-\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, 低阶加高阶等价低阶, 故

$$\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}.$$

三、函数极限的计算

1. 分侧讨论计算极限

(1992) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ()

(A) 等于 2 (B) 等于 0 (C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

解: 选(D).

分析: 本题见特殊标志 $e^{\frac{1}{x-1}}$, 需要分侧讨论.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = 0,$$

故选(D).

(2000) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{-x} \right) = 2 - 1 = 1,$$

故极限为 1.

2. $\frac{0}{0}$ 型极限计算

(1994) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$, 其中 $a^2 + c^2 \neq 0$, 则必有 ()

(A) $b = 4d$

(B) $b = -4d$

(C) $a = 4c$

(D) $a = -4c$

解: 选(D).

分析: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $a \tan x \sim ax$, $b(1 - \cos x) \sim \frac{b}{2}x^2$, $a \tan x + b(1 - \cos x) \sim ax$,

$c \ln(1 - 2x) \sim -2cx$, $d(1 - e^{-x^2}) \sim dx^2$, $c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2}) \sim -2cx$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{-2cx} = 2,$$

故 $a = -4c$.

(1997) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} =$ _____.

解: 填 $\frac{3}{2}$.

分析: $\cos \frac{1}{x}$ 为有界振荡, 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x} \sim 3\sin x \sim 3x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2 \cdot x} = \frac{3}{2}.$$

(1998) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 填 $-\frac{1}{4}$.

分析: 由泰勒公式, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}(-x) - \frac{1}{8}(-x)^2 + o(x^2),$$

故 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{4}x^2$,

故原极限结果为 $-\frac{1}{4}$.

(2006) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 填 2.

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$.

(2008) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4}$.

解: 由泰勒公式, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, 故 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$,

同理, $\sin x - \sin(\sin x) \sim \frac{1}{6}(\sin x)^3 \sim \frac{1}{6}x^3$,

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \frac{1}{6}$.

3. 1^∞ 型极限计算

(1991) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (\cos \sqrt{x} - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{2}x)} = e^{-\frac{1}{2}}$.

(1993) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^A,$

其中 $A = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\sin 2t + \cos t - 1) = 2,$

故原极限 $= e^2.$

(1996) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8,$ 则 $a =$ _____.

解: 填 $\ln 2.$

分析: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = e^{3a} = 8,$ 故 $a = \ln 2.$

(2003) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ _____.

解: 填 $\frac{1}{\sqrt{e}}.$

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^A,$

其中 $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x^2)} (\cos x - 1) = -\frac{1}{2},$

故原极限 $= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

4. “ $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty^0, 0^0$ ” 型极限

(1994) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) =$ _____.

解: 填 $\frac{1}{6}.$

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x (x - \sin x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (x - \sin x)}{x \sin^2 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} x^3}{x^3} = \frac{1}{6}.$

(1999) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) =$ _____.

解: 填 $\frac{1}{3}.$

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} x^3}{x^3} = \frac{1}{3}.$

5. 抽象函数极限的计算

(2000) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0,$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ 为 ()

(A)0

(B)6

(C)36

(D) ∞

解:选(C).

分析:方法一,由无穷小的阶的概念, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$,则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 6x + xf(x) = o(x^3)$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + \sin 6x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36. \end{aligned}$$

方法二,由泰勒公式,当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3) + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} - 36 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36.$$

四、数列极限的计算

1. 利用单调有界准则计算数列极限

(1996) 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.解: $x_2 = \sqrt{6 + x_1} = 4 < x_1$, 假设对任意正整数 k , 有 $x_{k+1} < x_k$, 则

$$x_{k+2} = \sqrt{6 + x_{k+1}} < \sqrt{6 + x_k} = x_{k+1},$$

由数学归纳法知数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 且 $x_n > 0$, 则由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 对 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 两侧取极限, 得 $A = \sqrt{6 + A}$, 解得 $A = 3, -2, -2$ 舍去, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

(2006) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$,(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}$.解: (1) $0 < x_1 < \pi$, 且 $x_{n+1} = \sin x_n$, 故有 $x_n > 0$.

又对于任意的 $x > 0$, 有 $0 < \sin x < x, x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 故 $0 < x_{n+1} < x_n < \pi$, 数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 有下界, 极限存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则对 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两侧同时取极限, 得 $A = \sin A$, 解得 $A = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

(2008) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是

()

- (A) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛
- (B) 若数列 $\{x_n\}$ 单调, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛
- (C) 若数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛
- (D) 若数列 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛

解: 选(B).

分析: 对于选项(B), $f(x)$ 为单调有界函数, 若数列 $\{x_n\}$ 单调, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也单调, 满足单调有界准则, 极限存在, 必收敛.

六、渐近线

(1991) 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ ()

- (A) 没有渐近线
- (B) 仅有水平渐近线
- (C) 仅有铅直渐近线
- (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

解: 选(D).

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$, 曲线有一条铅直渐近线 $x = 0$, 有一条水平渐近线 $y = 1$, 故选(D).

(2005) 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____.

解: 填 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

分析: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} - \frac{1}{2}x \right) = -\frac{1}{4},$$

故斜渐近线为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

(2007) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线条数为 ()

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

解: 选(D).

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 故 $x = 0$ 是曲线的一条铅直渐近线,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = +\infty,$$

故曲线沿 $x \rightarrow +\infty$ 方向没有水平线.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{1} \cdot e^x = 1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - \ln e^x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = 0,\end{aligned}$$

故曲线有斜渐近线 $y = x$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0,$$

故曲线有水平渐近线 $y = 0$,

综上, 曲线有 3 条渐近线.

第二章 导数与微分

一、导数定义与应用

1. 分段函数求导

(1999) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数,

则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

- (A) 极限不存在 (B) 极限存在, 但不连续
(C) 连续, 但不可导 (D) 可导

解: 选(D).

分析: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 g(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, 故函数在 $x = 0$ 处连续.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x g(x) = 0,$$

$f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, 故函数在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$.

(2005) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

- (A) 处处可导 (B) 恰有一个不可导点
(C) 恰有两个不可导点 (D) 至少有三个不可导点

解: 选(C).

分析: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 讨论 x 的取值范围:

当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = 1$, 当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = |x|^3$;

当 $|x| = 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$,

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ |x|^3, & |x| > 1 \end{cases}$$

需要讨论函数在 $x = \pm 1$ 处的可导性:

$$x = 1, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3,$$

函数在 $x = 1$ 处不可导.

$$x = -1, f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^3 - 1}{x + 1} = -3,$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - 1}{x + 1} = 0,$$

函数在 $x = -1$ 处不可导, 选(C).

2. 已知可导求其他未知极限

(1989) 已知 $f'(3) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 填 -1.

分析: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = -\frac{1}{2} \times 2 = -1.$

3. 可导的充分条件

(2001) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件为 ()

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh)$ 存在

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh)$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在

解: 选(B).

(2007) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是 ()

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

解: 选(D).

分析: 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

对于选项(A), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0$, 可知 $f(0) = 0$, 故(A)正

确.

对于选项(B), 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(-x)] = 2f(0) = 0$, 故 $f(0) = 0$ 正确.

对于选项(C), 由选项(A)知 $f(0) = 0$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$, 存

在, 故选项(C)正确.

4. 导数的性质与结论

(1992) 设 $f(x) = 3x^3 + x^2 |x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解: 选(C).

分析: 由 $x^2 |x|$ 知, $f(x)$ 2 阶可导, 3 阶不可导.

(1995) 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的 ()

- (A) 充分必要条件 (B) 充分但非必要条件
(C) 必要但非充分条件 (D) 既非充分也非必要条件

解: 选(A).

分析: 令 $\varphi(x) = f(x)|\sin x|$, 则 $\varphi(x)$ 与 $F(x)$ 可导性一致,

$$\varphi'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)\sin x}{x} = f(0),$$

$$\varphi'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-f(x)\sin x}{x} = -f(0),$$

$\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件为 $f(0) = -f(0)$, 即 $f(0) = 0$, 故选(A).

(1998) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 的不可导点的个数是 ()

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

解: 选(B).

分析: $f(x) = (x - 2)(x + 1)|x||x - 1||x + 1|$, 可知函数在 $x = 0, 1$ 处不可导, 在 $x = -1$ 处可导.

(2004) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 ()

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加
(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少
(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$
(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) > f(0)$

解: 选(C).

分析: 已知 $f'(0) > 0$, 即

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0,$$

由极限的局部保号性, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (0, \delta)$ 时, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0$, 且 $x > 0$, 故必有

$$f(x) - f(0) > 0,$$

即 $f(x) > f(0)$.

选项(D) 应为 $f(x) < f(0)$, 选项(A)、(B) 不能确定, 因为只知道在 $x = 0$ 处导数的正负, 而在去心邻域内导数值的正负未知.