时代云图 SHI DAI YUN TU

张宇数学教育系列丛书

张宇考研数学闭关修炼

复习宝典

【习题分册】

主编 张宇

扫码 查真伪

北京理工大学出版社

张宇数学教育系列丛书

张宇考研数学闭关修炼

复习宝典

【习题分册】

◎ 主编 张宇

张宇数学教育系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈静静 崔晨阳 崔巧莲 高昆轮 胡金德 贾建厂 雷会娟
史明洁 王成富 王冲 王慧珍 王燕星 徐兵 严守权 亦一（笔名） 于吉霞
曾凡（笔名） 曾熊 张聪聪 张乐 张青云 张婷婷 张宇 郑光玉 郑利娜
朱杰 朱坤颇

时代云图 SHI DAI YUN TU

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学闭关修炼. 习题分册 / 张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2019.5
ISBN 978-7-5682-6986-5

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 079187 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 蠡县天德印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16
印　　张 / 14.75
字　　数 / 368 千字
版　　次 / 2019 年 5 月第 1 版　2019 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 / 79.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 王美丽
文案编辑 / 孟祥雪
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

Preface 前言

本书是专门供学生进行考研数学强化复习之用的。之所以叫《张宇考研数学闭关修炼》，是希望学生能够用一个集中的、大量的时间进行系统化数学复习，实现质的飞跃。

一、这是上课笔记

这是我在课堂上一页一页讲出来的笔记，学生可以听着课跟我一页一页地学，我把笔记写好了，你可以认真听，不需再做笔记；不上课也完全可以一页一页地自学，我几乎把要说的话一句一句都写出来了，请务必搞懂吃透。

二、这是课后作业

我会选择书中某些好题作为课后作业，书中附有详细解答，课后务必及时落实。

三、这是总结提炼

这是《数学考试大纲》《张宇考研数学真题大全解》《张宇高等数学 18 讲》《张宇线性代数 9 讲》《张宇概率论与数理统计 9 讲》和《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》的全面总结提炼，全部命题点、命题方式和试题分析的总结提炼，包括这几本书里的重中之重的再现与提醒。

四、这是答疑解惑

本书将集中回答并切实解决大家的疑点、弱点，比如将如何画图的所有方法全写出来了，会考哪些应用题和边角知识也全写出来了，等等。

五、这是减负不是增负

不论你是写完了还是正在写辅导书和习题集，本书都可以作为思考总结的笔记，放在手边随时翻阅，你会发现，知识、思路、题型和方法，皆会以清晰的结构呈现在你面前，掌控在你手中。你若能再添砖加瓦，画龙点睛，将其内化为你自己的，那将是极妙的。

六、看到什么程度

一遍当然不够。反复修炼三遍甚至以上，直至字字搞懂，句句通透并熟稔于心，使达炉火纯青、登峰造极之地步，方为大功告成，才可出关。

感谢命题专家们给予的支持、帮助与指导，感谢编辑老师们的辛勤工作和无私奉献，感谢学生们的努力和信任。

本书写写改改，改改写写，历时三年半，虽然仍有不少遗憾，还可再去完善，但总不能一拖再拖，假偶数大年，和盘托出，助潜心研读者，赢得考研数学。

张宇

2019 年 5 月　于北京

Contents 目录

第一部分　高等数学

第二部分 线性代数

第三部分　概率论与数理统计(仅数学一、数学三)

高等数学

第 1 讲 极限

- 函数极限的定义及使用
  - 是常数
  - 唯一性
  - 局部有界性
  - 局部保号性
  - 等式脱帽法
- 函数极限的计算
  - 化简先行
  - 洛必达法则
  - 泰勒公式
  - 无穷小比阶
- 函数极限的存在性
  - 具体型(若洛必达法则失效,用夹逼准则)
  - 抽象型(单调有界准则)
- 函数极限的应用——连续与间断
  - 研究位置
  - 连续
  - 间断
- 数列极限的定义及使用
  - 是常数
  - 唯一性
  - 有界性
  - 保号性
  - 收敛的充要条件
- 数列极限的存在性与计算
  - 归结原则(变量连续化)
  - 直接计算法
  - 定义法(先斩后奏)
  - 单调有界准则
    - 证什么
    - 怎么证
  - 夹逼准则
    - 证什么
    - 怎么证
  - 综合题总结
    - 用导数综合
    - 用积分综合
    - 用中值定理综合
    - 用方程(列)综合
    - 用区间(列)综合
    - 用极限综合

一、函数极限的定义及使用

$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0, x\to\cdot$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

在极限存在的条件下，有 5 个考点

①(是常数)A 是一个常数. 记$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$.

②(唯一性)A 唯一：左极限，右极限；左导，右导.

③(局部有界性)$x\to\cdot$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

④(局部保号性)$x\to\cdot$ 时，若 $A>0\Rightarrow f(x)>0$.

⑤(等式脱帽法)$f(x)=A+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to\cdot}\alpha=0$.

1.1.1 已知$\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2\mathrm{e}^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to1} f(x)$，求 $f(x)$.

1.1.2 当 $x\to1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A) 等于 2　　(B) 等于 0　　(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

1.1.3 已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to0^+} F(x)=0$，试求 α 的取值范围.

1.1.4 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界(　　).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

1.1.5 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$(　　).

(A) 不可导　　(B) 可导且 $f'(0)\neq0$

(C) 取得极大值　　(D) 取得极小值

1.1.6 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为(　　).

(A)0　　(B)6　　(C)36　　(D)∞

二、函数极限的计算

即为七种未定式的计算$\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty\cdot0,\infty-\infty,\infty^0,0^0,1^\infty\right)$.

(1) 化简先行.

① 等价无穷小替换.

a. $x\to0$ 时，　$\sin x\sim x, \tan x\sim x, \arcsin x\sim x, \arctan x\sim x$,

$\mathrm{e}^x-1\sim x, \ln(1+x)\sim x, a^x-1=\mathrm{e}^{x\ln a}-1\sim x\ln a$,

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x.$$

b. 若 α,β 都是同一自变量变化过程下的无穷小量，且 $\alpha=o(\beta)$，则 $\alpha+\beta \sim \beta$.

② 恒等变形
$$\begin{cases}\text{提取公因式},\\ \text{换元}\left(x=\dfrac{1}{t}\text{ 等}\right),\\ \text{通分},\\ u^v=\mathrm{e}^{v\ln u},\\ \text{用公式}\begin{cases}\text{因式分解 } a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),\\ \text{分子有理化}\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\text{ 等},\end{cases}\\ \text{中值定理}.\end{cases}$$

③ 及时提出极限存在且不为 0 的因式.

(2) 洛必达法则
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)},\\ \lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)},\\ \lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^{\psi(x)} g(t)\,\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)}{g[\psi(x)]\cdot\psi'(x)}.\end{cases}$$

【注】(1) $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型；(2) 可导；(3) 结果为 $0,c(c\neq 0),\infty$.

(3) 泰勒公式.

① 熟记以下公式.

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\leqslant 1,$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1,$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x|<1.$$

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^{2}+o(x^{2})(x\to 0)$,

$\tan x=x+\frac{1}{3}x^{3}+o(x^{3})(x\to 0)$,

$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})(x\to 0)$,

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^{3}+o(x^{3})(x\to 0)$,

② 展开原则.

a. $\frac{A}{B}$ 型,适用于“上下同阶”原则.

具体说来,如果分母(或分子)是x的k次幂,则应把分子(或分母)展开到x的k次幂,可称为“上下同阶”原则.

例如,为了计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}$,把$\sin x$泰勒展开,一般可写成如下三种形式,

$$\sin x=x+o(x);\tag{$*$}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3});\tag{$**$}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}+o(x^{5}).\tag{$***$}$$

根据“上下同阶”原则,($*$)式展开得“不够”,($***$)式展开得“过多”,($**$)式正符合要求.于是,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})\right]}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})}{x^{3}}=\frac{1}{6}.$$

b. $A-B$ 型,适用于“幂次最低”原则.

具体说来,即将A,B分别展开到它们的系数不相等的x的最低次幂为止.

例如,已知当$x\to 0$时,$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^{2}}{2}}$与$ax^{b}$为等价无穷小,求$a,b$.

用泰勒公式,$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+o(x^{4})$,$\mathrm{e}^{-\frac{x^{2}}{2}}=1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^{4}}{4}+o(x^{4})$.

显然,将$\cos x$,$\mathrm{e}^{-\frac{x^{2}}{2}}$展开到$x^{4}$时,其系数就不一样了,使用“幂次最低”原则,展开到此项后,进行运算,得

$$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^{2}}{2}}=\left[1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+o(x^{4})\right]-\left[1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^{4}}{4}+o(x^{4})\right]=-\frac{1}{12}x^{4}+o(x^{4}),$$

于是可知$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^{2}}{2}}\sim-\frac{1}{12}x^{4}(x\to 0)$,故$a=-\frac{1}{12}$,$b=4$.

(4) 无穷小比阶.

$$\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}\xlongequal{\frac{0}{0}}\begin{cases}0,\\c\neq 0,\\\infty.\end{cases}$$

1.1.7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x+x^3\cos\dfrac{1}{x}}$.

1.1.8 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}$.

1.1.9 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

1.1.10 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

1.1.11 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-2}}$.

1.1.12 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

1.1.13 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

1.1.14 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}$.

1.1.15 设$a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$等于(　　).

(A)$(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$　　(B)$(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$

(C)$(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$　　(D)$(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$

1.1.16 设函数$f(x)$连续,且$f(0)\neq 0$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\displaystyle\int_0^x f(x-t)\,dt}$.

1.1.17 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

1.1.18 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.

1.1.19 若$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$,则(　　).

(A)$a=\dfrac{1}{2},b=-1$　　(B)$a=-\dfrac{1}{2},b=-1$

(C)$a=\dfrac{1}{2},b=1$　　(D)$a=-\dfrac{1}{2},b=1$

1.1.20 已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$,求$c$的值.

1.1.21 设$f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$,$x>0$,$y>0$.求:

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；(2) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

1.1.22 设 $f(x)$ 有连续导数，$f(0)=0,f'(0)\neq0,F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

1.1.23 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量

$$\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$$

排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小量，则正确的排列次序是（　　）.

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

1.1.24 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x,g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

1.1.25 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=A\neq0$ 的充要条件是（　　）.

(A) $\alpha>1$　　(B) $\alpha\neq1$

(C) $\alpha>0$　　(D) 与 α 无关

1.1.26 半径分别为 $R,r(R>r>0)$ 的两个圆相切于坐标轴原点. 如图 1-1-1 所示.

(1) 当 $x\to0^+$ 时，若线段长 MM_1 与 x^k 同阶，求 k；

(2) 当 $x\to0^+$ 时，若 $\angle MOM_1$ 与 x^c 同阶，求 c.

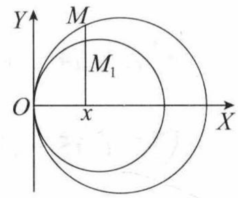

图 1-1-1

三、函数极限的存在性

1. 具体型

若洛必达法则失效，用夹逼准则.

2. 抽象型

单调有界准则.

1.1.27 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$.

(1) 当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

1.1.28 设函数 $f(x)=x-[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1.1.29 设 $x\geqslant0$，记 x 到 $2k$ 的最小距离为 $f(x)$，$k=0,1,2,\cdots$.

(1) 证明 $f(x)$ 以 2 为周期,并写出其在$[0,2]$上的表达式;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$.

1.1.30 (1) 证明当 $x\geqslant 1$ 时,$\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$;

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上连续可导,且

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right].$$

证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

四、函数极限的应用 —— 连续与间断

1. 研究位置

由于一切初等函数在其定义区间内必连续,故只研究两类特殊的点.

① 无定义点(间断),② 分段函数的分段点(不定).

2. 连续

(1) 内点处. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,$\forall x_0\in(a,b)$.

(2) 端点处. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,$a$ 为左端点,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,$b$ 为右端点.

3. 间断

前提:$f(x)$ 在 $x=x_0$ 左右两侧均有定义.

① $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$;② $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$;③$f(x_0)$.

(1)①、② 均存在但 ① 不等于 ②,x_0 为跳跃间断点.

(2)①、② 均存在且 ① 等于 ② 但不等于 ③,x_0 为可去间断点.

其中(1)(2) 组成第一类间断点.

(3)①、② 至少一个不存在且等于无穷,x_0 无穷间断点.

(4)①、② 至少一个不存在且等于振荡不存在,x_0 振荡间断点.

其中(3)(4) 属于第二类间断点.

【注】(1) 点 $x=x_0$ 成为间断点的必要条件是两侧均有定义.

(2) 考查形式有 ① 给出一个函数找出间断点,并讨论类型;② 给定一个区间,求函数在该区间上的间断点. 此时,若给定区间的端点不是自然定义域的端点,即函数在该区间端点的左右邻域有定义,亦要讨论.

1.1.31 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则(　　).