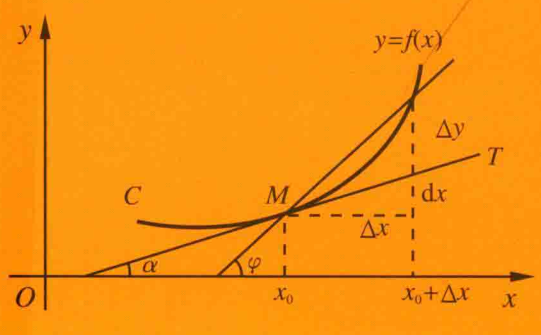
普通高等教育“十三五”规划教材

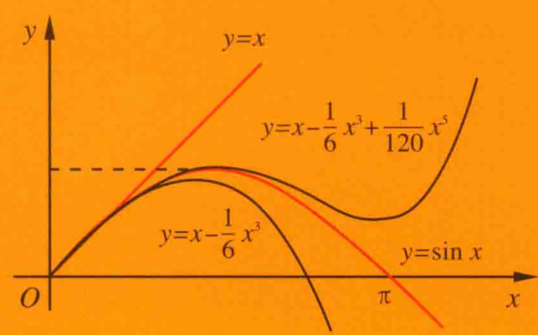
大学数学基础丛书
丛书主编 袁学刚 周文书 刘 满

微积分学习指导

（下册）

齐淑华 王金芝 主编





清华大学出版社

大学数学基础丛书

微积分学习指导

（下册）

齐淑华　王金芝　主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本学习指导是与我们编写的教材《微积分》配套的辅导用书。书中按教材章节顺序编排，与教材保持一致。全书共4章，每章又分4个板块，即大纲要求与重点内容、内容精要、题型总结与典型例题、课后习题解答，以起到同步辅导的作用，帮助学生克服学习中遇到的困难。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导．下册/齐淑华，王金芝主编．—北京：清华大学出版社，2019
(大学数学基础丛书)
ISBN 978-7-302-53306-1

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①齐…　②王…　Ⅲ．①微积分—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第155682号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：10.5　　**字　　数**：334千字
版　　次：2019年9月第1版　　**印　　次**：2019年9月第1次印刷
定　　价：26.00元

产品编号：077723-01

前言

PREFACE

本学习指导是与我们编写的教材《微积分》配套的辅导用书。

微积分是高等院校的重要基础课之一，它不仅是后续课程学习及在各个学科领域中进行研究的必要基础，而且对学生综合能力的培养起着重要的作用，同时更是考研数学试题的重要组成部分。为更好地指导学生学好这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决问题的能力，我们组织编写此书。本书按教材章节顺序编排，与教材保持一致。全书共 5 章，每章又分 4 个板块，即大纲要求及重点内容、内容精要、题型总结与典型例题、课后习题解答，对现行教材逐章逐节同步辅导。各板块具有以下特点：

1. 大纲要求及重点内容部分列出了国家教学大纲对本章内容的基本要求，帮助同学们明确本章应该掌握的数学概念及相关知识。

2. 内容精要部分对每章的内容都给出了简明的摘要，用以帮助读者理解和记忆本书中的主要概念、结论和方法，对本章有一个全局性的认识和把握。

3. 题型总结与典型例题部分，选取了近几年的考研题和竞赛题作为例题，并进行了详细的解答。每种题型的解法都具有代表性。读者可以通过典型例题既对这部分知识消化理解，掌握了常见的解题方法与技巧，又扩充了知识面，同时也做到举一反三，触类旁通。

4. 课后习题解答部分，是对《微积分》一书的课后习题的详细解答，用以帮助读者在完成课后习题遇到困难时参考、查阅。对于课后习题，希望读者在学习过程中，先独立思考，自己动手解题，然后再对照检查，不要依赖于解答。

本书既是大学本科学生学习微积分有益的参考用书，又是有志考研同学的良师益友，相信通过对本书的系统阅读，会对学好微积分有很大帮助。

本书由大连民族大学理学院组织编写，由齐淑华、王金芝主编，参加编写的有刘强、张誉铎、李娇。理学院领导和同事们对本书的编写提出了宝贵的意见和建议，在此表示感谢。

由于作者水平有限，难免有疏漏、不足或错误之处，敬请同行和广大读者指正。

编　者

2019 年 6 月

目录 CONTENTS

第 1 章 多元函数微分学

1.1 大纲要求及重点内容

1. 大纲要求

(1) 理解二元函数的概念,了解多元函数的概念,会求二元函数的定义域。

(2) 了解二元函数的极限与连续性的概念,了解有界闭区域上连续函数的性质。

(3) 理解二元函数偏导数与全微分的概念,了解全微分存在的必要条件和充分条件。

(4) 掌握复合函数一阶偏导数的求法,会求复合函数的二阶偏导数。

(5) 会求隐函数(包括由两个方程构成的方程组确定的隐函数)的一阶和二阶偏导数。

(6) 理解二元函数极值与条件极值的概念,会求二元函数的极值,了解求条件极值的拉格朗日乘数法,会求一些比较简单的最大值与最小值的应用问题。

2. 重点内容

(1) 偏导数和全微分的概念。

(2) 求多元复合函数的一阶、二阶偏导数。

(3) 求隐函数的一阶、二阶偏导数。

(4) 多元函数的极值,包括无条件极值和条件极值。

(5) 利用多元函数解决实际应用中的最大值、最小值问题以及在一定条件下的最大值、最小值问题。

1.2 内容精要

1. 基本概念

(1) **二元函数的定义** 设 D 是平面上的一个非空点集,如果对于 D 内的任一点 (x,y),按照某种法则 f,都有唯一确定的实数 z 与之对应,则称 f 是 D 上的二元函数,它在 (x,y) 处的函数值记为 $f(x,y)$,即 $z=f(x,y)$,其中 x,y 称为自变量,z 称为因变量。点集 D 称为该函数的定义域,数集 $\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的值域。

类似地,可定义三元及三元以上函数。当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数。

(2) **二元函数的几何意义** 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,对于任意取定的

$P(x,y)\in D$,对应的函数值为 $z=f(x,y)$,这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标、z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$,当 $P(x,y)$ 取遍 D 上一切点时,得一个空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$,这个点集称为二元函数的**图形**。二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形就是空间中区域 D 上的一张曲面,定义域 D 是该曲面在 xOy 面上的投影。

(3) **二元函数的极限** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义,如果当点 $P(x,y)$ 无限趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 无限趋于一个常数 A,则称 A 为**函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限**,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

或

$$f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad f(P)\to A(P\to P_0)。$$

二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则,在此不再详述。为了区别于一元函数的极限,我们称二元函数的极限为二重极限。

说明:

① 定义中 $P\to P_0$ 的方式是任意的;

② 二元函数的极限运算法则与一元函数类似。

(4) **二元函数的连续性** 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**连续**。如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续,则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处**间断**。

如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续,则称该函数在**区域 D 内连续**。在区域 D 上连续的二元函数的图形是区域 D 上的一张连续曲面,曲面上没有洞,也没有撕裂的地方。

(5) **偏导数的定义** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应地函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$。如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 x 的偏导数**,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \quad 或 \quad f_x(x_0,y_0)。$$

例如,有

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}。$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 y 的偏导数**为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_y(x_0,y_0)。$$

实际上，偏导数本质上是一元函数的导数，$f'_x(x_0,y_0)$就是一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即

$$f_x(x_0,y_0)=\varphi'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=(f(x,y_0))'_x\big|_{x=x_0};$$

而偏导数 $f_y(x_0,y_0)$是一元函数 $\psi(y)=f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数，即

$$f_y(x_0,y_0)=\psi'(y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=(f(x_0,y))'_y\big|_{y=y_0}。$$

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内任一点(x,y)处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x,y 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$对自变量 x 的偏导数，记作$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x$ 或 $f_x(x,y)$。同理可以定义函数 $z=f(x,y)$对自变量 y 的偏导数，记作$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y$ 或 $f_y(x,y)$。

偏导数的概念可以推广到二元以上函数。

(6) **二元函数可微性与全微分的定义** 如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)**可微分**，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的**全微分**，记为 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y。$$

若函数在区域 D 内各点处可微分，则称这函数**在 D 内可微分**。

(7) **可微分的必要条件**

如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微分，则有：

① $z=f(x,y)$在点(x,y)处连续；

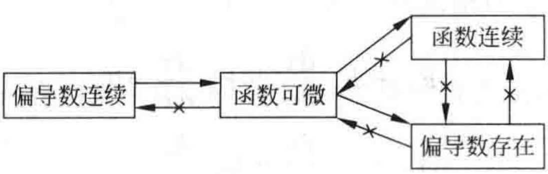
② $z=f(x,y)$在点(x,y)处的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$存在，且 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$。

(8) **可微分的充分条件**

如果函数 $z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$连续，则函数在该点处可微分。

(9) **多元函数连续、可导、可微的关系**

偏导数连续的函数一定可微；可微的函数一定可导；可微的函数一定连续；其他则未必。



2. 闭区域上连续函数的性质

定理1(最大值和最小值定理) 有界闭区域 D 上连续的二元函数,在 D 上能够取得最大值和最小值。

定理2(有界性定理) 有界闭区域 D 上连续的二元函数在 D 上一定有界。

定理3(介值定理) 有界闭区域 D 上连续的二元函数在 D 上能够取得最大值与最小值之间所有的值。

3. 求导法则

(1) 复合函数的求导法则

① 若 $z=f(u,v)$,$u=u(t)$及 $v=v(t)$,则 $z=f[u(t),v(t)]$,且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}。$$

② 若 $z=f(u,v)$,$u=u(x,y)$及 $v=v(x,y)$,则 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}。$$

③ 若 $z=f(u,v,w)$,$u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$,$w=w(x,y)$,则

$z=f[u(x,y),v(x,y),w(x,y)]$,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}。$$

④ 若 $z=f(u,x,y)$,$u=u(x,y)$,则 $z=f[u(x,y),x,y]$,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}。$$

注意 $\frac{\partial z}{\partial x}$把复合函数 $z=f[u(x,y),x,y]$中的 y 看作不变而对 x 的导数;而$\frac{\partial f}{\partial x}$把 $z=f(u,x,y)$中的 u 及 y 看作不变而对 x 的偏导数;$\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$的区别与上面相同。

(2) 隐函数的求导法则

① 一个方程的情形

若方程 $F(x,y)=0$ 确定 $y=f(x)$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$。

若方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 $z=f(x,y)$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$。

注 F_z 是将 $F(x,y,z)$中的 x,y 看作常数对 z 求导的结果,其他类似。

② 方程组的情形

若方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$确定 $y=y(x)$,$z=z(x)$,只要将每个方程两边分别对 x 求导,得

$$\begin{cases}F_x+F_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\G_x+G_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+G_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0。\end{cases}$$

解上述关于$\frac{dy}{dx}$,$\frac{dz}{dx}$的二元线性方程组,求出$\frac{dy}{dx}$,$\frac{dz}{dx}$即可。

4. 偏导数的应用

(1) **二元函数极值** 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义,对于该邻域内异于(x_0,y_0)的任意一点(x,y),如果

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0),$$

则称函数在(x_0,y_0)有**极大值**;如果

$$f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0),$$

则称函数在(x_0,y_0)有**极小值**;极大值、极小值统称为**极值**。使函数取得极值的点称为**极值点**。

(2) **二元函数取得极值的必要条件** 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数,且在点(x_0,y_0)处有极值,则它在该点的偏导数必然为零,即

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0。$$

(3) **充分条件**

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有直到二阶的连续偏导数,且$f_x(x_0,y_0)=0$,$f_y(x_0,y_0)=0$。令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C。$$

① 当$AC-B^2>0$时,函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处取得极值,且当$A>0$时取得极小值$f(x_0,y_0)$;$A<0$时取得极大值$f(x_0,y_0)$。

② 当$AC-B^2<0$时,函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处取不到极值;

(4) **条件极值**

方法一 转化为无条件极值计算

方法二 拉格朗日乘子法

一般地,条件极值问题可以转化为无条件极值问题来处理,这种转化对有些问题有效,但由于要解方程往往有一定困难,有时甚至根本做不到转化为无条件极值,这时可以用拉格朗日乘数法。

求函数$u=f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值点,基本步骤为:

① 构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中λ为参数

② 求$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$对$x,y$及$\lambda$的一阶偏导数,并使之为零,得到

$$\begin{cases}f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0,\\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\\ \varphi(x,y)=0,\end{cases}$$

解出x,y,λ成为条件驻点,x,y就是$u=f(x,y,z)$在约束条件$\varphi(x,y,z)=0$下可能的极值点。

求函数$u=f(x,y,z)$在约束条件$\varphi(x,y,z)=0$下的极值点,基本步骤为:

① 构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z),$$

其中 λ 为参数。

② 求 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$ 对 x,y,z 及 λ 的一阶偏导数,并使之为零,得到

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)=0, \\ f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)=0, \\ f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)=0, \\ \varphi(x,y,z)=0, \end{cases}$$

解出 x,y,z,λ,其中 x,y,z 就是 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下可能的极值点。

注 这些可能的极值点是否为极值点,还需进一步的考查和判别。但在实际问题中,如果由问题的实际意义知所讨论的问题存在极值(或最值),而通过拉格朗日乘数法又只求出唯一一个可能极值点,则无需再论证,该点就是所求的最大值点或最小值点。

(5) **最大值与最小值求法**

有界闭域 D 上的连续函数可以在 D 上取得最大值和最小值。

① 若最大值或最小值在区域 D 的内部取得,则一定是极值;

② 若最大值或最小值在区域 D 的边界曲线上取得,则属于条件极值问题。

因此,求最大值、最小值的一般方法:

① 求函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点;

求函数 $z=f(x,y)$ 在 D 的边界曲线上的所有**条件**驻点;

计算所有驻点和条件驻点处的函数值,比较大小即可。

② 在应用问题中,若已知 $z=f(x,y)$ 在 D 内有最大值或最小值,且在 D 内有唯一的驻点,则该驻点一定就是最大值点或最小值点。

(6) **全微分在近似计算中的应用**

当 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 都较小时,则由二元函数的全微分可得到近似计算公式

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y。$$

1.3 题型总结与典型例题

题型 1-1 求多元函数的定义域

【解题思路】 求比较复杂的多元函数的定义域也和一元函数一样,先写出构成部分的各简单函数的定义域,再解联立不等式组即得所求定义域。

例 1.1 求定义域

(1) $z=\sqrt{x^2-4x+y^2}+\ln(y-x^2)$; (2) $u=\sqrt{\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{z}}$。

解 (1) 由题设可知

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2\geqslant 0, \\ y-x^2>0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} (x-2)^2+y^2\geqslant 4, \\ y>x^2, \end{cases}$$

定义域为$\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2\geqslant 4, y>x^2\}$。

(2) $\begin{cases}\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{z}\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{x^2+y^2}{z}\right|\leqslant 1,\\ z\neq 0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}z\geqslant x^2+y^2,\\ z\neq 0,\end{cases}$

定义域为$\{(x,y,z)\mid z\geqslant x^2+y^2, z\neq 0\}$。

题型 1-2　多元函数的极限

【解题思路】 求二元函数极限常用的方法：

(1) 利用极限的性质(如极限运算法则、夹逼准则、等价无穷小代换)；

(2) 用变量代换法转化为求简单的极限或一元函数的极限；

(3) 利用无穷小量与有界函数之积为无穷小量；

(4) 若连续，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$；

(5) 对于多元函数极限洛必达法则不再适用。

例 1.2 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}, a>0$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$。

解 (1) **解法一** $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x^2}{xy(x+y)}}$。

而$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}\xlongequal{t=xy}\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\dfrac{x^2}{xy(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\dfrac{1}{y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}=\dfrac{1}{a}$。

故$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$。

解法二 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{1}{xy}\cdot\frac{x^2}{x+y}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{1}{xy}\cdot\frac{x^2}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$。

(2) 因为$0\leqslant\left|xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant|xy|$，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|xy|=0$，由夹逼准则知，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$。

例 1.3 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在$(0,0)$连续。

证明 因为 $xy\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$，所以 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$，而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=0$，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$，函数 $f(x,y)$在$(0,0)$处连续。

题型 1-3 证明二元函数的极限不存在

【解题思路】 证明极限不存在的常用方法是，取两个不同的路径，极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ 不相等或取某一路径极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ 不存在，均可证明 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ 不存在。

特别地，证明 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ 不存在：

(1) 若 $f(mx,my)=f(x,y)$，且 $f(x,y)\neq c$，一般选用直线路径 $y=kx$，当动点沿 $y=kx$ 趋于(0,0)时极限值随 k 的变化而变化，则 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ 不存在。

(2) 若 $f(m^\alpha x, m^\beta y)=f(x,y)(\alpha>0,\beta>0)$，选用曲线路径 $y=kx^{\frac{\beta}{\alpha}}$，当动点沿 $y=kx^{\frac{\beta}{\alpha}}$ 趋于(0,0)时极限值随 k 的变化而变化，则 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ 不存在。

(3) $f(mx,my)=m^\alpha f(x,y)$ 时，可令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，当动点趋于(0,0)时极限值随 θ 的变化而变化，则 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ 不存在。

(4) 若 $f(x,y)$ 为分式函数，可先将 $f(x,y)$ 的分子、分母变形，倒推出 y 与 x 的关系，从而找出要取的路径。

例 1.4 下列极限是否存在？若存在，求极限值：

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$； (4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2y}{x+y}$。

证明 (1) 当 y 与 x 同阶时，分子、分母同阶，$f(mx,my)=f(x,y)$，可以选用路径 $y=kx$，则

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=kx}} \frac{x^2+xkx}{x^2+(kx)^2}=\frac{1+k}{1+k^2},$$

极限值随 k 的变化而变化，故 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

具有这样特点的极限还可令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}=\lim_{r \to 0} \frac{r^2\cos^2\theta+r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta,$$

极限值随 θ 的变化而变化，故 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

(2) $f(mx,m^2y)=f(x,y)$，$\alpha=1$，$\beta=2$，令 $y=kx^2$ 时，分子与分母同阶。因为 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y=kx^3}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，所以 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在。

(3) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=x^3-x}} \frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}=\lim_{x \to 0} \frac{-x^3-x^4+o(x^4)}{x^3}=-1,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^4+x^5}{2x}=0,$$

故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$不存在。

（4）当动点沿直线 $y=-x$ 趋于点(0,0)时，函数$\dfrac{x^2y}{x+y}$在点(0,0)的任一邻域内无意义，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x+y}$不存在。

题型 1-4　用定义判断二元函数在某点是否连续、可偏导及可微

【解题思路】 分界函数在分界点处的偏导数和可微性要用定义来讨论。

（1）判断 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否连续，只需求$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$。

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续；

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处不连续。

（2）判断 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否可偏导，就是求两个极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},\quad \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}。$$

若两个极限都存在，则 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处可偏导，且

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},\quad f_y(x,y)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}。$$

（3）按定义判断二元函数 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否可微，只需求极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}。$$

若$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，则函数 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)可微；

若$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0$，则函数 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)不可微。

特别地，判断二元函数 $z=f(x,y)$在(0,0)处是否可微，只需求极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}。$$

若$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则函数 $z=f(x,y)$在(0,0)可微；若$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\neq 0$，则函数 $z=f(x,y)$在(0,0)不可微。

例 1.5 设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使得 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

A. $x_1>x_2,y_1<y_2$ B. $x_1>x_2,y_1>y_2$ C. $x_1<x_2,y_1<y_2$ D. $x_1<x_2,y_1>y_2$

解 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调递增的，关于变量 y 是单调递减的。因此，当 $x_1<x_2,y_1>y_2$ 时，必有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选 D。

例 1.6 当 $x^2+y^2>0$ 时，$f(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$，$f(0,0)=0$，研究函数在点 $(0,0)$ 的可微性。

解 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{\mathrm{e}^{t^2}}=0$。

同理 $f_y(0,0)=0$。于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{t^2}}=0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

例 1.7 如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。(2012 考研数学一，二，三)

证明 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0。$$

又因 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，则

$$f(0,0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0。$$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}$ 存在，所以 $f(x,y)-f(0,0)$ 是 x^2+y^2 的同阶或高阶无穷小，从而 $f(x,y)-f(0,0)$ 是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

特别地，

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

$$f(x,y)-f(0,0)=0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

即
$$f(x,y)-f(0,0)=f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

例 1.8 设函数 $\psi(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 连续，研究 $\psi(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的可微性。

解 令 $z=\psi(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，则 $\psi(0,0)=0\cdot\varphi(0,0)=0$，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\psi(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|x-y|\varphi(x,y)=0=\psi(0,0),$$

于是

$$\psi_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x,0)-\psi(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x-0|\varphi(x,0)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\varphi(x,0),$$

$$\psi_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\psi(0,y)-\psi(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}\varphi(0,y)。$$

① 当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$\psi_x(0,0)=0,\psi_y(0,0)=0$，于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta z-\psi_x(0,0)x-\psi_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\psi(x,y)-\psi(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}。$$

上面的这个极限不能简单地看出来，而 $0\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{x^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{y^2}}=2$，故 $\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x,y)=0$，即 $\varphi(x,y)$ 为无穷小量，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，故此刻 $\psi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

② 当 $\varphi(0,0)\neq 0$ 时，$\psi_x(0,0),\psi_y(0,0)$ 不存在，则此时 $\psi(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不可微。

题型 1-5 有关多元函数连续、偏导数和全微分概念的问题

【解题思路】 (1) 连续与可偏导之间没有必然联系；

(2) 对于二元函数，可微一定连续；

(3) 可微函数的偏导数一定存在；

(4) 不连续一定不可微；

(5) 偏导数不存在一定不可微；

(6) 一阶偏导数连续则一定可微；

(7) 一阶偏导数不连续，不一定不可微。偏导数连续只是可微的充分条件，而不是必要条件；

(8) $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$。

例 1.9 判断题

(1) 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 一定存在。 ( )

(2) 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 一定连续。 ( )

解 (1) 错。 (2) 错。

例 1.10 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数连续；

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数存在。

则有：

A. ②⇒③⇒① B. ③⇒②⇒① C. ③⇒④⇒① D. ③⇒①⇒④

解 一阶偏导数连续则可微，可微函数本身一定连续，可微函数的偏导数一定存在；函数连续和偏导数存在没有必然联系。故选 A。

例 1.11 如果 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续，那么下列命题正确的是(　　)。

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微

C. 若 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

D. 若 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

解 若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，设 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A$。因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2+y^2=0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$。又 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，即有 $f(0,0)=0$。

取 $y=0$，因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x^2}$ 存在，设 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x^2}$。

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x^2}\cdot x=0。$$

同理 $f_y(0,0)=0$。令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\rho}\\&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\rho^2}\cdot\rho\\&=A\cdot 0=0,\end{aligned}$$

故有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\rho}=0$，即有 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微，选 B。

例 1.12 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处的可微性。

解 因为

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处两个偏导数都存在。

又 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，随 k 的变化而变化，故在(0,0)处的极限不存在，从而 $f(x,y)$ 在(0,0)处不连续。所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处不可微。

题型 1-6　求简单多元函数的偏导数

【解题思路】 在求多元函数对某个自变量的偏导数时，只需把其余自变量看作常数，然后直接利用一元函数的求导公式及复合函数求导法则来计算。