



The Complete Works of Wu Wen-Tsun
Topology IV

吴文俊全集 ◆ 拓扑学卷IV

吴文俊/著 李邦河/编订



科学出版社

龍門書局



The Complete Works of Wu Wen-Tsun
Topology IV

吴文俊全集·拓扑学卷 IV

吴文俊 著

李邦河 编订

科学出版社
龙 门 书 局

北 京

内 容 简 介

本卷收录了吴文俊在拓扑学领域发表的 56 篇学术论文, 这些论文包含了吴文俊在示性类、示嵌类、示浸类、示痕类、能计算性与 I^* -量度等方面做出的一系列重要工作, 蕴含了他在拓扑学领域的诸多原始思想.

本卷可作为数学或数学史研究人员、教师、研究生的参考文献, 也可以作为拓扑学课程的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

吴文俊全集. 拓扑学卷. IV/吴文俊著; 李邦河编订. —北京: 科学出版社, 2019.5

国家出版基金项目

ISBN 978-7-5088-5549-3

I. ①吴… II. ①吴… ②李… III. ①拓扑-文集 IV. ①O1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 074594 号

责任编辑: 李 欣 赵彦超 / 责任校对: 彭珍珍

责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 5 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2019 年 5 月第一次印刷 印张: 44

字数: 890 000

定价: 298.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)



纪念吴文俊先生诞辰 100 周年

编 者 序

中国现代数学的崛起, 开始于 20 世纪初, 经历了几代人坚苦卓绝的努力. 在这百年奋战中涌现出来的数学家中, 吴文俊是最杰出的代表之一. 他早年留学法国, 留学期间就已在拓扑学方面做出了杰出贡献, 提出了后来以他的名字命名的“吴公式”和“吴示性类”. 回国后提出了“吴示嵌类”等拓扑不变量, 发展了统一的嵌入理论. 他关于示性类与示嵌类的研究, 已成为 20 世纪拓扑学的经典, 至今还在前沿研究中使用. 20 世纪 70 年代以来, 吴文俊院士在汲取中国古代数学精髓的基础上, 开创了崭新的现代数学领域——数学机械化. 他发明的被国际上誉为“吴方法”的数学机械化方法, 改变了国际自动推理的面貌, 形成了自动推理的中国学派, 已使中国在数学机械化领域处于国际领先地位. 上述工作无疑属于 20 世纪中国数学赶超国际先进水平的标志性成果, 而吴文俊院士博大精深的科学研究, 除了拓扑学与数学机械化以外, 还跨越了代数几何、博弈论、中国数学史、计算图论、人工智能等众多领域, 并在每个领域都留下了这位多能数学家的重要贡献.

吴文俊先生是一位具有强烈爱国精神的数学家. 自 1950 年谢绝法国师友的挽留回到祖国后, 半个世纪如一日, 为在他深爱的中华故土发展数学事业而鞠躬尽瘁. 除了第一流的科研成果, 吴文俊先生长期身处中国数学界领导地位, 在团结带领整个中国数学界赶超世界先进水平方面, 也做出了不可磨灭的贡献. 特别是, 吴文俊先生在担任中国数学会理事长期间, 领导中国数学最终成功地加入了国际数学联盟, 此举大大提高了我国数学界的国际地位, 同时也为我国成功举办 2002 年国际数学家大会铺平了道路.

吴文俊治学严谨, 学术思想活跃, 无论获得多么高的声誉, 他总是勤奋地在科研第一线工作, 一生积极进取, 锲而不舍, 不断取得新的成就. 在开始从事机器证明时, 他已近花甲之年, 从零开始学习编写计算机程序, 每天十多个小时在机房连续工作, 终于在几何定理机器证明这一难题上取得成功.

吴文俊先生为中国现代数学的发展建立了丰功伟绩, 而他本人却始终淡泊、谦逊. 他处事公正豁达, 待人充满善意, 受过他帮助的人可以说不计其数. 正因如此, 这位有着崇高国际声望而平易近人的学者, 受到了每一个认识他的人格外的爱戴与尊敬.

2019 年 5 月 12 日是吴文俊先生百年诞辰. 为了纪念这个特殊的日子, 我们编辑出版了《吴文俊全集》, 通过系统地收录、整理吴文俊先生的学术著作和论文, 纪念吴先生的学术思想及学术成就. 全集共计 13 卷, 包括拓扑学 4 卷、数学机械化 5

卷以及数学史、博弈论与代数几何、数学思想各 1 卷；同时，全集还设有附卷，收录吴文俊先生的同事、学生和其他社会各界人士发表过的与吴先生有关的各类文献资料。

最后，我们对在全集编辑中给予帮助的各位同事表示衷心感谢；感谢国家出版基金对于全集出版的资助；感谢科学出版社编辑人员在出版全集时认真细致的专业精神；感谢相关出版与新闻机构在版权方面提供的帮助。

李邦河 高小山 李文林

2019 年 3 月

前 言

本卷收录了吴文俊先生在拓扑学领域发表的 56 篇论文. 按照时间顺序和工作重点, 我们大致可将吴先生的工作分成四个时期来介绍.

第一个时期的工作主要完成于 1953 年前, 包括他在中央研究院、法国以及回国初期的工作. 这一阶段的工作主要集中在示性类方面, 包括 Stiefel-Whitney 示性类、吴示性类、Pontrjagin 示性类等.

1948 年发表的论文 [2] 是吴文俊引起轰动的一篇论文. 该论文投稿于 1947 年 8 月, 此时他正在中央研究院工作. 该文给出了 Stiefel-Whitney 示性类的乘法公式的一个较为简短的证明. 此公式的证明最初由 Whitney 于 1940 年给出, 因其证明极为复杂, 没有全文刊出. 故在论文发表后, Whitney 仍不得不保留原稿. 陈省身先生十分欣赏吴的结果, 推荐到数学领域的顶级期刊 *Annals of Mathematics* 上发表. 据说该文章出来后, Whitney 认为不必再保留他的手稿了.

论文 [3-10] 则是吴文俊在法国留学和工作的时候完成的.

在法国期间, 吴文俊于斯特拉斯堡大学, 跟随 Ehresmann 学习. Ehresmann 是 E. Cartan 的学生, 他的博士论文是关于 Grassmann 流形的同调群的计算. 同时, 他还是纤维丛概念的创始人之一. 吴在其指导下继续进行纤维空间及示性类的研究, 完成了论文 [4, 6, 7], 这些论文所述定理及其完整证明后来整理到其博士学位论文中. 他的学位论文同 G. Reeb 的论文一起, 于 1952 年作为一本书出版. 作为副产品, 吴在 [3] 中还证明了 $4k$ 维球面没有近复结构, 这是第一个关于球面上的近复结构的非平凡的结论. 迄今为止, 有近复结构的 6 维球面上是否存在复结构仍然是一个著名的没有解决的问题.

此后, 吴文俊到巴黎, 在法国国家科学研究中心 (CNRS) 跟随 H. Cartan 继续拓扑学研究. 他于 1950 年发表的论文 [8], 研究了流形上 Stiefel-Whitney 示性类. 在该文中吴为研究 Stiefel-Whitney 示性类的计算问题, 定义了一类新的示性类, 并给出了一个重要公式. 这一公式后来被称为第一吴公式. 该公式使 Stiefel-Whitney 示性类的计算变得极其容易, 同时利用该公式还可以轻而易举地证明 Stiefel-Whitney 示性类不仅是拓扑不变的, 而且还是同伦不变的. 他在该文中提出来的新的示性类后来被称为吴示性类, 简称为吴类. 同年发表的论文 [9], 给出了 Grassmann 流形上的 Steenrod 幂运算的公式, 这就是著名的第二吴公式. 1956 年 Dold 证明, 这一公式给出了 Stiefel-Whitney 示性类之间所有可能的关系.

在法国期间完成的论文大都发表在《法国科学院通报》(*Comptes Rendus*) 上,

均是以简报的形式报道研究成果,详细完整的证明则在后面的论文中给出,如论文 [13, 14] 给出了 [8, 9] 中结果的详细证明.

在论文 [10] 中,吴研究了 Smith 运算与 Steenrod 运算.他发现此二组运算是等价的,并确定二者互相决定的方式,从而给出了 Steenrod 幂一个较自然的定义.但是该文中的证明用到了 Thom 关于 Steenrod 幂的内在的公理系统理论.后来,在论文 [24] 中,他给出了不借助于 Thom 工作的直接证明.

吴文俊自 1952 年回国后的大多数文章都发表在国内的期刊上.论文 [12, 16-19] 是研究 Pontrjagin 示性类的一个系列文章,他证明了该示性类模 3、模 4 的拓扑不变性,还引领了对这一示性类的拓扑不变或非拓扑不变的进一步研究. Pontrjagin 示性类定义在微分流形上,吴曾想证明其拓扑不变性,后来有人发现这是不对的. Pontrjagin 示性类是有理不变的,其示性类可变部分产生于其绕元素部分,所以他关于该示性类模 3、模 4 的拓扑不变性是非常重要的工作.他关于四维定向流形的 Pontrjagin 示性类是符号差的三倍的猜想,对后世数学的发展影响非常深远,成为 Hirzebruch 的符号差定理和 Atiyah-Singer 指标定理的源头.

第二个时期的工作大致在 1953 年至 1958 年间,包括论文 [11, 20-23, 25-26, 28-30, 32-34, 41]. 这一阶段吴独创了关于复形的示嵌类、示浸类和示痕类等概念.

论文 [11] 中引入了关于复合形的一组非同伦不变的拓扑不变量.由于熟知的大量拓扑不变量均是同伦不变的,吴的这一发现受到了高度重视.在这一发现的鼓舞下,他在论文 [20] 中提出了示嵌类的概念,在论文 [22] 中提出了示浸类,并系统发展了复形在欧氏空间中的嵌入与浸入理论,见 [21, 22, 25, 26]. 他独创地运用 Smith 周期变换定理于复形的 p 重约化积,并于论文 [30, 33, 34] 中提出示痕类的概念.运用这些类他给出了 n 维复形可嵌入于 $R^{2n}(n > 2)$, 可浸入于 $R^{2n-1}(n > 3)$ 的充分且必要条件,以及 n 维复形在 $R^{2n+1}(n > 1)$ 中的两个嵌入同痕的充要条件.

1957 年,吴文俊将这一阶段成果整理成书,在数学所油印成册.直至 1965 年才将此油印本修订后,总结成专著 *A Theory of Imbedding, Immersion, and Isotopy of Polytopes in an Euclidean Space*, 由科学出版社出版.中译本《可剖形在欧氏空间中的实现问题》一直到 1978 年 5 月才正式出版.“文革”期间,吴对印刷电路与集成电路中的布线问题产生了兴趣,这导致了他对 1 维复形在平面的可嵌入问题的思考.吴完全解决了这一问题,使著名的 Karatowski 不可嵌入定理成为其特例.这一结果被作为附录收录到该中译本中.

第三个时期的工作可从 1958 年算起,至 1973 年.1958 年,拓扑学被批判成“理论脱离实际”,吴曾把主要精力放在更加联系实际的博弈论上.但他对拓扑仍然保持兴趣,也写了不少文章,只是方向比较分散,包括 [27, 35-40, 42-46].

可以看到 [27] 是一篇点集拓扑的论文,论文 [36] 讨论了射影空间中某些实二次曲面的示性类,论文 [38] 是一篇讨论欧氏空间中旋转的短文, [39, 40] 研究的是

微分拓扑中的浸入问题, 论文 [45] 研究的是奇点理论, [46] 是一篇有关外微分形式的文章, 论文 [37] 证明了 $n > 4$ 时可定向光滑流形能光滑嵌入于 R^{2n-1} 这个重要定理.

第四个时期的工作起始于 1973 年. 这一阶段, 吴文俊试图在代数拓扑方面构造性地统一处理同调群、同伦群、示性类、上同调运算等, 见 [47-55]. 他以“能计算性”的概念, 重新整理和改造 Sullivan 的极小模理论, 提出和解决了不少问题. 在早期的文章中, 吴文俊将这一新的理论命名为 I^* 函子, 见 [47-51], 后来发现这不是通常意义下的函子, 所以最后将其定名为 I^* 量度, 见 [52-54]. 这一时期, 吴在数学机械化和代数拓扑两条战线上同时作战. 在出版了这方面的专著 *Rational Homotopy Type: A Constructive Study via the Theory of the I^* -Measure* 之后, 他便全力以赴于数学机械化方向了.

感谢李博副研究员对完成该前言的大力协助.

李邦河

目 录

1. Topologie——Note Sur les Produits Essentiels Symétriques des Espaces Topologiques	1
2. On the Product of Sphere Bundles and the Duality Theorem Modulo Two	4
3. Topologie——Sur L'existence D'un Champ D'éléments de Contact Ou D'une Structure Complexe Sur Une Sphère	19
4. Topologie——Sur Les Classes Caractéristiques D'un Espace Fibré En Sphères	22
5. Topologie——Sur Le Second Obstacle D'un Champ D'éléments de Contact Dans Une Structure Fibrée Sphérique	25
6. Topologie——Sur La Structure Presque Complexe D'une Variété Différentiable Réelle de Dimension 4	28
7. Topologie——Sur La Structure Presque Complexe D'une Variété Différentiable Réelle	31
8. Topologie Algébrique——Classes Caractéristiques Et i -carrés D'une Variété ..	33
9. Topologie Algébrique——Les i -carrés Dans Une Variété Grassmannienne	36
10. Sur les Puissances de Steenrod	39
11. 有限可剖分空间的新拓扑不变量	49
12. On Pontrjagin Classes I	77
13. On Squares in Grassmannian Manifolds	91
14. “格拉斯曼”流形中的平方运算	114
15. 一个 H. Hopf 推测的证明	136
16. 论 ПОНТРЯГИН 示性类 II	145
17. 论 ПОНТРЯГИН 示性类 III	170
18. 论 ПОНТРЯГИН 示性类 IV	189
19. 论 ПОНТРЯГИН 示性类 V	215
20. On the Realization of Complexes in Euclidean Spaces I	225

21. On the Imbedding of Polyhedrons in Euclidean Spaces	276
22. On the Realization of Complexes in Euclidean Spaces II	281
23. On the $\Phi_{(p)}$ -Classes of a Topological Space	307
24. On the Relations between Smith Operations and Steenrod Powers	312
25. On the Realization of Complexes in Euclidean Spaces III	321
26. On the Reduced Products and the Reduced Cyclic Products of a Space	339
27. On the Dimension of a Normal Space with Countable Basis	350
28. On the Isotopy of C^r -Manifolds of Dimension n in Euclidean $(2n+1)$ - Space	355
29. On the Realization of Complexes in Euclidean Spaces II	360
30. On the Isotopy of Complexes in a Euclidean Space I	386
31. Topologie Combinatoire Et Invariants Combinatoires	414
32. On Certain Invariants of Cell-Bundles	422
33. On the Isotopy of a Finite Complex in a Euclidean Space I	428
34. On the Isotopy of a Finite Complex in a Euclidean Space II	434
35. 关于 Leray 的一个定理	438
36. 某些实二次曲面的示性类	449
37. On the Imbedding of Orientable Manifolds in a Euclidean Space	464
38. 欧氏空间中的旋转	473
39. A Theorem on Immersion	475
40. On the Immersion of C^∞ -3-Manifolds in a Euclidean Space	477
41. On the Notion of Imbedding Classes	480
42. On the Imbedding of Manifolds in a Euclidean Space(1)	483
43. On Complex Analytic Cycles and Their Real Traces	486
44. On Critical Sections of Convex Bodies	498
45. S_k 型奇点所属的同调类	507
46. On Universal Invariant Forms	520
47. 代数拓扑的一个新函子	536
48. 代数拓扑 I^* 函子论 —— 齐性空间的实拓扑	539
49. 代数拓扑 I^* 函子论 —— 纤维方的实拓扑	553
50. Theory of I^* -Functor in Algebraic Topology—Effective Calculation and	

Axiomatization of I^* -Functor on Complexes	574
51. Theory of I^* -Functor in Algebraic Topology —— I^* -Functor of a Fiber Space	597
52. On Calculability of I^* -Measure with Respect to Complex-Union and Other Related Constructions	618
53. de Rham-Sullivan Measure of Spaces and Its Calculability	623
54. A Constructive Theory of Algebraic Topology——Part I. Notions of Measure and Calculability	643
55. De Rham Theorem from Constructive Point of View	663
56. Some Remarks on Jet-Transformations	685

1. Topologie——Note Surles Produits Essentiels Symétriques des Espaces Topologiques*

Note¹ de M. Wen-Tsün Wu, présentée par M. Élie Cartan

Dans un espace topologique donné E prenons un ensemble arbitraire de n points $\{x_1, \dots, x_n\}$ qui ne sont nécessairement pas tous différents. Deux ensembles $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\{y_1, \dots, y_n\}$ sont considérés comme identiques si chaque x_i est égal à un certain y_j et chaque y_i est égal à un certain x_j . Nous définissons, d'après M M. Borsuk et Ulam^①, dans cet espace une topologie d'une manière naturelle. L'espace topologique ainsi obtenu s'appelle produit essentiel symétrique de l'espace E et sera désigné par $E(n)$. L'objet de cette Note est d'étudier des propriétés topologiques et en particulier de déterminer les groupes d'homologie des espaces $I(n)$ et $C(n)$, où I est un intervalle fermé et C est un cercle.

Considérons d'abord le cas de $I(n)$. On remarque qu'un point de $I(n)$ peut être représenté par un ensemble des valeurs $\{x_1, \dots, x_n\}$ telles que $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$.

Prenons dans l'espace euclidien à n dimensions $\mathcal{R}^n$, $n + 1$ points

$$A_0 = (0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$A_1 = (1, 1, \dots, 1, 1),$$

$$A_2 = (0, 1, \dots, 1, 1),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Désignons par $[x_0, \dots, x_n]$ le point du simplexe $\sigma^n = A_0 A_1 \dots A_n$ dont les coordonnées barycentriques sont $x_0, \dots, x_n$. La transformation

$$f : [x_0, \dots, x_n] \rightarrow \{x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n\}$$

* *C. R. Acad. Sci. Paris* 224, 1947: 1139-1141.

① *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1931, 37: 875-882.

est une transformation continue de σ^n sur $I(n)$. Deux points $[x_0, \dots, x_n]$ et $[y_0, \dots, y_n]$ ont la même image s'il existe des entiers $i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1, j_1 \geq 1, \dots, j_k \geq 1$ tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n x_i &= \sum_{i=0}^n y_i = 1, \\ x_2 &= \dots = x_{i_1} = 0, & y_2 &= \dots = y_{j_1} = 0, \\ x_{i_1+2} &= \dots = x_{i_1+i_2} = 0, & y_{j_1+2} &= \dots = y_{j_1+j_2} = 0, \\ &\vdots & &\vdots \\ x_{i_1+\dots+i_{k-1}+2} &= \dots = x_{i_1+\dots+i_k} = 0; & y_{j_1+\dots+j_{k-1}+2} &= \dots = y_{j_1+\dots+j_k} = 0; \\ x_0 &= y_0, \\ x_1 &= y_1, \\ x_{i_1+1} &= y_{j_1+1}, \\ &\vdots \\ x_{i_1+\dots+i_{k-1}+1} &= y_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'espace déduit de σ^n par l'identification de toutes les paires de simplexes ordonnés

$$\begin{aligned} A_0 A_1 A_{i_1+1} &\dots A_{i_1+\dots+i_{k-1}+1}, \\ A_0 A_1 A_{j_1+1} &\dots A_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} \end{aligned}$$

est homéomorphe à $I(n)$. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème I — Soit $I'(n)$ le complexe déduit du simplexe $A_2 \dots A_n$ par l'identification de tous les simplexes ordonnés de la table suivante :

$$\begin{aligned} A_3 A_4 A_5 &\dots A_{n-1} A_n, \\ A_2 A_4 A_5 &\dots A_{n-1} A_n, \\ A_2 A_3 A_5 &\dots A_{n-1} A_n, \\ &\dots \dots \dots \\ A_2 A_3 A_4 &\dots A_{n-2} A_{n-1}. \end{aligned}$$

Ators $I(n)$ est homéomorphe à l'union de $I'(n)$ et d'un intervalle $A_0 A_1$.

Borsuk et Ulam ont démontré que $I(n)$ ne peut pas être plongé dans $\mathcal{R}^n$ lorsque $n \geq 4$. Avec notre théorème il serait facile de voir que $I(4)$ peut être plongé dans $\mathcal{R}^5$. En effet $I'(4)$ est un triangle $A_2 A_3 A_4$ avec l'identification des côtés $A_2 A_3, A_2 A_4,$

A_3A_4 . Donc $I'(4)$ peut être plongé dans $\mathcal{R}^3$. En prenant dans $\mathcal{R}^5$ un intervalle A_0A_1 sur une droite qui ne rencontre pas $\mathcal{R}^3$, on voit que l'union de A_0A_1 et $I'(4)$, c'est-à-dire $I(4)$, est plongé dans $\mathcal{R}^5$. Ce théorème a été démontré par M. Haratomi^①.

L'espace $C(n)$ se déduit de $I(n)$ par l'identification des points frontières o et I de l'intervalle I . Cela correspond à l'identification des points

$$[y_1, o, y_2, \dots, y_n] \quad \text{et} \quad [o, y_2, \dots, y_n, y_1].$$

Cette observation conduit aux résultats suivants :

Théorème II — $C(n)$ est homéomorphe au complexe déduit de σ^n par les identifications de la table suivante:

$$\left\{ \begin{array}{lll} A_0A_1A_3A_4A_5 & \cdots & A_{n-1}A_n \\ A_0A_1A_2A_4A_5 & \cdots & A_{n-1}A_n \\ A_0A_1A_2A_3A_5 & \cdots & A_{n-1}A_n \\ & \vdots & \\ A_0A_1A_2A_3A_4 & \cdots & A_{n-2}A_{n-1}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} A_0A_2A_3 & \cdots & A_n \\ A_nA_1A_2 & \cdots & A_{n-1}. \end{array} \right.$$

Théorème III — $C(n)$ est une H -sphère lorsque n est impair. Pour n pair, les seuls groupes d'homologie non nuls sont H^0 et H^{n-1} , qui sont d'ailleurs isomorphes au groupe additif des entiers.

Comme $I(n)$ est un H -simplexe, toutes les transformations de $I(n)$ en lui-même ont au moins un point fixe. La situation est différente pour $C(n)$. Soient $0 \leq \theta \leq 2\pi$ la coordonnée angulaire sur C et α une valeur inférieure à $2\pi/n$. La transformation

$$f : \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \rightarrow \{\theta_1 + \alpha, \dots, \theta_n + \alpha\}$$

est une transformation de $C(n)$ en lui-même qui ne possède pas de points fixes.

① *Jap. Journal of Math.*, 1932, 9: 103-110.

2. On the Product of Sphere Bundles and the Duality Theorem Modulo Two*

Introduction^①

Given two sphere bundles $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ over the base complexes K_1 and K_2 respectively, it is possible to define in a natural way a “product bundle” over the product complex $K_1 \times K_2$. When $K_1 = K_2 = K$ (say), the part of the product bundle over the diagonal of the product complex $K \times K$ is the product bundle in the sense of Whitney.^② We shall prove in the present paper that a certain duality theorem holds for the product bundle over $K_1 \times K_2$ and that Whitney’s duality theorem for sphere bundles follows from this more general duality theorem as a consequence. (Throughout the paper coefficients mod 2 will be used.) The idea of this proof seems to be quite different from Whitney’s original one, of which only a brief sketch is known.^③

The paper is divided into three sections. In §1 some preliminary considerations and theorems on vector fields are given. A duality theorem for the product bundle over $K_1 \times K_2$ is then proved in §2. §3 is devoted to a proof of Whitney’s duality theorem.

§1

1. We recall in this paragraph the definition of a bundle of linear spaces or more simply, a vector bundle.

A complex K with cells $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ and a v -dimensional vector space V are given. To each point p of K a v -dimensional vector space $V(p)$ is associated so that $V(p)$ and $V(q)$ are disjoint if p and q are distinct points of K . Suppose there are non-degenerate linear mappings $\xi_{\sigma_i p}$ of V on $V(p)$ for every σ_i of K and every point p of

* *Ann. of Math.*, 1948, 49(3): 641-653.

① The problems in this paper were suggested to me by Professor S. S. Chern, with whom I have many helpful discussions. To him are expressed here my thanks.

② Whitney, *Lectures in Topology*. Harvard Univ. , 1941: 131.

③ Whitney, *Proc. , Nat. Acad. Sci. ,* 1940, 26: 143-148.