

西安石油大学优秀学术著作出版基金资助

Gravity Inversion Method of Density Interface in Spatial Domain

# 空间域密度界面 反演方法

冯旭亮◎著



中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

# 空间域密度界面反演方法

冯旭亮 著



中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

## 内 容 提 要

密度界面反演可以较好地解决地质体界面的起伏变化,在区域地质调查、能源和资源勘探中发挥着重要作用。本书系统梳理了现有空间域密度界面反演方法的基本原理、应用效果及进展,重点阐述了适用于复杂形态密度界面反演的正则化反演方法的基本原理、相关技术措施及应用前景。本书在复杂形态密度界面反演的基础理论和实际应用方面均有可供参考的独到见解,可以为地球物理反演或密度界面反演研究的相关工作提供参考,也可作为地球物理勘探专业的科研工作者及高等院校师生的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

空间域密度界面反演方法 / 冯旭亮著.  
—北京:中国石化出版社,2019.4  
ISBN 978-7-5114-5301-3

I. ①空… II. ①冯… III. ①密度界面—研究 IV.  
①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 068139 号

未经本社书面授权,本书任何部分不得被复制、抄袭,或者以任何形式或任何方式传播。版权所有,侵权必究。

### 中国石化出版社出版发行

地址:北京市朝阳区吉市口路9号  
邮编:100020 电话:(010)59964500

发行部电话:(010)59964526

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail:press@sinopec.com

北京柏力行彩印有限公司印刷

全国各地新华书店经销

\*

710×1000 毫米 16 开本 12.5 印张 241 千字

2019年5月第1版 2019年5月第1次印刷

定价:68.00元

# 前 言

重力勘探方法是运用最早的地球物理勘探方法之一，具有经济、横向分辨率高、勘探深度大及可快速获取面积上信息的优点。当地质界面上、下的物质密度不同时，就构成了密度分界面，故密度分界面（简称密度界面）是一类特殊的地质界面，其与地层界面、地壳界面、岩石圈界面等相对应。密度界面反演作为了解地球内部圈层构造的一种重要方法，长期以来都是重力学研究的一项主要内容。对于密度界面反演方法的研究不但可以较好地解决地质体界面的起伏变化，在区域地质调查、矿产资源和能源勘探中发挥重要作用，而且可以促进重力反演理论的进步。因此，对于密度界面反演方法的研究具有重要的实用价值及理论意义。

根据计算域不同，密度界面反演方法可以分为频率域和空间域两类，而每类又包含不同的方法。从应用效果来看，绝大多数密度界面反演方法能反演光滑形态的密度界面，其可适用于克拉通盆地基底、莫霍面起伏等反演。而许多地质构造界面往往表现为非光滑形态，如地塹、半地塹基底、俯冲带之下的莫霍面等。若细化密度界面的局部形态，则一类密度界面甚至表现为局部光滑与非光滑同时存在的形态（可称为复杂形态密度界面），如裂陷盆地基底等。对于此类密度界面，仅有空间域的正则化方法在某些特定函数的约束下可反演其形态，而该函数的形式决定了密度界面的反演结果。

笔者从2011年开始接触密度界面的反演问题，重点针对复杂形态密度界面的反演进行研究，核心是正则化反演方法的原理及相关技术措施等。通过近年来的研究，实现了复杂形态密度界面反演，成果引起了相关研究人员的兴趣。为了更好地与同行交流，推广和改进复杂

密度界面反演方法，并促进其在重力资料反演中的应用，决定将现有研究成果加以总结并出版。为了便于读者更好地理解并使用密度界面反演的正则化方法，本书亦对现有空间域的密度界面反演方法进行了梳理、总结，对目前研究和使用的直接迭代法、脊回归法、压缩质面法的原理及其应用进行了介绍。此外，由于正演是反演的基础，因此本书在空间域密度界面反演问题研究中也涉及了空间域密度界面重力异常正演问题。

本书共分为七章，第一章对密度界面反演方法进行概述；第二章介绍空间域密度界面重力异常正演方法；第三章至第五章介绍了空间域常用的密度界面反演方法，并重点对直接迭代法和正则化反演方法进行了论述，尤其对正则化反演方法中模型约束函数的建立及其应用效果进行了详细的分析；第六章详细阐述了复杂密度界面反演方法原理，并对所进行的模型测试作出了分析；第七章介绍了复杂密度界面反演方法的几个应用实例。

本书的前期编写工作完成后，我与中国石化出版社赵文编辑共同进行了统稿和校订。书中所涉及的研究工作得到了王万银教授的悉心指导和帮助，在研究的过程中亦得到了潘作枢教授的指导，在此表示衷心的感谢。感谢长期以来默默付出、全力支持我的家人，特别是我的妻子郭瑞坤女士。本书的成书过程中亦得到了许多同事、朋友、学生的帮助，在此一并表达诚挚的谢意！

本书受西安石油大学优秀学术著作出版基金资助出版。

由于作者水平有限，本书中难免有疏漏和不足之处，敬请批评指正。

# 目 录

第一章 密度界面反演方法发展与评价 .....	( 1 )
第一节 密度界面反演的意义 .....	( 1 )
第二节 密度界面反演方法的发展 .....	( 1 )
第三节 现有反演方法的评价 .....	( 5 )
第四节 密度界面反演方法发展趋势 .....	( 5 )
第二章 空间域密度界面重力异常正演方法 .....	( 8 )
第一节 有限单元法 .....	( 8 )
第二节 边界单元法 .....	( 16 )
第三章 空间域密度界面直接迭代反演方法 .....	( 22 )
第一节 直接迭代法基本原理 .....	( 22 )
第二节 直接迭代法的改进措施 .....	( 23 )
第三节 直接迭代法模型测试 .....	( 29 )
第四节 直接迭代法应用实例 .....	( 47 )
第四章 空间域密度界面正则化反演方法 .....	( 49 )
第一节 目标函数研究 .....	( 49 )
第二节 最优化方法 .....	( 60 )
第三节 模型约束适用性研究 .....	( 68 )
第四节 正则化反演方法应用实例 .....	( 98 )
第五章 其他空间域密度界面反演方法 .....	( 109 )
第一节 经验公式法 .....	( 109 )
第二节 脊回归法 .....	( 113 )
第三节 压缩质面法 .....	( 116 )
第六章 复杂密度界面三维重力反演方法 .....	( 122 )
第一节 复杂密度界面反演的研究概况 .....	( 122 )

第二节	复杂密度界面反演策略 .....	(129)
第三节	模型测试 .....	(136)
<b>第七章</b>	<b>复杂密度界面反演方法应用实例 .....</b>	<b>(164)</b>
第一节	南海沉积盆地基底起伏反演 .....	(164)
第二节	渭河盆地西安凹陷基底起伏反演 .....	(180)
<b>参考文献</b>	.....	<b>(187)</b>

# 第一章 密度界面反演方法发展与评价

## 第一节 密度界面反演的意义

当地质界面上、下物质密度不同时，就构成了密度分界面，故密度分界面（简称密度界面）是一类特殊的地质界面。密度界面与地层界面、地壳界面、岩石圈界面等相对应，因此研究密度界面的起伏形态对于莫霍面起伏、岩石圈厚度、区域构造、储油构造等的研究具有非常重要的意义。

密度界面的研究中，地球物理方法是目前最为有效的方法和手段。其中地震方法对于密度界面的精细研究能取得比较好的应用效果，但地震成本高，并且无法快速获得大面积范围内的密度界面起伏特征；另外，在有屏蔽层存在的地方（如低速盐层对地震信号有屏蔽作用），地震无法获得有些层位的反射信号。相对来说，重力勘探具有经济、勘探深度大以及快速获得面积上信息的优点，在研究地质体横向不均匀性、特别是地质体的边缘位置时，有其独特的优势。因此，密度界面反演作为了解地球内部结构的一种重要方法，长期以来都是重力学研究的主要内容。

在利用重力异常研究地质体的几何参数时有三个阶段：第一阶段是研究地质体边缘的平面位置，第二阶段是研究地质体边缘的垂向位置（深度），第三阶段是研究地质体上、下界面的起伏变化。通过这三个阶段的研究就可以得到地质体的几何参数，达到解决有关地质问题的目的。利用重力异常进行密度界面反演一直是重力学研究的重点，也是重力学研究的最终阶段和目的。密度界面反演方法的研究不但可以更好的解决地质体界面的起伏变化，在区域地质调查、矿产资源和能源勘探中发挥重要作用，而且可以促进重力反演理论的进步，故密度界面反演方法的研究具有重要的理论意义及实用价值。

## 第二节 密度界面反演方法的发展

重力密度界面反演方法出现于 20 世纪中叶，最早出现的有  $\sin x/x$  法、迭代法等，随后出现了众多方法。根据计算域不同，这些方法概括起来可分为空间域和频率域两大类方法。

### 1. 空间域密度界面反演方法

空间域密度界面反演方法种类较多，其中典型的反演方法有经验公式法、直

迭代法、脊回归法、正则化方法、压缩质面法、级数法、样条函数法等。根据目前研究和使用的程度来看，直接迭代法、脊回归法和正则化方法研究较多，而其他方法相对较少，甚至仅有个别学者进行研究。

经验公式法是计算密度界面深度的近似方法，该方法是对由其他资料获得的已知界面深度与重力异常的关系进行分析，从而建立密度界面深度与重力异常的经验公式。常见的经验公式有线性经验公式、多项式经验公式、双曲正切经验公式等。经验公式法的优点是十分简便，二维与三维界面均可使用，在界面起伏平缓且埋深较大时，误差不大；缺点是反演结果受约束条件及经验公式形式的影响较大。王平等在利用双曲正切经验公式反演南海东北部莫霍面深度时，利用全区统一的经验公式和分区经验公式得到的结果差别较大，经过对比认为，分区经验公式更具合理性。

直接迭代法是出现较早的方法，也是研究和应用较多的一类方法。1960年，Bott提出了一种根据重力异常计算二维沉积盆地基底深度的方法，其原理是利用无限大平板重力异常公式逐次逼近消除剩余异常。这一迭代计算的方法为随后的反演计算提供了基础。1968年，Cordell和Henderson在Bott提出的方法的基础上，提出了一个比较完善的三维重力反演方法。为加快计算速度，在计算某个点的重力异常值时，对于该点正下方的长方体，采用垂直圆柱场源公式计算，对于其他长方体采用垂直线元公式计算。1984年，孙德梅和闵志在反演密度界面时，考虑随界面埋深的增加，所计算的剩余密度体与地表测点的距离越大，且具有三维的特点，此时在测点引起的重力值应小于无限大平板重力异常，于是将系数调整为1.6，达到收敛快的目的。密度界面反演存在多解性的问题，为解决这一问题，1985年，林振民和阳明引入少量的已知深度点进行二维密度界面重力反演，并且在迭代中利用已知深度点的重力异常与实测布格重力异常的差值拟合区域重力异常，使该方法直接可以用布格重力异常进行计算，另外在反演中设计了加速收敛因子并给出了取值原则。1996年，Leão等利用已知深度点和重力异常对地下构造的基本参数进行最优估计，采用得到的最优参数进行了三维密度界面的重力反演。2009年，Prutkin和Casten在迭代中加入了正则化因子，提高了反演的稳定性，另外，在迭代反演中一次只迭代一个计算点下方的界面深度，以此加快正演计算的速度，从而提高了反演方法的效率。2013年，Zhou在反演沉积盆地基底时，利用线积分方法进行正演计算，并且在反演时利用实测重力异常与模型拟合重力异常的最大差值构造反演迭代公式，从而提高了反演的效率和稳定性。同年，张盛和孟小红引入已知深度点作为约束，并且在反演中加入深度加权函数纠正界面畸变。2014年，Silva等分析了Bott方法存在问题，改进了反演迭代公式，提高了收敛速度，并提出了保证反演稳定的措施。

直接迭代法的迭代过程需要在误差允许范围之内充分拟合实测重力异常，故

其对数据误差较敏感,可采用最小二乘拟合的方法,即建立  $L_2$ -范数意义下的模型正演重力异常与实测重力异常之差的目标函数,求解此目标函数的极小化问题,即可反演得到密度界面的起伏形态。对于该目标函数的求解,马奎特方法是一类常用的方法。1985年,Rao利用脊回归法解释了倾斜断层的重力异常。21世纪以来,脊回归法得到了较多的应用。2005年,Chakavarthi和Sundararajan利用该方法研究了二维断层模型密度界面的反演。随后的几年内,Chakavarthi和Sundararajan先后实现了2.5D沉积盆地基底反演研究、3D沉积盆地基底反演研究、二维背斜、向斜模型的反演。此外,在2014年,Chakavarthi和Sastry进行了2.5D断层模型的反演研究。2015年,Mojica和Bassrei反演了3D沉积盆地基底,在反演中利用GCV准则求取了最优正则化参数,并利用MPI并行方法加快了反演速度。对于以上目标函数极小化问题的求解,亦有学者应用其他最优化方法。夏江海利用奇异值分解求取了密度界面深度,杨强利用共轭梯度法反演了密度界面深度。朱自强等利用神经网络BP算法实现了两个三维界面的反演研究,该方法需要已知一个界面的基准面埋深和分布于两个界面上的几个深度控制点。刘云峰和沈晓华利用遗传算法进行了二维密度界面的反演,在反演时利用“界面平滑”作为正则化约束条件。柯小平等利用遗传算法反演了青藏东缘三维莫霍面深度。王笋和申重阳根据地震资料构造分层界面模型与参数控制,运用光滑约束建立目标函数,用遗传算法解决最优化问题,从而实现多层密度界面二维反演。李丽丽和马国庆应用快速模拟退火法对中国南海海域的重力垂直梯度进行反演获得了中国南海高分辨率海底地形,秦静欣等提出了一种改进的自适应模拟退火密度界面反演方法,并将其用于印度-孟加拉湾地区莫霍面反演,检验的方法的实用性。Pallero等用粒子群法分别实现了二维沉积盆地基底和三维沉积盆地基底深度反演。

由于非线性反演问题往往是不适定的,因此可利用正则化原理建立一个稳定的非线性函数并使其最小化而达到反演的目的。该稳定函数由数据拟合函数和正则化函数构成,其中数据拟合函数保证反演结果能够拟合实测重力异常。正则化函数由两项组成:已知深度约束函数和模型约束函数,前者利用界面的已知深度来保证反演结果尽可能地接近界面真实深度,其并不直接决定反演界面的形态;后者建立了界面相邻剖分模型的变化规律以保证反演结果符合界面的主要地质特征。Barbosa等利用  $L_2$ -范数建立了模型约束函数,以此反演了光滑的三维沉积盆地基底。随后,Silva等和Martins等分别实现了变密度情形下光滑形态二维和三维沉积盆地基底反演。Uieda和Barbosa研究了球坐标系下非线性反演方法,并应用于南美洲莫霍面反演。在非光滑密度界面反演方面,Barbosa等利用加权矩阵对Barbosa等提出模型约束函数进行改进,实现了非光滑形态沉积盆地基底反演。之后,Silva等利用熵正则化进行了非光滑形态沉积盆地基底二维反演。Martins

等则利用  $L_1$ -范数形式的全变差函数进行了非光滑形态三维沉积盆地基底反演。Lima 等通过对比认为, 在反演非光滑形态密度界面方面, 全变差正则化方法比加权平滑方法及熵正则化方法更具优势。在此基础上, 冯旭亮等实现了变密度模式双界面非光滑形态盆地基底二维反演, Xing 等进行了基于多种约束的多层密度界面 2.5D 反演研究。

正则化反演方法的优势在于可以方便地添加约束信息, 反演结果的形态细节较好, 但其耗时较长。Cai 和 Zhdanov 将柯西型积分用于密度界面正反演之中, 提高了正则化反演的效率; Chen 等采用 GPU 并行提高了正则化反演的速度。Silva 和 Santos 近似公式计算剖分模型的重力异常, 并通过对计算区域限制以提高正演的效率, 从而加快了整个正则化反演的速度。不同于以上方法, Santos 等则利用正则化原理扩展了直接迭代法, 在保证反演结果呈现非光滑形态的同时, 极大地提高了反演的效率。

压缩质面法也是出现较早的方法。1967 年, Tanner 提出了压缩质面法, 但该方法求解方程组的计算是不稳定的, 所以要求剖分模型的宽度大于界面的深度。1977 年, 刘元龙和王谦身改进了压缩质面法, 剖分的质体单元宽度为 2 倍的点距, 提高了其稳定性, 并且利用迭代计算提高了反演的精度。1987 年, 刘元龙等详细的推导了三维密度界面反演的质面系数法。2014 年, 胡立天和郝天瑛在压缩质面法逐步迭代中使用已知控制点计算出合适的密度基准面深度和界面密度差, 使反演结果和控制点拟合最好。

空间域其他方法的研究较少。1955 年, Tomoda 和 Aki 提出了  $\sin x/x$  法, 1956 年, Tsubor 用该方法反演了加利福尼亚中北部莫霍面。1987 年, 陈建国和王宝仁根据重力异常的级数系数与密度界面的级数系数的关系, 提出了一种反演任意起伏地形上观测重力异常的正弦级数法。1993 年, 汪汉胜等通过球谐展开, 得到重力异常的级数展开式, 并推导出积分形式的反演迭代解。重力异常反演是一个求解第一类非线性积分方程的问题, 王硕儒等将积分方程的被积函数展成界面起伏的幂级数形式, 用迭代法和 B 样条函数法进行求解。高尔根等从二度体重力异常正演公式出发, 导出地下界面迭代反演的计算公式, 然后利用广义似然函数对模型参数进行优化选择, 获得模型参数修正量的计算方法, 实现了二度体单一界面的稳健迭代反演。

## 2. 频率域密度界面反演方法

频率域反演方法出现于 20 世纪 70 年代。Parker 提出了重力异常正演计算的频率域快速计算公式; Oldenburg 根据 Parker 公式, 提出了频率域密度界面迭代反演方法(简称 Parker-Oldenburg 法), 自此频率域方法因其快速的特点而得到了广泛的发展和应用。Gomez-Ortiz 和 Agarwal 和 Shin 等分别给出了频率域密度界面反演的 MATLAB 程序和 FORTRAN 程序, Xu 和 Chen 给出了三维断层模型重力

异常频率域正演的 FORTRAN 程序。

由于频率域反演时指数因子的高频放大作用,反演不能稳定收敛。为保证其稳定性,通常采用加低通滤波器的方法,但低通滤波器的参数较难选择。为解决频率域反演的稳定收敛问题,一些学者研究了其他措施。冯锐等提出了平移下界面和递推下界面修正量的方法;关小平则使用无限大平板重力公式计算每次迭代的修正量,而利用 Parker 公式计算拟合重力异常;王万银和潘作枢详细研究了指数因子的取值,采用调整深度参数的方法解决了收敛性问题;Guspi 则采用非迭代的措施避免了指数因子高频放大的影响;张会战等采用小波多尺度分解代替低通滤波,避免了阈值的选取;肖鹏飞等采用徐世浙提出的空间域迭代法来代替原 Parker-Oldenburg 法中的向下延拓算子,提高了反演的稳定性,保证了反演精度;冯娟等在反演中根据已知资料合理选取基准面深度,保证了迭代的稳定收敛。

Parker-Oldenburg 法基于连续傅里叶变换,而在实际计算时采用 FFT 这一数值算法,因此不可避免的引入了数值误差,表现为混叠、周期化、边界震荡等误差现象。针对这一问题,柴玉璞和贾继军在数值计算中采用了乘子法和移样法两项技术提高了反演精度;张凤旭等则采用余弦变换代替傅里叶变换以解决这一问题。Wu 和 Tian 提出了 Gauss-FFT 法,在保证计算速度的同时大大提高了傅里叶变换的计算精度。Wu 和 Chen 给出了变密度棱柱体模型的重力及其张量的频率域正演计算公式。此外,Wu 研究了基于 Gauss-FFT 法的变密度界面模型重力异常正演计算方法,相比传统的 FFT 法,该方法具有较高的计算精度。

### 第三节 现有反演方法的评价

通过对各密度界面反演方法的实际应用效果进行对比,结果表明,空间域密度界面反演方法对于界面的细节刻画较好,其既可反演光滑形态密度界面,又能反演非光滑形态密度界面(正则化方法或正则化原理扩展的其他方法),甚至可以实现光滑与非光滑形态同时存在的密度界面的三维反演。然而,空间域方法速度较慢,尤其正则化反演方法计算量非常大,耗时长。而频率域密度界面反演方法最大的优势在于其计算速度快,可适用于大规模数据的三维反演,但仅能反演光滑形态密度界面,且当界面相对起伏较大时,迭代过程可能不收敛。

### 第四节 密度界面反演方法发展趋势

#### 1. 大区域密度界面反演

随着重力场观测技术不断进步,如 GRACE、GOCE 等重力卫星的快速发展,密度界面的反演逐渐趋于区域化或全球化,如全球范围的结晶基底深度或莫霍面

深度反演。为实现这一目标，需要开展两个方面的研究。第一，当研究区范围较大时，必须考虑地球曲率的影响，平面直角坐标已不满足研究需要，需采用球坐标系甚至椭球坐标系。第二，大区域或全球密度界面的反演涉及的计算量非常大，亟需研究提高反演速度的措施。

目前关于球坐标系下的密度界面反演研究较少。汪汉胜等通过球谐展开得到重力异常的级数展开式，并推导出积分形式的反演迭代解，实现了球坐标系下深部大尺度单一密度界面的重力反演。Wieczorek 等研究了 Parker-OldenburgFFT 算法等效的球谐系数法，并应用于月球地壳厚度反演。Reguzzoni 等将地震全球地壳模型 CRUST2.0 与 GOCE 卫星重力数据结合，在球坐标系下完成了全球莫霍面和地壳厚度的反演。Uieda 和 Barbosa 将直接迭代法与光滑正则化方法结合进行了球坐标系下南美洲莫霍面深度反演。

平面直角坐标系下密度界面反演时，通常采用垂直并置的棱柱体来剖分待反演界面之上的介质，用棱柱体的底面深度近似密度界面的深度，棱柱体重力异常正演计算方法已非常成熟。而在球坐标系下需要使用球面柱体(或球锥)剖分密度界面，其关键之一在于必须用数值方法计算其重力异常正演问题，目前已有一些方法，如泰勒级数、高斯-勒让德正交等。但是在计算时，如何保证计算的数值稳定性是未来需要解决的问题。

关于提高计算速度方面一直是地球物理反演研究的重点之一。在密度界面反演方面，目前提高计算效率的措施主要包括并行计算技术、加快正演计算速度以提高反演效率以及简化迭代反演过程等。随着重力观测手段的不断丰富以及地质勘探需求的增加，现有提高计算速度的措施能否适应是一个需要考虑的问题。未来随着云计算等技术的快速发展，大数据量的重力反演计算问题应该会很好地解决。

## 2. 精细反演

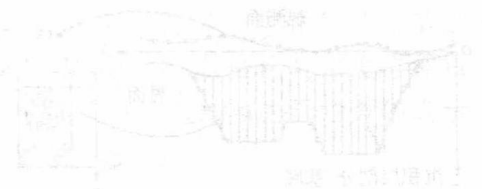
由于重力场本身的特征以及密度界面反演方法的原理，现有反演方法大多只能得到光滑形态密度界面。由于地质构造的复杂性，实际的密度界面多呈非光滑形态或光滑与非光滑同时存在的特征，甚至呈现非凸集形态，因此，大多数密度界面反演方法得到的结果仅为真实界面的“模糊”反映。随着地质勘探目标难度逐渐增大，以往近似的密度界面反演方法已不能满足研究需要，亟需发展精细的密度界面反演方法。

通过现有密度界面反演方法的原理分析及效果对比，目前仅有正则化方法可以通过模型约束函数控制相邻剖分界面模型的变化规律，使其符合地质特征，并可通过已知深度约束函数确保反演结果接近真实深度。因此，对于密度界面的精细反演，需优先发展正则化反演方法。

目前的正则化密度界面反演技术已能解决光滑形态或非光滑形态的密度界面

反演问题，且对于光滑与非光滑特征同时存在的密度界面反演问题也有一些研究，如裂陷盆地基底起伏反演，但该方面的研究非常少。Lima 等将光滑反演与模型解释结合而刻画了受断裂控制的二维沉积盆地的基底形态；Sun 等提出了一种基于可调整的  $L_p$ -范数的二维反演方法，同时反演光滑和非光滑界面；Feng 等利用归一化总水平导数垂向导数将  $L_1$ -范数和  $L_2$ -范数结合起来作为模型约束函数，实现了裂陷盆地基底三维反演。

密度界面精细反演的本质在于利用重力异常客观地呈现界面的各种起伏形态，而重力场本身为连续场，因此，需要尽可能地结合已知信息(如地质资料、钻井或其他地球物理资料等)作为约束进行反演。重力资料的优势在于易获取、经济、覆盖面广，往往应用于其他资料(如地震等)较少、研究程度较低的区域，因此反演方法研究的重点和难点在于如何利用少量的资料作为约束以提高反演精度，并研究新的模型剖分方式及每次迭代时模型修改量的计算技术，实现密度界面精细反演。



## 第二章 空间域密度界面重力异常正演方法

正演是反演的基础。根据计算域不同，密度界面重力异常正演方法可分为空间域正演方法和频率域正演方法，而空间域的密度界面正演方法主要分为有限单元法和边界单元法两大类。有限单元法的基本思想是用不同方式对复杂形体进行分割，将其转化为一系列简单形体(点元、面元、线元)的组合，计算这些简单形体的重力异常再求和，即可得到复杂形体的重力异常。边界单元法的基本思想是将复杂形体异常的体积分通过奥高公式转化为面积分，再由格林公式转为线积分，而后累加求和得到整个形体的重力异常。本章主要介绍目前在密度界面正演中常用的有限单元法和边界单元法的基本原理并推导相应的计算公式。

### 第一节 有限单元法

用于密度界面重力异常正演的有限单元法中，最常用的剖分方法是点元法，其次是面元法和线元法。

#### 1. 点元法

点元法通常将密度界面之上或之下的介质剖分为垂直并置的直立六面体微元，用所有直立六面体微元引起的重力异常之和近似该密度界面的重力异常。现以将密度界面之上的介质进行剖分为例，分别介绍二维和三维密度界面重力异常的正演计算原理。

#### 1) 二维密度界面重力异常正演

以沉积盆地基底反演为例，设在直角坐标系中， $z$  坐标向下为正。盆地由上

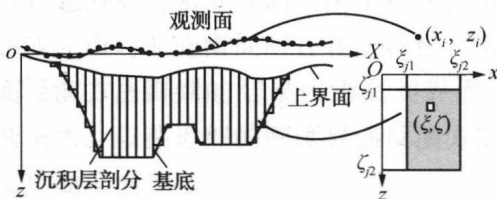


图 2-1 二维沉积盆地模型示意图

界面与基底组成，中间为沉积层。将沉积层剖分为相邻的二维垂直柱体，其水平尺寸是已知的，并且为常数，柱体的顶面与沉积层上界面重合，其底面与盆地基底重合(图 2-1)。则可用该相邻二维垂直柱体在观测面引起的

重力异常近似表示沉积盆地基底起伏在观测面引起的重力异常，其表达式为：

$$g_i = \sum_{j=1}^K f_i(m_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (2-1)$$

式中,  $g_i$  为第  $i$  个测点的重力异常;  $f_i(m_j)$  为第  $j$  个测点上引起的重力异常, 其表达式为:

$$f_i(m_j) = 2G \int_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot \frac{\zeta - z_i}{(\xi - x_i)^2 + (\zeta - z_i)^2} d\xi d\zeta \quad (2-2)$$

式中,  $G$  为牛顿万有引力常数, 其值为  $6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ ;  $(x_i, z_i)$  为第  $i$  个观测点的坐标;  $(\xi, \zeta)$  为柱体内微元的坐标, 第  $j$  个柱体的范围为  $\xi_{j1} \sim \xi_{j2}$ 、 $\zeta_{j1} \sim \zeta_{j2}$ ;  $\Delta\rho(z)$  为沉积层与基底密度差。

对于式(2-2), 可先对  $\xi$  积分, 即:

$$\begin{aligned} f_i(m_j) &= 2G \int_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot \frac{\zeta - z_i}{(\xi - x_i)^2 + (\zeta - z_i)^2} d\xi d\zeta \\ &= 2G \int_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot \frac{\zeta - z_i}{(\xi - x_i)^2 + (\zeta - z_i)^2} d(\xi - x_i) d\zeta \\ &= 2G \int_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot \arctan \left( \frac{\xi - x_i}{\zeta - z_i} \right) d\zeta \Big|_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \end{aligned} \quad (2-3)$$

式(2-3)为一个单重积分, 该积分可用基于高斯-勒让德积分的数值积分方法计算。式(2-3)可写为以下形式:

$$f_i(m_j) \approx 2G \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} f(\zeta) d\zeta = \frac{\zeta_{j2} - \zeta_{j1}}{2} \sum_{k=0}^n w_k f \left( \frac{\zeta_{j2} - \zeta_{j1}}{2} x_k + \frac{\zeta_{j2} + \zeta_{j1}}{2} \right) \quad (2-4)$$

式中,  $f(\zeta)$  为式(2-3)中的被积函数;  $x_k$  为  $[-1, 1]$  上的高斯点, 可通过求勒让德多项式  $P_{n+1}(x)$  的零点而得到;  $w_k$  为求积系数, 其值可通过构造求积公式得到。

## 2) 三维密度界面重力异常正演

设在直角坐标系中,  $z$  坐标向下为正。假设地下存在一密度界面, 且界面之下地层密度均匀, 界面之上地层密度随深度变化, 界面上下地层的密度差为  $\Delta\rho(z)$ 。将界面之上的地层剖分为垂直并置的直立六面体, 其水平尺寸是已知的, 并且为常数, 柱体的顶面与地表或介质上界面重合, 其底面与密度界面重合(图 2-2)。则可用该垂直并置的直立六面体在观测面引起的重力异常近似表示密度界面起伏在观测面引起的重力异常, 其表达式与式(2-1)相同。

三维情形下,  $f_i(m_j)$  的表达式为

$$f_i(m_j) = G \int_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \int_{\eta_{j1}}^{\eta_{j2}} \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \times \frac{\zeta - z_i}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (2-5)$$

式中,  $G$  为牛顿万有引力常数, 其值为  $6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ ;  $(x_i, y_i, z_i)$  是观

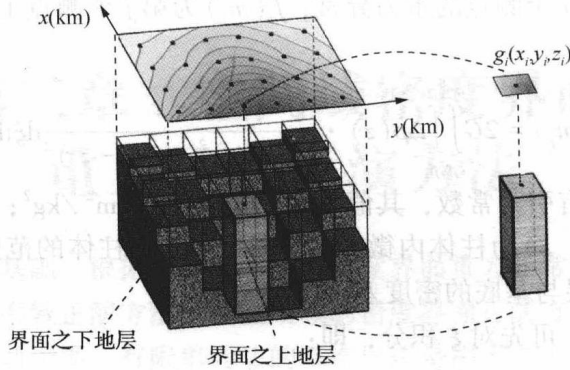


图 2-2 密度界面正演模型示意图(据 Martins 等, 2011)

测点坐标,  $(\xi, \eta, \zeta)$  是场源坐标, 第  $j$  个直立六面体的坐标范围为  $\xi_{j1} \sim \xi_{j2}$ 、 $\eta_{j1} \sim \eta_{j2}$ 、 $\zeta_{j1} \sim \zeta_{j2}$ ;  $\Delta\rho(z)$  为界面上下地层的密度差。

下面推导式(2-5)的计算表达式。首先对  $\xi$  积分, 利用积分公式:

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C \quad (2-6)$$

可得:

$$\begin{aligned} f_i(m_j) &= G \int_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \int_{\eta_{j1}}^{\eta_{j2}} \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot \frac{\zeta - z_i}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta \\ &= G \int_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \int_{\eta_{j1}}^{\eta_{j2}} \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot \frac{\zeta - z_i}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2]^{3/2}} d(\xi - x_i) d\eta d\zeta \\ &= G \int_{\eta_{j1}}^{\eta_{j2}} \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot \frac{(\zeta - z_i)(\xi - x_i)}{[(\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2] [(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2]^{1/2}} \\ &\quad d\eta d\zeta \Big|_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \end{aligned} \quad (2-7)$$

然后对  $\eta$  积分, 并令  $r = [(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2]^{1/2}$ , 则式(2-7)可写为

$$f_i(m_j) = G \int_{\eta_{j1}}^{\eta_{j2}} \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot \frac{(\zeta - z_i)(\xi - x_i)}{[(\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2] r} d\eta d\zeta \Big|_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \quad (2-8)$$

令  $I = \int_{\eta_{j1}}^{\eta_{j2}} \frac{(\zeta - z_i)(\xi - x_i)}{[(\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2] r} d\eta$ , 则式(2-8)可写为:

$$f_i(m_j) = G \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} \Delta\rho(z) \cdot I d\zeta \Big|_{\xi_{j1}}^{\xi_{j2}} \quad (2-9)$$

下面用换元法计算  $I$ 。